

Stanisław KEMPNY

SIŁY KONTAKTOWE ŁAWY I PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

Streszczenie. Wykorzystując zagadnienia Boussinesqa i Cerrutiego rozpatrzono ławę fundamentową w kontakcie z półprzestrzenią sprężystą połączonymi, jednostronnymi pionowymi więzami i poziomymi dwustronnymi więzami o ograniczonej nośności. Ława może być poddana działaniu między innymi poziomych i pionowych ruchów górnictwicznych terenu.

CONTACT FORCES OF THE LONG STRIP FOUNDATION AND THE ELASTIC HALF-SPACE

Summary. Using the Boussinesq and Cerruti's problem the contact problem of long strip foundation and the elastic half-space connected by vertical unilateral constrains and horizontal bilateral constrains with limited load capacity was discussed. The long strip foundation can also be subjected to horizontal and vertical of the mine ground movement.

1. Wstęp

Rozpatrzono zagadnienie kontaktowe ławy fundamentowej, poddanej działaniu dowolnych obciążeń, w tym również poziomych i pionowych ruchów górnictwicznych terenu, z półprzestrzenią sprężystą. W modelu obliczeniowym przyjęto, że pomiędzy ławą i podłożem występują jednostronne pionowe więzy, nie przenoszące sił rozciągających oraz dwustronne więzy poziome o ograniczonej nośności.

Uwzględniono wpływ pionowych i poziomych sił kontaktowych na odkształcenie ławy i półprzestrzeni, wykorzystując znane zagadnienia Boussinesqa i Cerrutiego [1].

Wpływ szkieletowej nadbudowy na rozkład sił kontaktowych uwzględniono posługując się zastępczą belką, reprezentującą jej sztywność na nierównomierne osiadanie konstrukcji [4]. Podstawy teoretyczne podane w pracy posłużyły do opracowania programu komputerowego,

za pomocą którego można obliczyć siły kontaktowe pomiędzy ławą i podłożem, wielkości ewentualnych szczelin i poślizgów w strefie kontaktu oraz wartości momentów zginających i sił poprzecznych w ławie.

Zagadnienie pełnej zgodności odkształceń fundamentu i podłoża było przedmiotem pracy [2], jednak bez wpływów górniczych i możliwości poślizgu.

Ławę z jednostronnymi pionowymi siłami kontaktowymi, poddaną działaniu dowolnych sił i krzywizny górniczej, rozpatrzono w pracy [3].

2. Kontakt ławy i półprzestrzeni sprężystej

Poszukuje się rozkładu sił kontaktowych w kierunku podłużnym ławy. Rozkład tych sił w podatniejszym kierunku zależy od usytuowania obciążenia na ławie oraz od wielkości ewentualnych wpływów górniczych. Wiadomo, że dla półprzestrzeni teoretyczny rozkład pionowych sił kontaktowych w kierunku poprzecznym ławy będzie taki jak dla sztywnego stempla wciskanego. Dalsze rozważania można by przeprowadzić przy tak założonym rozkładzie, jednak rzeczywisty przebieg tych sił jest bliższy rozkładowi równomiernemu.

W dalszym ciągu zakłada się zatem, że rozkład pionowych i poziomych sił kontaktowych jest równomierny w kierunku poprzecznym ławy, a za miarodajne do obliczeń uznaje się przemieszczenia podłoża w środku szerokości ławy.

W linii kontaktu, gdy nie zachodzi poślizg i półprzestrzeń nie odrywa się od ławy, przemieszczenia poziome i pionowe ławy i półprzestrzeni muszą być zgodne. Przemieszczenia poziome półprzestrzeni w osi podstawy ławy, wywołane średnimi w jej kierunku poprzecznym pionowymi $\frac{q}{b} \geq 0$ i poziomymi $\frac{\tau_q}{b}$ siłami kontaktowymi, wynoszą [1] (patrz zagadnienia Boussinesqa i Cerrutiego):

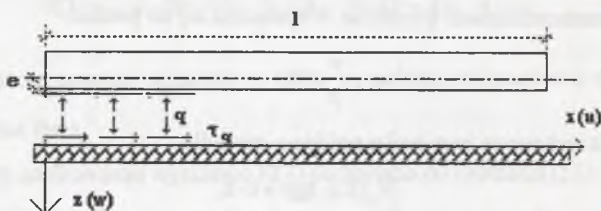
$$u_a(x) = \int_0^1 \left[q(\xi) \cdot \zeta_1(x - \xi) + \tau_q(\xi) \cdot \zeta_2(x - \xi) \right] \cdot d\xi + u_b(x), \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\zeta_1(t) = -\frac{1 - \mu_0 - 2 \cdot \mu_0^2}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot E_0} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2} + t} \frac{t}{R^2} \cdot dy,$$

$$\zeta_2(t) = \frac{1 + \mu_o}{\pi \cdot b \cdot E_o} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{R} + \mu_o \cdot \left(\frac{t^2}{R^3} - \frac{1}{R} \right) \right] \cdot dy$$

$u_g(x)$ - przemieszczenia poziome podłoża górniczego,



Rys.1

E_o - moduł odkształcenia gruntu,

μ_o - współczynnik Poissona,

b - szerokość ławy,

l - długość ławy,

$R^2 = t^2 + y^2 + z^2$, $t = x - \xi$ (rys.1).

Przemieszczenia pionowe półprzestrzeni wywołane średnimi (j.w.) pionowymi i poziomymi siłami kontaktowymi można wyrazić wzorem:

$$w_G(x) = \int_0^l [q(\xi) \cdot \zeta_3(x - \xi) - \tau_q(\xi) \cdot \zeta_1(x - \xi)] \cdot d\xi + w_g(x), \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\zeta_3(t) = \frac{1 - \mu_o^2}{\pi \cdot b \cdot E_o} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dy}{R},$$

$w_g(x)$ - przemieszczenia pionowe pochodzenia górniczego.

Warunek zgodności odkształceń ławy i podłoża można opisać w następujący sposób:

a) przemieszczenia pionowe ławy nie mogą być większe od przemieszczeń pionowych półprzestrzeni

$$w_G \geq w_F$$

Nierówność tę można zapisać w postaci równania

$$w_G - w_F - s_v = 0, \quad (2.3)$$

gdzie $s_v \geq 0$ oznacza szczelinę pomiędzy ławą i gruntem,

b) odkształcenia jednostkowe ławy i podłoża są zgodne na tych odcinkach linii kontaktu, na których nie zachodzi poślizg (rys.2)

$$2 \cdot u_G + u_G^2 + w_G^2 = \frac{e}{\rho} \left(2 + \frac{e}{\rho} \right).$$

Przy małych przemieszczeniach wyrażenie to upraszcza się do postaci:

$$u_G - \frac{e}{\rho} = 0. \quad (2.4)$$

Równanie to jest zachowane przy braku poślizgu, czyli dla

$$\begin{aligned} |\tau_q| &\leq q \cdot \operatorname{tg} \varphi + c \cdot b, \\ q &> 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

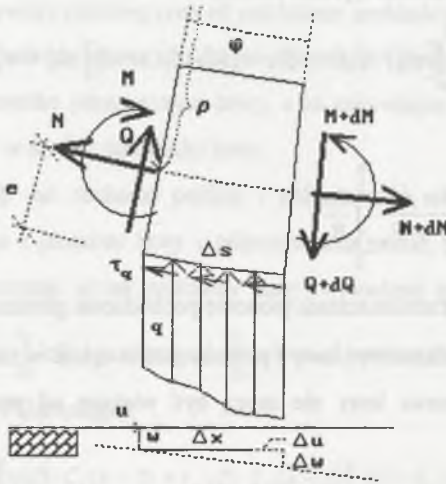
gdzie:

φ - kąt tarcia wewnętrznego,

c - stała kohezji,

e - odległość osi ławy od linii kontaktu ławy i podłoża (rys.1).

Na podstawie równania (2.4) możemy otrzymać funkcję poślizgu w przedziale, w którym nierówność (2.5) nie zachodzi



Rys.2

$$s_b = c_0 + u_G - \int_{x_1}^x \frac{e}{\rho} \cdot dx, \quad (2.6)$$

gdzie:

u_G - przemieszczenia poziome wg wzoru (2.1), c_0 - stała.

Wychodząc ze znanego równania różniczkowego osi odkształconej pręta

$$EJ \cdot w_{\bar{F}} = -M,$$

dochodzimy do równania różniczkowo-całkowego postaci

$$EJ \cdot w_{\bar{F}} = -M_p(x) - \int_0^x q \cdot (x - \xi) \cdot d\xi - \int_0^x \tau_q \cdot e \cdot dx, \quad (2.7)$$

gdzie $M_p(x)$ oznacza moment zginający w ławie wywołany obciążeniem z nadbudowy, zaś EJ sztywność giętą ławy.

Po dwukrotnym scałkowaniu wyrażenie (2.7) wstawiono do równania (2.3). Uwzględniając ponadto wzór (2.2) na przemieszczenia pionowe podłoża można równaniu (2.3) nadać następującą postać:

$$s_v(x) = c_1 \cdot x + c_2 + \int_0^x \frac{M_p(\xi)}{EJ(\xi)} \cdot (x - \xi) \cdot d\xi + w_g + \int_0^x \frac{x-t}{EJ(t)} \cdot dt \cdot \left[\int_0^t q(\xi) \cdot (t - \xi) \cdot d\xi + \int_0^t \tau_q \cdot e \cdot d\xi \right] + \int_0^1 [q(\xi) \cdot \zeta_3(x - \xi) - \tau_q(\xi) \cdot \zeta_1(x - \xi)] \cdot d\xi. \quad (2.8)$$

Analogicznie równanie (2.6) przy wykorzystaniu wzorów (2.1 i 7) przyjmuje postać:

$$s_h(x) = c_0 + \int_0^1 [q(\xi) \cdot \zeta_1(x - \xi) + \tau_q(\xi) \cdot \zeta_2(x - \xi)] \cdot d\xi + u_g(x) + \int_{x_1}^x \frac{e}{EJ} \cdot M_p \cdot dx + \int_{x_1}^x \frac{e}{EJ} \cdot dt \cdot \left[\int_0^t q(\xi) \cdot (t - \xi) \cdot d\xi + \int_0^t \tau_q \cdot e \cdot d\xi \right]. \quad (2.9)$$

Prócz tych równań (2.8,9) powinny być spełnione trzy równania równowagi

$$W = \int_0^1 q \cdot dx, \quad M_0 = \int_0^1 (q \cdot x + \tau_q \cdot e) \cdot dx, \quad H = \int_0^1 \tau_q \cdot dx, \quad (2.10)$$

którymi można wyeliminować stałe c_0 , c_1 , i c_2 . W równaniach (2.10) W i H oznaczają wypadkowe z sił pionowych i poziomych obciążających ławę, M_0 zaś jest wartością momentu statycznego tych sił względem początku układu współrzędnych.

Jeśli w linii kontaktu pominiemy poziome siły kontaktowe $\tau_q = 0$, wówczas ława i półprzestrzeń połączone są jednostronnymi pionowymi więzami, nie przenoszącymi sił rozciągających. Odpowiadające temu równanie całkowe można otrzymać z (2.8). Ma ono postać:

$$s(x) = c_1 \cdot x + c_2 + \int_0^x \frac{M_p(\xi)}{EJ(\xi)} \cdot (x - \xi) \cdot d\xi + \\ \int_0^x \frac{x-t}{EJ(t)} \cdot dt \cdot \int_0^t q(\xi) \cdot (t - \xi) \cdot d\xi + \int_0^1 q(\xi) \cdot \zeta_3(x - \xi) \cdot d\xi + w_g,$$

zgodną z otrzymaną w [3]. Prócz tego równania powinny być wówczas spełnione dwa równania równowagi

$$W = \int_0^l q \cdot dx, \quad M_0 = \int_0^l q \cdot x \cdot dx.$$

Dla podłoża winklerowskiego o podatnościach: poziomej c_h i pionowej c_v oraz stałej sztywności giętej łąwy dwa pierwsze równania rozpatrywanego zagadnienia kontaktowego (2.8-10), (2.5) upraszczają się do postaci:

$$s_v(x) = c_1 \cdot x + c_2 + \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^x M_p(\xi) \cdot (x - \xi) \cdot d\xi + \\ + \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \int_0^x [q(\xi) \cdot (x - \xi) + 3 \cdot e \cdot \tau_q] \cdot (x - \xi)^2 \cdot d\xi + \frac{q}{c_v} + w_g, \\ s_h(x) = c_0 + \frac{\tau_q}{c_h} + u_g + \frac{e}{EJ} \cdot \int_{x_1}^x M_p \cdot dx + \\ + \frac{e}{2 \cdot EJ} \cdot \int_{x_1}^x [q(\xi) \cdot (x - \xi) + 2 \cdot e \cdot \tau_q(\xi)] \cdot (x - \xi) \cdot d\xi. \quad (2.11)$$

3. Siły kontaktowe

Siły kontaktowe dla określonego obciążenia można wyznaczyć numerycznie metodą dyskretyzacji przez zastosowanie MES lub MRS. Równania (2.9,10) można zapisać w postaci:

$$\underline{q} = \underline{A} \cdot \underline{s} + \underline{b},$$

$$\underline{\tau} = \underline{B} \cdot \underline{s} + \underline{b}_1, \quad (3.1)$$

(wykorzystano przy tym warunki brzegowe (2.10));

gdzie: $\underline{q}^T = \{q_1, q_2, \dots\}$, $\underline{\tau}_q^T = \{\tau_{q1}, \tau_{q2}, \dots\}$ - wektory sił kontaktowych w punktach podziału

łąwy,

$\underline{s}^T = \{s_v, s_h\}$ - wektory wartości szczelin i poślizgów pomiędzy ławą a podłożem,

A, B - prostokątne macierze liczbowe,

$\underline{b}, \underline{b}_1$ - wektory wyrazów wolnych.

Jeśli $\underline{b} \geq 0$ i \underline{b}_1 spełniają nierówność (2.5), wówczas $\underline{s} = 0$. W przeciwnym przypadku wyznacza się q_i, τ_{qi}, s_v i s_h tak, by były zachowane następujące warunki:

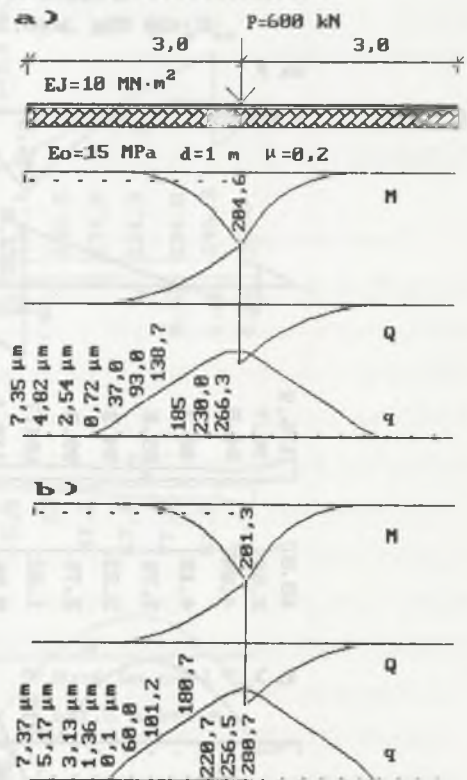
$$\begin{aligned} q &\geq 0 \wedge s_v \geq 0 \wedge q^T \cdot s_v = 0, \\ \tau_{qi} \cdot s_{hi} &\geq 0 \wedge q_i > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

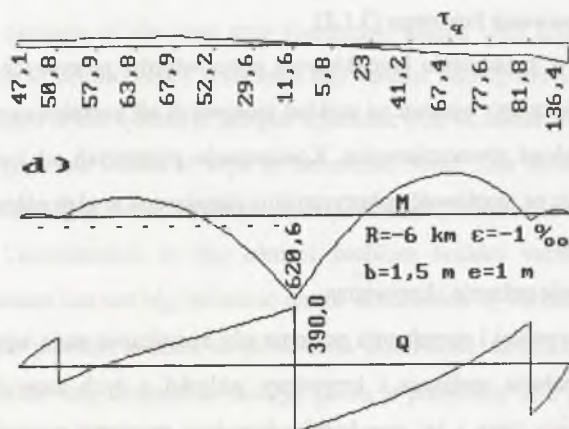
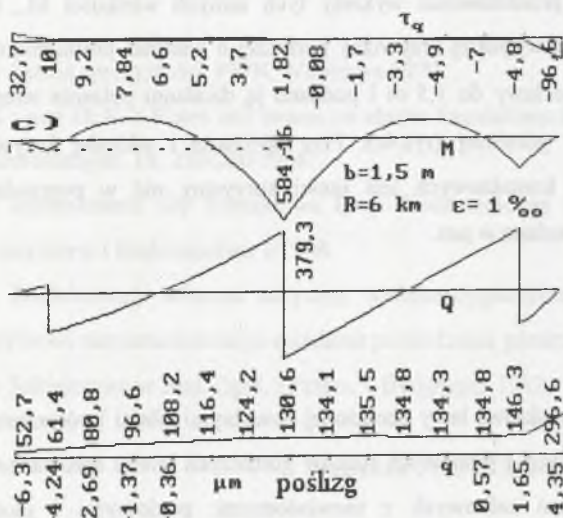
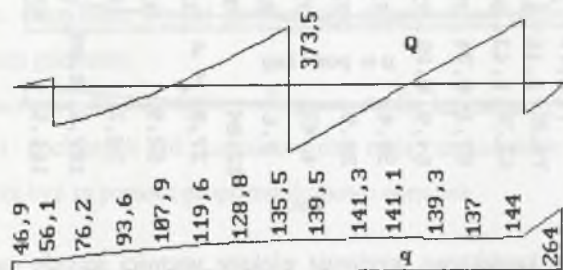
w tych punktach kontaktu ławy i podłoża, w których $|\tau_{qi}| = q_i \cdot \operatorname{tg}\phi + c \cdot b$.

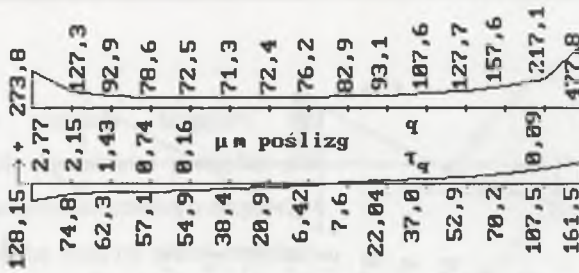
4. Przykłady

Przykład 1

Belkę o szerokości 1 m, długości 6 m o sztywności giętej $EJ=10 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$, połączoną jednostronnymi pionowymi więzami z półprzestrzenią, obciążono w środku długości siłą $P=600 \text{ kN}$. Na rys. 3a i b pokazano wykresy momentów zginających, sił poprzecznych i sił kontaktowych dla podziału na 19 i 22 części. Na rys. 3c w celu pokazania zbieżności do rozwiązania dokładnego naniesiono w tej samej skali rozkłady sił kontaktowych dla podziału na 8, 11 i 16 części oraz poniżej dla podziału z rys. 3a i b. W strefie utraty kontaktu ławy i podłoża podano wartości szczelin w μm .







Rys.4

żyć, że poziome siły kontaktowe przyjmują większe wartości jedynie na końcach ławy (rys.4a). Na rys.4b przedstawiono wykresy tych samych wielkości M ., Q , q i τ_q przy dodatkowym wpływie wypukłej krzywizny górniczej o wartości promienia 6 km. Następnie zwiększono szerokość ławy do 1,5 m i poddano ją działaniu pełzania terenu $\epsilon=1\%$ oraz wypukłej krzywizny górniczej (rys.4c). Przy spełzaniu i wklęsłej krzywiznie górniczej (rys.4d) rozkład sił kontaktowych jest mniej korzystny niż w poprzednim przypadku. Wartości poślizgów podano w μm .

5. Wnioski

1. Zagadnienie kontaktowe ławy obciążonej dowolnymi siłami i półprzestrzeni sprężystej w warunkach poziomych i pionowych ruchów górniczych terenu sprowadzono w pracy do układu dwóch równań całkowitych z niewiadomymi: poziomymi i pionowymi siłami kontaktowymi oraz szczelinami i wartościami poślizgów w strefie kontaktu. Niewiadome: siły kontaktowe, szczeliny i wartości poślizgów można wyznaczyć jak warunkowe rozwiązanie dopuszczalne programowania liniowego (3.1,2).

2. Uwzględnienie w zagadnieniu kontaktowym prócz więzów pionowych także więzów poziomych nie ma większego wpływu na rozkład pionowych sił kontaktowych, jednak staje się on bliższy rozkładowi równomiernemu. Koncentracja pionowych sił kontaktowych na końcach ławy wskazuje na możliwość uplastycznienia sięgającego w głąb półprzestrzeni.

3. Wpływy górnicze

Jednoczesne działanie pełzania i krzywizny.

Przy krzywiznie wypukłej i rozpęzaniu poziome siły kontaktowe mają wartości mniejsze niż w przypadku działania spełzania i krzywizny wklęsłej o tych samych wartościach. Określono obciążeniu ławy i jej szerokości odpowiada graniczna wartość pełzania (w rozpatrywanych przykładach rzędu 1,5 ‰), przekroczeniu której nie towarzyszy dalszy

wzrost poziomych sił kontaktowych. Na całej długości ławy występuje wówczas poślizg w strefie kontaktu. Otrzymane wyniki potwierdzają obserwowane pełzanie ławy w kierunku frontu eksploatacji górniczej.

Zabiegi zmierzające do ułatwienia poślizgu w strefie kontaktu, tym samym do zmniejszenia wartości poziomych sił kontaktowych, mają uzasadnienie teoretyczne, a ich skuteczność może być za pomocą programu liczbowo oceniona.

LITERATURA

1. Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.
2. Cheung Y. K.: nag D. K. : Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behaviour, *Geotechnique*, 18, 250-260 1968.
3. Kempny S.: Jednostronne siły kontaktowe ławy fundamentowej i wygiętego podłoża górniczego, *Inżynieria i Budownictwo* 7/1996.
4. Kempny S.: Zredukowany schemat statyczny wielokondygnacyjnej ramy szkieletowej poddanej wpływowi nierównomiernego osiadania pochodzenia górniczego, III Konf. Nauk. „Konstrukcje Szkieletowe w Bud. Ogól. i Przem.”, Bydgoszcz 1982.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Feliks Andermann

Abstract

The contact problem of the long strip foundation loaded with arbitrary forces and the elastic half-space in conditions of horizontal and vertical mining movements of the subsoil was led in the paper to the system of integral equations with variables: horizontal and vertical contact forces, gaps and values of slips in the contact zone. This variables (contact forces, gaps and values of slips) can be evaluated as a conditional, admissible solution of the linear programming. Consideration in the contact problem besides vertical constraints also horizontal constrains has not big influence on the distribution of vertical contact forces, but the solution of the problem is closer to the uniform distribution. Concentration of the vertical contact forces on the strip foundation endings points at possibility of a plastic flow reaching as far as the half-space depth.