

Stanisław KEMPNY

## NOŚNOŚĆ GRANICZNA RAM PŁASKICH NA MODELU USTROJU Z JEDNOSTRONNYMI WIĘZAMI

**Streszczenie.** Posługując się ustrojem z jednostronnymi więzami wprowadzonymi w wytypowanych przekrojach krytycznych, rozwiązano zagadnienie nośności granicznej ram płaskich. Metodą tą można obliczyć przemieszczenia tych ram w chwili osiągnięcia nośności granicznej.

## LOAD BEARING CAPACITY OF PLANE FRAMES IN UNILATERAL CONSTRAINS MODEL

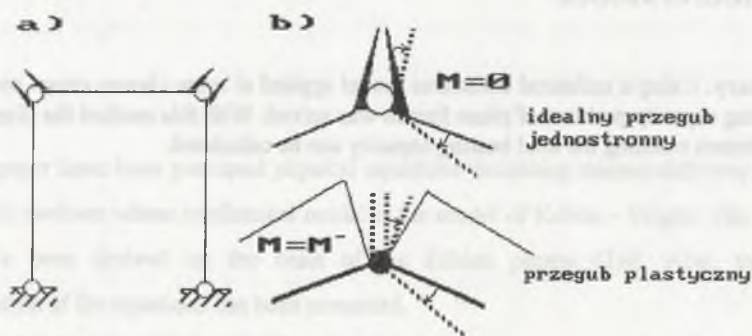
**Summary.** Using a unilateral constrains model applied at some chosen cross-sections the load bearing capacity problem of plane frames was solved. With this method the displacement of these frames reaching the load bearing capacity can be calculated.

### 1. Wstęp

W teorii nośności granicznej ustrojów prętowych poddanych działaniu obciążeń określonej kombinacji zakłada się proporcjonalny ich wzrost do wytworzenia się w konstrukcji takiej liczby przegubów plastycznych, że traci ona zdolność do przenoszenia obciążeń (staje się mechanizmem) [1]. Obciążenie odpowiadające takiemu wyczerpaniu nośności konstrukcji, jest charakteryzowane współczynnikiem wzrostu wszystkich obciążeń kombinacji ( $\mu$ ). Konstrukcja pod działaniem narastającego obciążenia powinna spełniać założenia zestawione między innymi w [3]. W niniejszej pracy nośność graniczną konstrukcji prętowej wyznacza się, traktując ją przy tym, jak ustrój z jednostronnymi więzami [5]. Pozwala to na obliczeniową ocenę wielkości odkształceń w chwili osiągnięcia nośności granicznej.

## 2. Przegub plastyczny a przegub jednostronny

W konstrukcji prętowej, w której dominującym wpływem jest zginanie, mogą wytworzyć się przeguby plastyczne. Można zauważyć, że przegub plastyczny jest przegubem jednostronnym przy określonej w nim wartości momentu zginającego, równej wartości uplastycznienia (por. rys.1a i b). Zmiana kąta w przegubie plastycznym, tak samo jak w jednostronnym przegubie idealnym, może się odbyć tylko w jednym kierunku, lecz w tym przypadku dopiero po osiągnięciu granicznej wartości momentu zginającego (np.  $M = M_k^+$ ) w miejscu przegubu. Dla momentu  $M = -M_k^-$  w tym miejscu mamy do czynienia z przegubem jednostronnym o przeciwnej do poprzedniej możliwości zmiany kąta. Każdemu przekrojowi, w którym może nastąpić uplastycznienie (przekrojowi krytycznemu), odpowiadają dwie wartości momentów uplastycznienia o przeciwnych zwrotach. Tym samym równoważny rzeczywistemu ustrój z jednostronnymi więzami ma w każdym przekroju krytycznym dwa przeguby jednostronne o przeciwnej ograniczonej możliwości zmiany kąta obrotu.



Rys.1

## 3. Zagadnienie nośności granicznej na modelu ustroju z jednostronnymi więzami

Zakłada się w danym ustrój, poddany działaniu obciążeń określonej kombinacji, skończoną liczbę przekrojów niebezpiecznych, w których mogą powstać przeguby plastyczne (przeguby jednostronne). Jest to więc ustrój z jednostronnymi więzami, którego zachowanie pod działaniem obciążenia opisują równania kanoniczne. W dalszym ciągu przedstawiono trzy sposoby tworzenia tych równań.

Sposób 1

Tworząc równania kanoniczne ustrojów z jednostronnymi więzami metodą sił usuwa się więzy jednostronne i równocześnie wprowadza się siły odpowiadające usuniętym więzom (w tym przypadku momenty por. rys.2b i c). Jeśli liczba usuniętych więzów jednostronnych jest większa od stopnia statycznej niewyznaczalności ustroju, wówczas wprowadza się dodatkowe więzy dwustronne, zapewniające geometryczną niezmienność ustroju podstawowego (rys.2d). Jeśli w przekroju krytycznym  $j$  moment zginający osiąga wartość  $x_j = M_j^+$ , wówczas mamy w tym przekroju jednostronny przegub, w którym obrót można określić nierównością [2]:

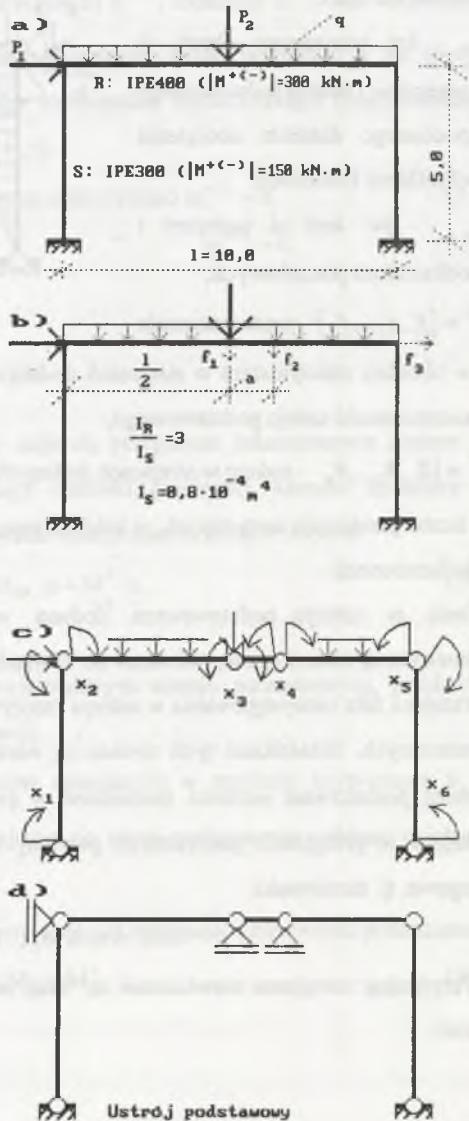
$$\delta_{-j}^T \cdot x + \mu \cdot \Delta_{jP} + \Delta_{j\sigma_0, \sigma_0} - f^T \cdot R < 0$$

Jeśli zaś moment w tym przekroju  $x_j = -M_j^-$ , wówczas zachodzi nierówność przeciwna. Należy bowiem zauważyć, że znak zmiany kąta obrotu w przegubie plastycznym jest przeciwny do znaku momentu uplastyczniającego.

Równania kanoniczne ustroju z jednostronnymi przegubami otrzymamy, wprowadzając do przytoczonej nierówności zmienne osłabiające  $\varphi$  ( $\varphi^+, \varphi^-$ ), doprowadzające ją dla poszczególnych przekrojów krytycznych do równań postaci:

$$\delta_{-j}^T \cdot x + \mu \cdot \Delta_{jP} + \Delta_{j\sigma_0, \sigma_0} - f^T \cdot R + (-)\varphi_j^{+(-)} = 0, \\ j=1,2, \dots, n, \varphi_j^+ \geq 0, \varphi_j^- \geq 0, \quad (3.1)$$

(obowiązuje przy tym bądź znak plus bądź minus).



Oznaczenia są:  $\delta_j^T = \{\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jn}\}$

kąty wzajemnego obrotu w przegubie wprowadzonym w przekroju krytycznym  $j$ , w poszczególnych stanach jednostkowych  $x_i = 1$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), przykładowo jak na rys.2e, f,

$\Delta_{jP}$  - kąt wzajemnego obrotu w przegubie  $j$  ustroju podstawowego poddanego działaniu obciążenia określonej kombinacji,

$\Delta_{j\sigma, \epsilon_j}$  - jw. lecz od naprężeń i odkształceń początkowych,

$f^T = \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$  - przemieszczenia

w układzie rzeczywistym w miejscach dodanych podpór, zapewniających geometryczną niezmienną ustroju podstawowego,

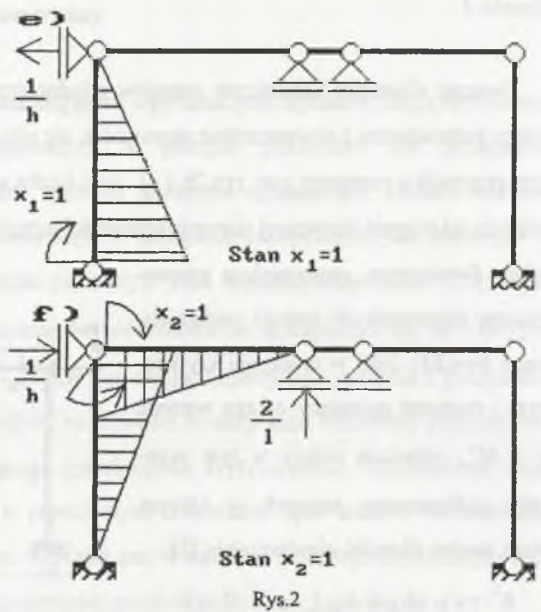
$R^T = \{R_1, R_2, \dots, R_d\}$  - reakcje w miejscach dodanych więzów jw.,

$n$  - liczba przekrojów krytycznych, w których mogą powstać przeguby plastyczne (przeguby jednostronne).

Jeśli w ustroju podstawowym dodano więzy dwustronne, zapewniające jego geometryczną niezmienną, wówczas do równań (3.1) dołącza się równania równowagi, wyrażające fakt niewystępowania w ustroju rzeczywistym wspomnianych dodanych więzów dwustronnych. Składnikami tych równań są wartości obciążeń układu rzeczywistego, jak również poszukiwane wartości momentów w przegubach jednostronnych  $x_i$ . Momenty zginające w przegubach plastycznych powinny ponadto spełniać naprężeniowe warunki brzegowe, tj. nierówności

$$-M_i^- \leq x_i \leq M_i^+, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Przyjmując nieujemne niewiadome  $m_i^+$  oraz  $m_i^-$  ostatnie nierówności można zapisać w postaci:



$$x_i + m_i^+ = M_i^+, \quad (3.2)$$

$$x_i - m_i^- = M_i^-.$$

Z równań (3.1, 3.2) oraz ze wspomnianych wyżej równań równowagi należy wyeliminować niewiadome  $x$  i  $f$  o dowolnych znakach. Otrzymamy w ten sposób układ równań w liczbie podwójnej przekrojów krytycznych (możliwych więzów jednostronnych  $2 \cdot n$ ), lecz o poczwórnej plus jeden liczbie niewiadomych nieujemnych ( $4 \cdot n + 1$ ). Niewiadomymi są kąty obrotów w przegubach jednostronnych (plastycznych)  $\varphi^{+(-)}$ , momenty  $m^{+(-)}$  oraz współczynnik wzrostu kombinacji obciążeń  $\mu$ . Zagadnienie nośności granicznej zostało w ten sposób sprowadzone do wyznaczenia warunkowego rozwiązania dopuszczalnego programowania liniowego przy maksymalizacji wartości  $\mu$  [4], tj:

$$\text{a) jeśli } m_i^{+(-)} > 0 \text{ wówczas odpowiednio } \varphi_i^{+(-)} = 0, \quad (3.3)$$

$$\text{b) jeśli } m_i^{+(-)} = 0 \quad " \quad " \quad \varphi_i^{+(-)} > 0,$$

$$\text{c) max } \mu.$$

### Sposób 2

Każdy wytypowany przekrój krytyczny staje się przegubem jednostronnym dopiero po osiągnięciu w nim przez moment zginający wartości granicznej. Moment zginający w dowolnym przekroju krytycznym można wyrazić następującym znanym wzorem:

$$M_k = M_{kp} + \mu + \underline{M}_k^T \cdot \underline{x}, \quad (3.4)$$

gdzie:

$M_{kp}$  - moment zginający w statycznie wyznaczalnym ustroju podstawowym, poddanym działaniu obciążeń określonej kombinacji,

$\underline{M}_k^T = \{M_{k1}, M_{k2}, \dots, M_{kn}\}$  - wektor momentów zginających w przekroju krytycznym  $k$ , w stanach jednostkowych, w jakich znajduje się ustrój podstawowy poddany działaniu kolejnych sił nadliczbowych  $x_i = \dots$

Moment w każdym przekroju krytycznym musi spełniać następującą nierówność jednoczesną:

$$-M_k^- \leq M_k \leq M_k^+. \quad (3.5)$$

Obierając za siłę nadliczbową  $x_j$  moment zginający w przekroju krytycznym  $j$ , spełnia on nierówność (3.5) ( $k=j$ ). Jeśli ten moment zginający osiągnął wartość graniczną  $x_j = M_j^+$ , wówczas mamy w tym przekroju jednostronny przegub, w którym obrót można określić nierównością

$$\delta_{-j}^T \cdot x + \mu \cdot \Delta_{jP} + \Delta_{j\sigma_s, \sigma_s} < 0.$$

Ostatnią nierówność, tak jak w sposobie 1, można doprowadzić do równości za pomocą zmiennych osłabiających  $\varphi^+$  i  $\varphi^-$

$$\delta_{-j}^T \cdot x + \mu \cdot \Delta_{jP} + \Delta_{j\sigma_s, \sigma_s} + (-)\varphi_j^{+(-)} = 0, \quad (3.6)$$

$$\varphi_j^+ \geq 0, \varphi_j^- \geq 0.$$

W przypadku gdy moment zginający w przekroju  $k$  osiąga wartość graniczną  $M_k = M_k^+$ , wówczas w przekroju tym powstaje przegub jednostronny, którego kąt obrotu wynosi  $\varphi_k^+$  o kierunku przeciwnym do momentu uplastycznienia. Wychodząc z interpretacji geometrycznej równania (3.6), może być ono zachowane po pojawieniu się dodatkowych przegubów w przekrojach typu  $k$ , jeśli uzupełnić je członem postaci

$$M_{-j}^T \cdot (\varphi^+ - \varphi^-),$$

gdzie  $M_{-j}^T = \{M_{1j}, M_{2j}, \dots, M_{mj}\}$  są to momenty w stanie jednostkowym  $x_j = 1$ , zaś,

$\varphi^{+(-)} = \{\varphi_1^{+(-)}, \varphi_2^{+(-)}, \dots, \varphi_m^{+(-)}\}$  - kąty obrotu w  $m$  przekrojach krytycznych. Ostateczna postać

równania (3.6) jest następująca:

$$\delta_{-j}^T \cdot x + M_{-j}^T \cdot (\varphi^+ - \varphi^-) + \mu \cdot \Delta_{jP} + \Delta_{j\sigma_s, \sigma_s} = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi_j^{+(-)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Do równań (3.7) dochodzi się również z warunku na minimum funkcji energii potencjalnej odkształcenia z warunkami ubocznymi (3.4,5) [5], przy maksymalizacji  $\mu$ .

$$U = \frac{1}{2} x^T \cdot \delta \cdot x + \mu \cdot x^T \cdot \Delta_P + x^T \cdot \Delta_{-\sigma_s, \sigma_s},$$

gdzie:

$\delta^T = \{\delta_{-1}^T, \delta_{-2}^T, \dots, \delta_{-n}^T\}$  jest macierzą przemieszczeń w miejscu i kierunku usuniętych więzów nadliczbowych w poszczególnych stanach jednostkowych,

$\Delta_{-P} = \{\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \dots, \Delta_{nP}\}$  - wektor przemieszczeń w miejscu i kierunku usuniętych więzów nadliczbowych w ustroju podstawowym poddanym działaniu obciążeń kombinacji „P”,

$\Delta_{-\sigma_0, \epsilon_0}^T = \{\Delta_{1\sigma_0, \epsilon_0}, \Delta_{2\sigma_0, \epsilon_0}, \dots, \Delta_{n\sigma_0, \epsilon_0}\}$  - jw. lecz od naprężeń i odkształceń początkowych.

Dalsze postępowanie jest takie jak w sposobie 1.

*Sposób 3*

Równania kanoniczne ustrojów z jednostronnymi więzami można również tworzyć metodami przemieszczeń [5] lub elementów skończonych [6]. W wytypowanych przekrojach krytycznych ramy płaskiej mogą powstać dwa przeguby jednostronne w zależności od tego, czy moment w tym przekroju osiągnie wartość  $M^{*(-)}$ . Siły wewnętrzne, w tym również momenty zginające w przekroju krytycznym pręta ramy można wyrazić wzorem:

$$F_{-P} = K \cdot q + \mu \cdot F_{-P} + F_{-\sigma_0, \epsilon_0} + (-)F_{-s}^{*(-)}, \tag{3.8}$$

(obowiązuje przy tym bądź znak plus bądź minus),

gdzie:

$F^T = \{M, Q, N\}$  - moment zginający, siła poprzeczna i siła osiowa w pręcie,

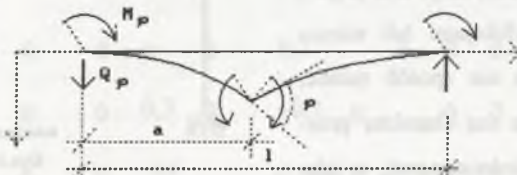
$K$  - macierz sztywności pręta,

$q^T = \{\theta_i, u_i, v_i, \theta_j, u_j, v_j\}$  - przemieszczenia końców i oraz j pręta,

$F_{-P}$  - siły wewnętrzne od danego obciążenia, jak w belce utwierdzonej, gdy np. pręt jest zamocowany na końcach w sposób sztywny,

$F_{-\sigma_0, \epsilon_0}$  - jw. lecz od naprężeń i odkształceń początkowych,

$F_{-s}^{*(-)T} = \{M_s^{*(-)}, Q_s^{*(-)}, N_s^{*(-)}\}$  - składnik sił węzłowych osłabiający nierówność jednoczesną postaci (3.5) do równości.



Rys.3

Siły i przemieszczenia w relacji (3.8) odniesione do globalnego układu współrzędnych muszą w węzłach ustroju spełniać równania równowagi. Przytoczono je w pracy [5]. Jeśli w przekrojach krytycznych mogą powstać jedynie giętkie przeguby plastyczne, wówczas odpowiedni składnik wektora  $\underline{F}_s$  wynosi [6]

(rys.3):

$$M_p^{(+)} = \frac{E \cdot I}{l} \cdot (+(-)\varphi^{(+)}). \left( \frac{a}{l} \cdot c - c_1 \right),$$

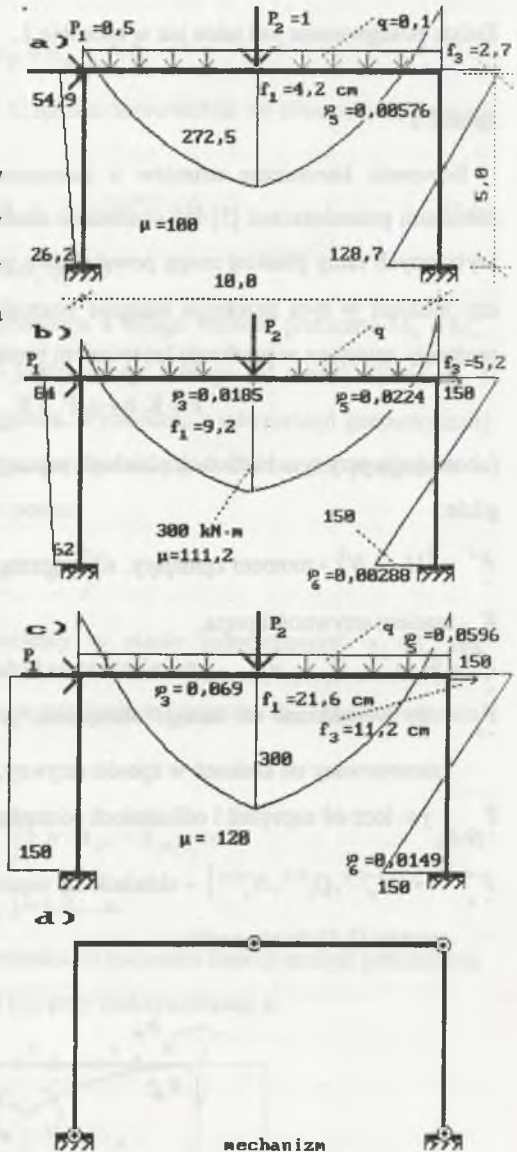
gdzie stałe  $c$  i  $c_1$  przyjmują wartości 6 i 4 w przypadku sztywnego połączenia pręta w węzłach. W przypadku ściągu, który przenosi jedynie siły rozciągające, siła osiowa spełnia nierówność

$$0 \leq N_k \leq N_k^+.$$

Odpowiedni składnik wektora  $\underline{F}_s$  wynosi wówczas

$$N_s^{(+)} = +(-) \frac{E \cdot A}{l} \cdot s^{(+)},$$

gdzie  $s^-$  jest przemieszczeniem więzi jednostronnej (wiotki pręt), zaś  $s^+$  - plastycznym wydłużeniem pręta, bo  $s^+ > 0$ , gdy  $N_k = N_k^+$ . Pręty ściskane mogą pracować dwojako: jako jednostronne więzy - całe skrócenie ma charakter sprężysty (w przypadku prętów smukłych) lub część skrócenia ma charakter sprężysty, a część plastyczny. Dla prętów ściskanych z imperfekcjami lub mimośrodowo ściskanych nie sposób ustalić, jaka część skrócenia ma charakter przemieszczenia więzi jednostronnej, a jaka odpowiada skróceniu trwałemu (plastycznemu), bez znajomości kształtu przekroju poprzecznego pręta i warunków jego stateczności.



Rys.4





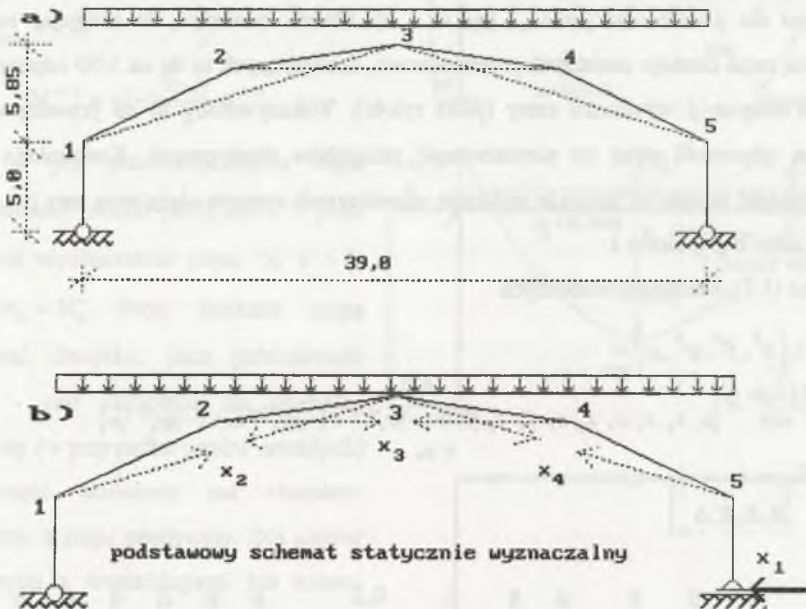
$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 2,11 & \frac{5}{6} & 0 & 0,25 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0889 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{3} & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

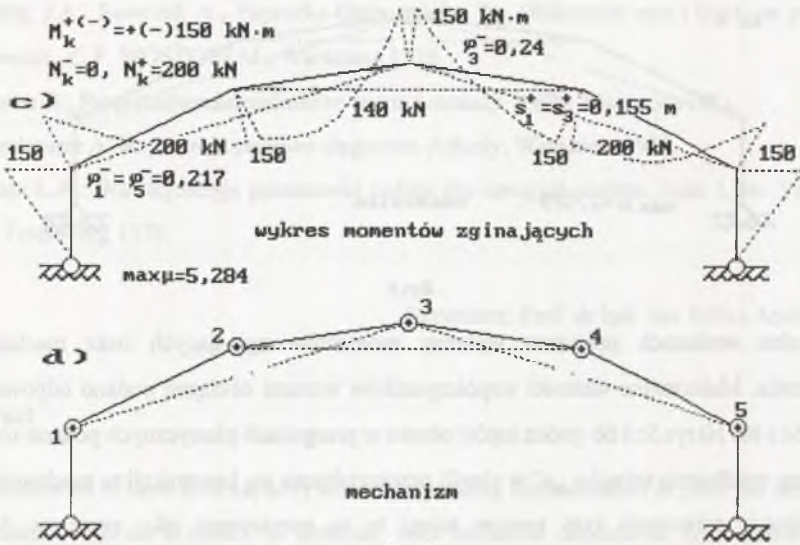
W ustroju podstawowym dodano trzy więzy dwustronne, zapewniające jego geometryczną niezmienną. Macierz współczynników dodatkowych równań równowagi wynikających z faktu niewystępowania tych więzów w ustroju rzeczywistym ma postać:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & 0,2 & -1,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,3 \\
 0 & 0 & 1 & -1,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\
 0,2 & -0,2 & 0 & 0 & 0,2 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5
 \end{array}$$

Do tych równań dołącza się równania (3.2). Następnie eliminuje z całego układu niewiadome dowolnego znaku i wyznacza się warunkowe rozwiązanie dopuszczalne wg (3.3).

#### Rama o załamanej rozporze ze ściągami

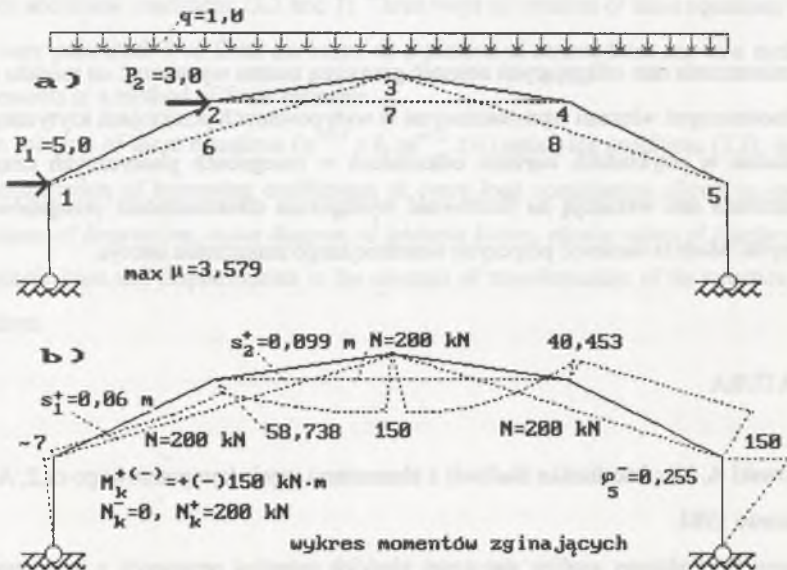




Rys.5

Wyznaczono nośność graniczną ramy o załamanej rozporze ze ściągami, rozpiętości ok. 40 m (rys.5), poddanej działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego po rzucie.

W drugim wariantcie ramę dodatkowo obciążono dwiema poziomymi siłami jak na rys.6a.





Rys.6

W obu wariantach pokazano wykresy momentów zginających oraz mechanizmy zniszczenia. Maksymalne wartości współczynników wzrostu obciążeń podano odpowiednio na rys.5c i 6a. Na rys.5c i 6b prócz kątów obrotu w przegubach plastycznych podano również graniczne wydłużenia ściągow „s” w chwili przekształcenia się konstrukcji w mechanizm. W mechanizmie zniszczenia tym samym ściągi te są narysowane jako przecięte. Można zauważyć, że mechanizm z rys.5d ma trzy stopnie swobody, a z rys.6c jeden stopień swobody. Mechanizmy zniszczenia, przemieszczenia i wykresy momentów zginających wyznaczono drugim sposobem.

## 5. Wnioski

1. Przemieszczenia ram osiągających nośność graniczną można wyznaczyć na modelu ustroju z jednostronnymi więzami wprowadzonymi w wytypowanych przekrojach krytycznych.
2. Obliczone w przykładach wartości odkształceń w przegubach plastycznych oraz przemieszczenia ram wskazują na możliwość wystąpienia niestateczności przegubów plastycznych. Może to stanowić przyczynę wcześniejszego zniszczenia ustroju.

## LITERATURA

1. Borkowski A. i in.: Mechanika Budowli z elementami ujęcia komputerowego cz.2, Arkady, Warszawa 1984.
2. Kempny S.: Podstawy analizy statycznej płaskich ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Budownictwo z. 60, Gliwice 1985.

3. König J.A., Sawczuk A., Paprocka-Grabczyńska W.: Obliczanie ram i belek na przystosowanie, Z. P. MOSTOSTAL, Warszawa 1974.
4. Martos B.: Programowanie nieliniowe teoria i metody. PWN, Warszawa 1983.
5. Pierelmuter A.W.: Ustroje prętowo ciągnowe. Arkady, Warszawa 1972.
6. Rozin L.A.: Wariacjonnyje postanowki zadacz dla uprugich sistem. Izdat. Ljen. Yniwier., St. Petersburg 1978.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Feliks Andermann

### Abstract

Calculations of limit load capacity and corresponding displacements in plane bar structures were carried out on a model of structure with unilateral constraints. Equivalence of an articulated plastic joint and unilateral joint occurs. Change of angular displacement, same as unilateral joint, is able to perform only in one direction, but only after reaching limit value of bending moment (fig. 1).

The displacements of plane frames reaching limit load capacity can be, because of that, evaluated from canonical equations formulated up for the structures with unilateral constraints and from additional conditions (3.2 and 3). Three ways of creation of these equations (3.1, 7 and 8) were presented. Two firsts are based on a method of forces, third one on a method of displacements or a method of finite elements.

Feasible solution of these equations ( $\varphi^{+(-)} \geq 0, m^{+(-)} \geq 0$ ) satisfying conditions (3.3), together with maximisation of increasing coefficients of every load combination allows to: evaluate mechanisms of destruction, make diagram of intrinsic forces, obtain values of displacements in the plastic joint and displacements in the moment of transformation of the structure into a mechanism.