ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: BUDOWNICTWO z.85 Nr kol. 1404

Tomasz KRYKOWSKI

ANALIZA KOMPUTEROWA MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH I SIŁ POPRZECZNYCH W BELKACH TRÓJWARSTWOWYCH

Streszczenie. Tematem artykułu jest analiza numeryczna belek trójwarstwowych, realizowana przy wykorzystaniu programu komputerowego ANSYS. Zagadnienie rozwiązuje się wykorzystując opis belki jako kontinuum dwuwymiarowego warstwowego.

COMPUTER ANALYSIS OF BENDING MOMENT AND SHEAR FORCES IN A THREE LAYER BEAMS

Summary. The subject of the article is numerical analysis of three - layer beams, carried out by means of the computer program ANSYS. The problem has been solved using the description of the beam as a two dimensional layered continuum.

1. Wstęp

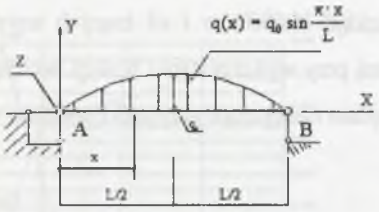
Olbrzymi rozwój komputeryzacji i techniki w ciągu ostatnich lat przyczynił się do wzrostu wymagań nakładanych na konstrukcje zarówno budowlane, jak i mechaniczne. Aby spełnić parametry nakładane na te konstrukcje nieodzowne jest stosowanie materiałów o bardzo dużych parametrach wytrzymałościowych. Parametry takie można uzyskać projektując kompozyty warstwowe, w których występuje wiele warstw dobieranych w zależności od charakteru pracy konstrukcji. W związku ze stale rosnącym zapotrzebowaniem przemysłu na tego typu konstrukcje, a zatem i potrzebą ich obliczeń wytrzymałościowych, pojawiają się coraz to nowe metody analizy tego typu zagadnień. W większości analiz numerycznych tych obiektów wykorzystuje się MES. W zależności od sposobu sformułowania zadania wspomniane metody możemy podzielić na: podejście hybrydowe, w którym wykorzystuje się

funkcjonał Reisnera oraz sposób przemieszczeniowy, wykorzystujący funkcjonał Lagrange'a. W przypadku budowy nowych metod analizy tego typu zagadnień nieodzowne jest porównanie poprawności otrzymanych wyników. W większości artykułów [1], [9a, b, c], [2], [4], [5] proponowane tam metody rozwiązania konkretnego zagadnienia testuje się na fundamentalnym rozwiązaniu Pagano (por. [7]). Zagadnienie to zostało rozpatrzone tylko dla szczególnego przypadku zginania w płaskim stanie naprężenia (zginanie walcowe płyty warstwowej); w konsekwencji ten opis nie nadaje się do testowania bardziej złożonych stanów obciążenia konstrukcji. Alternatywą dla tego typu postępowania jest wykorzystanie współczesnych programów obliczeniowych, które pozwalają przeanalizować tego typu zagadnienia jako kontinuum, umożliwiają również uwzględnienie szeregu innych efektów, jak np.: nieliniowość fizyczną lub też geometryczną oraz problemy kontaktowe. Oczywiście, w tego typu analizie niezmiernie istotną rzeczą jest koszt obliczeń, wiążący się z doborem gęstości siatek, a także kosztami sprzętu komputerowego (programy, komputery dużej mocy i inne). Istotną sprawą w analizie problemu jest uzyskanie wyniku szybko i możliwie najdokładniejszego.

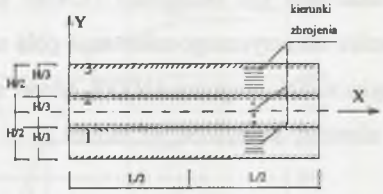
W tym artykule została przedstawiona dalsza część analizy zagadnienia Pagano (część pierwsza przedstawiona została w [3]), ujęta w opisie jako kontinuum sprężyste. W szczególności podano tutaj wykresy momentów zginających oraz sił poprzecznych w zależności od parametru będącego ilorazem długości belki do jej wysokości. Podano też wspomniane zależności w odniesieniu do liczby elementów skończonych.

2. Model obliczeniowy

W analizie rozpatrzono belkę warstwową (jako wycinek płyty zginanej walcowo), poddaną sinusoidalnemu obciążeniu równomiernie rozłożonemu w kierunku osi Oz, por. rys. 1a. Układ warstw zbrojenia jest typu [0, 90, 0], por. rys. 1b, a własności materiałowe są zestawione w tablicy 1, zgodnie z [15].



Rys. 1a



Rys. 1b

Przyjmując schemat statyczny ustroju przyjęto, że obciążenie przyłożone jest w środkowej osi belki, por. rys. 1a. Przyjęto ponadto, że podparcie przegubowo nieprzesuwne realizowane jest w węźle $x = 0,\ y = 0$ w kierunku Ax i Ay. Pozostałym węzłom o współrzędnych $x = 0,\ y \in (-H/2, H/2)$ narzucono więzy, uniemożliwiające przesuw w kierunku pionowym, eliminując w ten sposób zaburzenia, jakie powstawały na skutek występowania reakcji na podporze A (przyłożenie siły skupionej - efekt de Saint Venanta). Przyjęto następujące wymiary analizowanego modelu $q_0 = 0.6895\ \left[MN/m^2\right]$, b=1 [cm], L=24 [m] H / L = 0.25 (H = 6) lub H / L = 0.1 (H = 2.4).

Tablica 1

Numer warstwy	Moduł Younga $E_x^{(i)}$ - $\left[\frac{MN}{m^2}\right]$	Moduł Kirchhoffa $G_x^{(i)}$ - $\left[\frac{MN}{m^2}\right]$	Liczba Poisona $\nu_x^{(i)}$ - [1]
1	1.724E5	3448	0.25
2	6895	1379	0.25
3	1.724E5	3448	0.25

Zadanie to sprowadza się do rozwiązania równania wariacyjnego, które wyraża zasadę prac wirtualnych Lagrang'e postaci:

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot \delta\varepsilon_{ij} \cdot dv - \int_V X_i \cdot \delta u_i \cdot df - \int_{\partial V} \hat{X}_i \cdot \delta u_i \cdot df = 0 . \qquad (1)$$

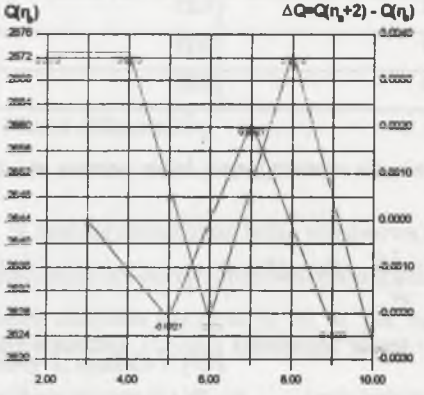
W równaniu (1) przyjęto oznaczenia: $\sigma_{ij}, (\varepsilon_{ij})$ - tensor naprężenia $[MN/m^2]$, (odkształcenia [1]), X_i, $(\hat{X}_i)$ - siła masowa $[MN/m^3]$, (siła powierzchniowa $[MN/m^2]$). W (1) stosuje się konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów i,j=1,2,3. Problem rozwiązano za pomocą programu ANSYS rozpatrując zagadnienie jako kontinuum sprężyste. Przyjęto tarczę trójwarstwową, znajdującą się w płaskim stanie naprężenia, która do obliczeń numerycznych

modelowana jest elementami PLANE 82. Funkcje momentów i sił tnących uzyskano w wyniku numerycznego całkowania pola naprężeń przy wykorzystaniu funkcji wewnętrznego języka APDL programu ANSYS. Model uwzględnia następujące przypadki podziału warstwy na elementy skończone, por. tablica 2:

Tablica 2

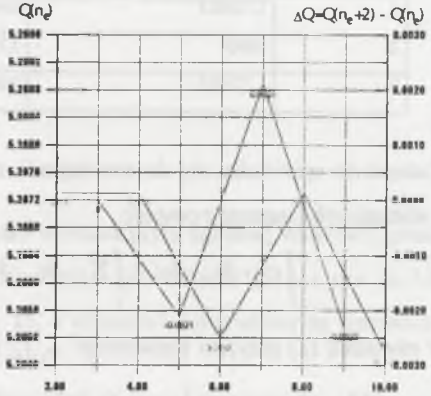
ZESTAWIENIE ELEMENTOW SKONCZONYCH W KIERUNKACH $x (\rightarrow x)$ I $y (\rightarrow y)$: n_e, n'_e								
	L / H = 4				L / H = 10			
n_e ↓ y	n'_e ↓ x	Liczba węzłów	Liczba aktywnych stopni swobody	Liczba elementów skończonych	n'_e ↓ x	Liczba węzłów	Liczba aktywnych stopni swobody	Liczba elementów skończonych
2	12	253	479	72	30	613	1199	180
4	24	937	1823	288	60	2305	4559	720
6	36	2053	4031	648	90	5077	10079	1620
8	48	3601	7103	1152	120	8929	17759	2880
10	60	5581	11039	1800	150	13861	27599	4500

3. Zestawienie wyników i wnioski końcowe



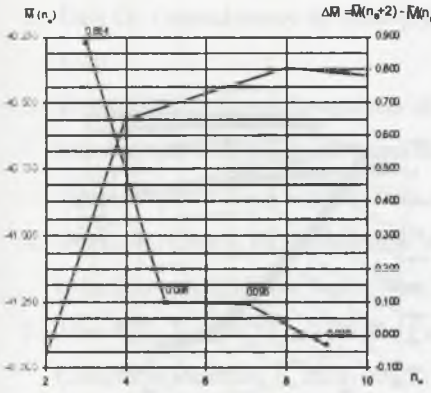
Rys. 2a. Wykres zbieżności funkcji sił poprzecznych dla: $L/H=4$, w punkcie $x=0$

Fig. 2a. The grid of the approach of the shear forces for $L/H=4$, in the point $x=0$



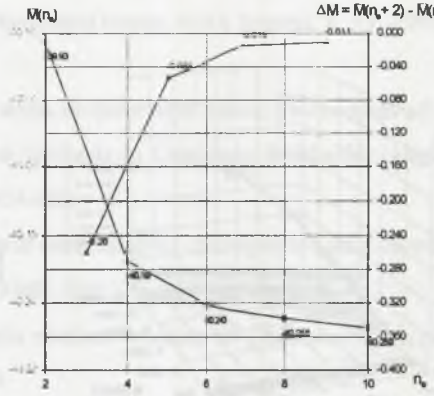
Rys. 2b. Wykres zbieżności funkcji sił poprzecznych dla: $L/H=10$, w punkcie $x=0$

Fig. 2b. The grid of the approach of the shear forces for $L/H=10$, in the point $x=0$



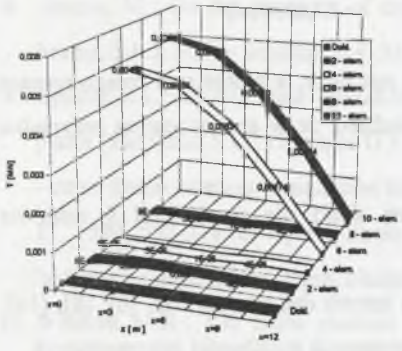
Rys. 3a. Wykres zbieżności funkcji momentów zginających dla: $L/h=4$, w punkcie $x=L/2$

Fig. 3a. The grid of the approach of the bending moments for: $L/H=4$, in the point $x=L/2$



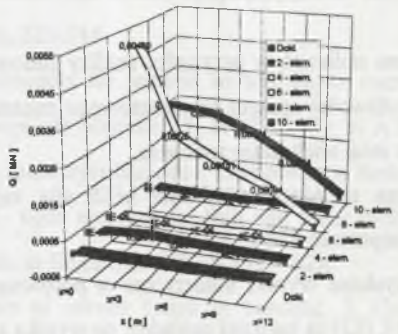
Rys. 3b. Wykres zbieżności funkcji momentów zginających dla: $L/h=10$, w punkcie $x=L/2$

Fig. 3b. The grid of the approach of the bending moments for: $L/h=10$, in the point $x=L/2$



Rys. 4a. Rozkład błędu obliczonej siły poprzecznej dla L/H=4, w punktach $x=0,3,6,9,12$ [m]

Fig. 4a. The grid of the approach of the shear force error for: L/H=4, in the points $x=0,3,6,9,12$ [m]

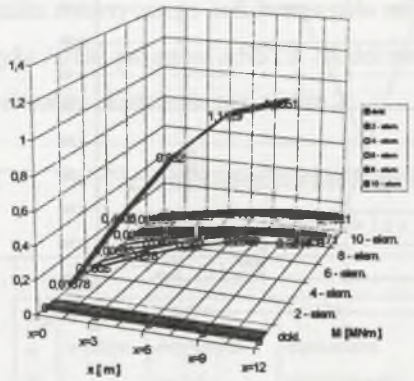


Rys. 4b. Rozkład błędu obliczonej siły poprzecznej dla L/H=10, w punktach $x=0,3,6,9,12$ [m]

Fig. 4b. The grid of the approach of the shear force error for: L/H=10, in the points $x=0,3,6,9,12$ [m]

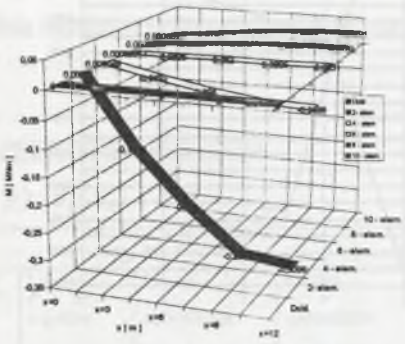
Na podstawie pełnej analizy uzyskanych wyników numerycznych, por. rys. 1 a, b; 2 a, b stwierdzamy:

1. Proponowana metoda analizy numerycznej zagadnienia jest efektywna i prowadzi do bardzo dobrych wyników, już przy podziale warstwy na 4 elementy skończone.
2. Korelacja wyników analitycznych i MES jest zgodna.



Rys. 5a. Rozkład błędu obliczonego moment zginającego dla L/H=4 w punktach $x = 0,3,6,9,12$ [m]

Fig. 5a. The grid of the approach of the bending moment error for: L/H=4, in the points $x = 0,3,6,9,12$ [m]



Rys. 5b. Rozkład błędu obliczonego moment zginającego dla L/H=10 w punktach $x = 0,3,6,9,12$ [m]

Fig. 5b. The grid of the approach of the bending moment error for: L/H=10, in the points $x = 0,3,6,9,12$ [m]

3. Czas obliczeń w przypadku analizy liniowej nie jest duży, a biorąc pod uwagę rosnące możliwości sprzętu komputerowego można powiedzieć, że w analizowanym przypadku nie miał większego znaczenia.
4. Czas rozwiązania równań MES dla najgęstszej siatki nie przekraczał 1 min. na komputerze P166.
5. Uzyskane wyniki numeryczne w porównaniu do innych danych, por. np. [6], [8], [10], [11], [12] są bardziej dokładne, co wynika z zastosowanych możliwości programowych.
6. Proponowane podejście można zastosować przy weryfikacji wyników obliczeń kompozytowych prętów przestrzennie zakrzywionych, których analiza stanowi przedmiot szerszych badań autora.

LITERATURA

1. Averill R.C.; Yip Y.C.: Thick beam theory and finite element model with zig-zag sublaminate approximations, AIAA Journal, 8, **34** (1996), 1627-1632.

2. Davi G.: General theory for cross-ply laminated beams, AIAA Journal, 8, 35, 1997, 1334-1340.
3. Krykowski T.: Computer analysis of stress in three layer beams, Proceedings of the VII International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics, HighTatras, Slovak Republic 6 – 9 October 1998, 434-439.
4. Lee C. Y., Chen J. M.: Interlaminar shear stress analysis of composite laminate with layer reduction technique., Int. Journ. Num. Meth. Eng., 39, (1996), 847 – 865.
5. Mau S.T.; Tong P.; Pian T.H.H.: Finite element solutions for laminated thick plates. J. Composite Materials, 6, 1972, 304-310.
6. Ochoa O. O.; Reddy J.N.: Finite Element Analysis of Composite Laminates. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Boston. London 1992, pp 206.
7. Pagano N.J.: Exact Solutions for Composite laminates in cylindrical bending, Journ. Comp. Mater. 3, 1967, 388-411.
8. Savoia, M.: On the accuracy of one - dimensional models for multilayered composite beams, Int. J. Solids Structures, 4, **33** (1996), 521-544.
9. Spilker R.L.: a) Alternate hybrid-stress elements for analysis of multilayer composite plates (and Chou S.C.; Orranger O.): J. Composite Materials 11, 1977, 51-70; b) A hybrid - stress finite- element formulation for thick multilayer laminates, Computers a. Structures, 11, 1980, 507-514; c) Hybrid-Stress eight - node elements for thin and thick multilayer laminated plates, Intern. Journ. Numer. Meth. in Engin., 18 (1982), 801 – 828.
10. Wisnom M.R.: 3-D finite element analysis of curved beams in bending. J. Compos. Mater., 11, **30** (1996), 1178 – 1190.
11. Zapfe J. A., Lesieutre G. A.: Iterative Calculation of the Transverse Shear Distribution in Laminated Composite Beams. AIAA JOURNAL., 6, **34**, (1996), 1299 – 1300.
12. ANSYS, User's Manual., vol. 1, 3., Swanson Analysis System Inc., 1993.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Tadeusz Burczyński

Abstract

The subject of the article is numerical analysis of three - layer beams, carried out by means of the computer program ANSYS. The problem has been solved using the description of the beam as a two-dimensional layered continuum. The convergence moments function and shear forces and errors is thoroughly analysed (showing in the diagrams) depending on the number of finite elements.