

Andrzej POWNUK

PRZEDZIAŁOWE METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ MECHANIKI KONSTRUKCJI

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytmy rozwiązywania szerokiej klasy równań algebraicznych i różniczkowych, występujących w mechanice konstrukcji. Metody oparte są na matematyce przedziałowej. Przedziałowe metody umożliwiają znalezienie oszacowania wszystkich rozwiązań, są zbieżne globalnie i umożliwiają uwzględnienie błędów zaokrągleń.

INTERVAL METHODS FOR SOLUTION EQUATION OF STRUCTURE MECHANICS

Summary. In this paper the algorithms of solution large class of algebraic and differential equations which are available in field of structure mechanics are presented. These methods are based on interval mathematics. Interval methods can find estimate of all solutions, are global converge and can also consider rounding errors.

1. Wprowadzenie

Rozwiązania otrzymane za pomocą metod numerycznych zwykle są niedokładne. W ostatnich latach rozwinęły się metody rozwiązywania problemów brzegowych, które pozwalają oszacować jakość otrzymanego rozwiązania (por. np. [27,39]).

Na początku lat pięćdziesiątych wielu badaczy zainteresowało się własnościami działań na przedziałach liczbowych, określonych następująco:

$$a \circ b = \{x \circ y : x \in a = [a^-, a^+], y \in b = [b^-, b^+], \circ \in \{+, -, / \} \} \quad (1)$$

Prace te zostały podsumowane w pracy Moore'a [29], wydanej w 1966 roku. Bardziej współczesne omówienie metod matematyki przedziałowej znajduje się w pracach [2,19,20].

W niniejszej pracy chciałbym przedstawić zastosowanie metod opartych na matematyce przedziałowej do rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych oraz układów równań różniczkowych pierwszego rzędu w postaci normalnej.

2. Przedziałowe metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych

2.1. Przedziałowa metoda Newtona

Weźmy pod uwagę ciągłą i różniczkowalną funkcję $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Będziemy poszukiwali rozwiązań równania $g(x)=0$ w danym n -wymiarowym przedziale X . W przypadku jednowymiarowym kolejne kroki algorytmu są następujące:

$$x_{k+1} = g(x_k) + \frac{g(x_k)}{g'(X_k)}, \quad (2)$$

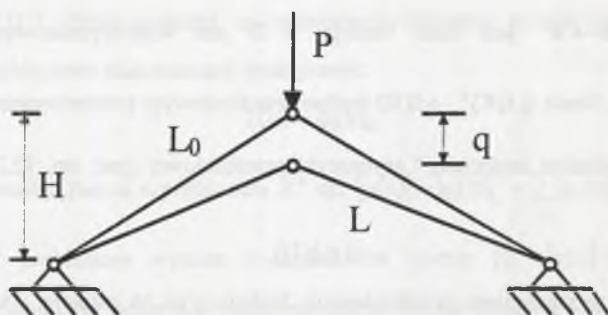
gdzie $\hat{g}(X)$ oznacza przedziałowe rozszerzenie funkcji $g(x)$. Jest to funkcja, która powstaje z wyjściowej funkcji $g(x)$ poprzez zastąpienie wszystkich operatorów na liczbach rzeczywistych działaniami przedziałowymi oraz wszystkich zmiennych x_i odpowiednimi przedziałami X_i , [2,29]. W przypadku wielowymiarowym kolejne iteracje otrzymujemy jako część wspólną rozwiązania przedziałowego układu równań (por. [26,31]):

$$g_j(x^k) + \sum_{i=1}^n (y_i^k - x_i^k) \frac{\partial \hat{g}_j(X_1^k, \dots, X_{i-1}^k, x_i^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

i poprzedniej iteracji $x_i^{k+1} = y_i^k \cap x_i^k$. Przedziałowy układ równań jest to układ, w którym macierz układu A i wektor prawych B stron składa się z przedziałów. Rozwiązanie przedziałowego układu równań określamy jako zbiór (por. [13]):

$$\Sigma(A, B) = \{x: \tilde{A}x = \tilde{B}, \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B\} \quad (4)$$

Przedstawione rozważania zilustrujemy na przykładzie zagadnienia wyznaczenia przedmieszceń kratownicy. Weźmy pod uwagę układ prętowy, przedstawiony na rys.1.



Rys. 1. Schemat statyczny kratownicy Misesa

Fig. 1. Static scheme of Mises's truss

Równanie równowagi jest następujące:

$$P = \frac{2 \cdot A \cdot E \cdot \left(L - \sqrt{L^2 - H^2 + (H - q)^2} \right) (H - q)}{L \sqrt{L^2 - H^2 + (H - q)^2}} \quad (5)$$

W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ MPa, $L = 10$ m, $H = 0.4$ m, $P = 10$ kN, $A = 0.0036$ m². Układ może znajdować się w trzech położeniach równowagi: $q_1 = 0.050477$ m, $q_2 = 0.313357$ m, $q_3 = 0.836264$ m. Rozwiązania numeryczne otrzymane przedziałową metodą Newtona przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1

Eps [m]	Brzeg	q_1 [m]	q_2 [m]	q_3 [m]
0.01	q^-	0.050467	0.313327	0.834962
	q^+	0.050467	0.313897	0.836264
0.0001	q^-	0.050467	0.313336	0.836264
	q^+	0.050467	0.313569	0.836264

Przedziałowa metoda Newtona została zaproponowana przez Moore'a w 1966 roku [29]. Później była znacznie udoskonalona oraz zaimplementowana w wielu pakietach obliczeń numerycznych (por. [1,2,3,17-24,28,31,35-37,41]).

2.2. Przedziałowa metoda podziału

Rozważmy równanie

$$g(x) = 0, \quad (6)$$

gdzie $g: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest daną funkcją, a D jest wielowymiarowym przedziałem

$D = \prod_{i=1}^n [d_i^-, d_i^+]$. Niech $\hat{g}: I(\mathbb{R})^n \rightarrow I(\mathbb{R})^n$ będzie przedziałowym rozszerzeniem funkcji g , tzn.

Z własności „inclusion isotonicity” arytmetyki przedziałowej (por. np. [2,29]) wynika, że jeżeli:

$$0 \notin \hat{g}(D), \quad (7)$$

gdzie $\hat{g}(\cdot)$ jest rozszerzeniem przedziałowym funkcji $g(x)$, to funkcja $g(x)$ nie ma pierwiastków w obszarze D . Metoda podziału (porównaj [8,29,40]) oparta jest na własności (7). Należy podkreślić, że do stosowania metody podziału wystarczy, aby dla funkcji $g(x)$ istniało jej przedziałowe rozszerzenie $\hat{g}(X)$. Metodę podziału można zatem stosować do równań, w których funkcja $g(x)$ jest nieróżniczkowalna, a nawet nieciągła.

2.3. Przedziałowa metoda minimalizacji

Szczegółowy opis algorytmu znajduje się w pracach [19,20,35]. Tutaj ograniczymy się do przedstawienia jedynie jego najważniejszych elementów. Będziemy rozważali odwzorowanie f określone na n -wymiarowym przedziale X o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Poszukujemy globalnego minimum funkcji f określonej na zbiorze X , tzn. liczby:

$$f^- = \inf\{f(x) : x \in X\}. \quad (8)$$

Rozważmy dwa rozłączne przedziały X_1 i X_2 . Z własności naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji f wynika, że gdy zachodzi nierówność:

$$\hat{f}(X_1)^+ \leq \hat{f}(X_2)^-, \quad (9)$$

wtedy globalne minimum funkcji $f(x)$ na pewno nie znajduje się w przedziale X_2 , więc możemy go odrzucić w dalszych rozważaniach. Jeżeli dokonamy dostatecznie gęstego podziału przedziału X , możemy za pomocą nierówności (9) zlokalizować globalne minimum funkcji f z dużą dokładnością. Oprócz wzoru (9) istnieją inne procedury przyspieszające zbieżność metody minimalizacji, np. testy: punktu środkowego, monotoniczności, wypukłości oraz poszukiwanie lokalnych minimów metodami gradientowymi [18,19,34]. Ponadto w algorytmach przedziałowej optymalizacji stosuje się algorytmy obliczeń równoległych, umożliwiające pełne wykorzystanie możliwości komputerów wieloprocesorowych.

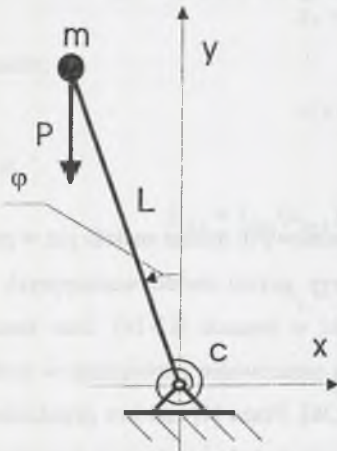
W pracy [33] J. Pinter pokazał, że rozwiązanie równania $g(x)=0$ ($g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) jest równoważne problemowi minimalizacji funkcjonału:

$$f(x) = \|g(x)\|, \quad (10)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest dowolną normą w przestrzeni \mathbb{R}^n np. $\|g(x)\| = \|g(x)\|_1 = \sum_{i=1}^n |g_i(x)|$.

Równoważność problemów wynika z aksjomatów normy $\|\cdot\|$ ($\|g(x)\| = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$). Ponieważ funkcjonal $f(x)$ może być bardzo skomplikowaną nieliniową funkcją, dlatego jako algorytmu poszukiwania minimum przyjmujemy algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej. Ogólnie mówiąc metody minimalizacji i podziału oparte są na identycznych schematach obliczeń. Różnią się jedynie zastosowanymi algorytmami eliminacji przedziałów na pewno nie zawierających rozwiązania (wzór (7) w metodzie podziału oraz wzór $f(X)^- > 0$ (10) w metodzie minimalizacji).

Rozważmy układ mechaniczny przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat statyczny
Fig. 2. Statical scheme



Rys. 3. Pierwsza faza obliczeń
Fig. 3. First part of calculation

Równanie równowagi układu jest następujące:

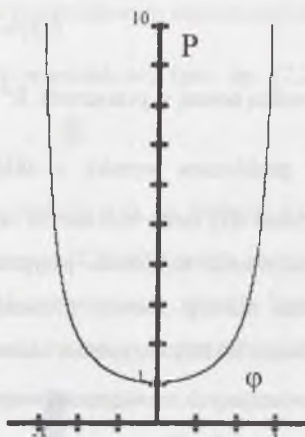
$$P \cdot L \cdot \sin(\varphi) - c \cdot \varphi = 0 \quad (11)$$

W obliczeniach przyjmujemy $L=1$ m, $c=1$ Nm. Wykres zależności siły P od kąta obrotu φ ($P=P(\varphi)$) można otrzymać stosując metodę podziału. Kolejne etapy obliczeń przedstawione są na rysunkach 3, 4 i 5. Należy zwrócić uwagę, że funkcja $P=P(\varphi)$ jest nieokreślona (wielowartościowa) dla $x=0$, a otrzymanie analitycznego wyrażenia dla funkcji odwrotnej

$\varphi = \varphi(P)$ jest niemożliwe. Metody przedziałowe są nowym i uniwersalnym narzędziem do badania przebiegu funkcji uwikłanych.



Rys. 4. Druga faza obliczeń
Fig. 4. Second part of calculation



Rys. 5. Wykres zależności $P=P(\varphi)$
Fig. 5. Diagram of function $P=P(\varphi)$

3. Przedziałowa metoda łamanych (Eulera)

Przedziałowe algorytmy rozwiązywania równań różniczkowych można znaleźć już w pracy [29]. Oszacowania błędu rozwiązania otrzymanego przy użyciu metod wariacyjnych dla równań z operatorami monotonicznymi można znaleźć w pracach [12-14]. Inne metody opierają się na twierdzeniu o punkcie stałym i znajdują oszacowanie rozwiązania w postaci np. wielomianów metodą kolejnych przybliżeń [7,9,29,38]. Praca [4] zawiera przedziałowy algorytm oparty na metodzie Newtona. Praca [32] zawiera metodę konstrukcji oszacowania rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu za pomocą funkcji sklepanych i MES. Podobną metodę zastosowano w pracy [30], z tym że do interpolacji użyto funkcji własnych operatora różniczkowego. Artykuł [10] zawiera algorytm oparty na transformacji układu współrzędnych (por. [29]). Prace [6][11] zawierają przedziałowe algorytmy oszacowania rozwiązania liniowego układu równań o stałych współczynnikach oparte na macierzy fundamentalnej rozwiązania [5]. Przedziałowe metody różnicowe oparte na algorytmie Adamsa skonstruował O.B. Ermakov [15,16].

W pracy [29] Moore podał następujące twierdzenie. Rozważymy problem początkowy postaci:

$$y'(x) = f(y(x)), y(0) = y_0, \quad (12)$$

gdzie $f: \mathbb{R}^n \supset A = \times_{i=1}^n A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$. Jeżeli f spełnia następujące warunki:

- 1) $\hat{f}(Y)$ jest funkcją ciągłą dla $Y_j \subset A_j, j=1, \dots, n$;
- 2) funkcje \hat{f}_i posiadają własność („inclusion monotonic”): jeśli $Y' \subset Y$, to $\hat{f}_i(Y') \subset \hat{f}_i(Y)$ dla wszystkich $Y \subset A$;
- 3) istnieje dodatnia liczba L taka, że dla wszystkich $Y_j \subset A_j, j=1, \dots, n$ mamy:

$$w(\hat{f}_i(Y)) \leq L \max_{j=1, \dots, n} w(Y_j), \quad (13)$$

to problem początkowy (12) posiada jednoznaczne rozwiązanie dla $x \in [0, h]$. Liczba h musi być taka, aby spełniona była zależność:

$$y_0 + x\hat{f}(A) \subset A, x \in [0, h], \quad (14)$$

Ponadto:

$$y(x) \in \hat{y}_{(p)}(x) \text{ dla } p=1, 2, \dots \quad (15)$$

gdzie

$$\hat{y}_{(p)} = \hat{y}_{(p)}(x_{s-1}) + (x - x_{s-1})\hat{f}(S_s) \text{ dla } x_{s-1} \leq x \leq x_s \quad (16)$$

$$S_s = \hat{y}_{(s)}(x_{s-1}) + \left[0, \frac{h}{p}\right] \hat{f}(A) \quad (17)$$

$$x_s = \frac{s}{p} h \text{ dla } s=1, \dots, p \quad (18)$$

$$\hat{y}_{(p)}(0) = y_0 \quad (19)$$

$$\hat{y}_{(p)}(x_s) = \hat{y}_{(p)}(x_{s-1}) + \frac{h}{p} \hat{f}(S_s) \quad (20)$$

W przedstawionych metodach wykorzystuje się jedynie pierwsze pochodne rozwiązania. W tej samej pracy przedstawione są również metody wyższego rzędu. Przedstawiona metoda może być zastosowana do oszacowania rozwiązania problemów mechanicznych, które mają jednoznaczne rozwiązanie. Jednak na przykład w zagadnieniach stateczności pojawia się problem rozwiązywania równań, które na pewno posiadają punkty bifurkacji.

Rozważymy równanie różniczkowe postaci

$$y'(x) = f(x) \quad (21)$$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że $y(x_2) - y(x_1) = y'(\xi)(x_2 - x_1)$, gdzie $\xi \in (x_1, x_2)$, stąd:

$$y(x_2) \in y(x_1) + \hat{f}(X)\Delta x, \quad (22)$$

gdzie $X = [x_1, x_2]$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Wartość $y(x_2)$ możemy zatem oszacować za pomocą zależności (22) następująco:

$$y(x_1) + \hat{f}(X)^- \Delta x \leq y(x_2) \leq y(x_1) + \hat{f}(X)^+ \Delta x. \quad (23)$$

Relacja (23) prowadzi do następującego schematu różnicowego, pozwalającego oszacować rozwiązanie w każdym kroku iteracyjnym:

$$y_{i+1}^- = y_i^- + \hat{f}(X_i)^- \Delta x_i \quad \text{dla } i=1,2,\dots \quad (24)$$

$$y_{i+1}^+ = y_i^+ + \hat{f}(X_i)^+ \Delta x_i \quad \text{dla } i=1,2,\dots \quad (25)$$

Z nierówności (23) wynika, że dla każdego $i=1,2,\dots$ zachodzi $y_i^- \leq y_i \leq y_i^+$.

Rozważymy teraz bardziej ogólne równanie postaci:

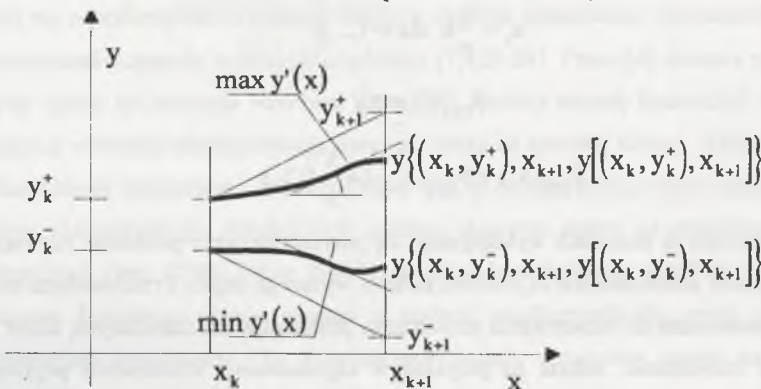
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0. \quad (26)$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika wzór:

$$y(x_2) = y(x_1) + f(\xi, y(\xi))\Delta x \quad \text{gdzie } \xi \in (x_1, x_2), \quad (27)$$

stąd

$$y(x_2) \in y(x_1) + f\{\xi, y(\xi) : \xi \in [x_0, x_1]\}\Delta x. \quad (28)$$



Rys. 6. Geometryczna interpretacja nierówności (30) i (31)
Fig. 6. Geometrical interpretation of inequalities (30) and (31)

Jak wiadomo, równanie różniczkowe określa pole wektorowe na płaszczyźnie fazowej [5], a pole wektorowe przy pewnych warunkach określa jednoznacznie strumień fazowy. Krzywa całkowa będąca rozwiązaniem równania różniczkowego jest w każdym punkcie styczna do pola wektorowego generowanego przez dane równanie na płaszczyźnie fazowej. Z geometrycznej interpretacji rozwiązania równania różniczkowego por. rys. 6. (por. [29]) wynika, że przyrost Δy dla danego przyrostu Δx musi spełniać następujące warunki:

$$y_i^+ \leq y(x_1)_i^+ + \hat{f}([x_1, x_2])_i^+ \Delta x_i \quad (29)$$

$$y_i^- \geq y(x_1)_i^- + \hat{f}([x_1, x_2], Y)_i^- \Delta x_i, \quad (30)$$

gdzie $Y = \prod_{i=1}^n [y_i^-, y_i^+]$. Wielkość $y((x_k, y_k^+), x_{k+1}, y((x_k, y_k^+), x_{k+1}))$ oznacza wartość rozwiązania równania różniczkowego (26) z warunkiem początkowym $y(x_k) = y_k^+$ w punkcie x_{k+1} . Ścisłej mówiąc, należy znaleźć ekstremalne wartości wszystkich krzywych całkowych zaczynających się w punktach $(x_k, [y_k^-, y_k^+])$. Ostatecznie otrzymujemy następujący schemat różnicowy dla oszacowania rozwiązań równań różniczkowych:

$$y(x_{k+1})_i^- = y(x_k)_i^- + \hat{f}\left([x_k, x_{k+1}], \prod_{i=1}^n [y(x_k)_i^- - \Delta y_k^-, y(x_k)_i^+ + \Delta y_k^+]\right)_i^- \Delta x \quad (31)$$

$$y(x_{k+1})_i^+ = y(x_k)_i^+ + \hat{f}\left([x_k, x_{k+1}], \prod_{i=1}^n [y(x_k)_i^+ - \Delta y_k^-, y(x_k)_i^+ + \Delta y_k^+]\right)_i^+ \Delta x, \quad (32)$$

przy czym zakładamy, że w każdym kroku iteracyjnym spełnione są warunki (29), (30). Przedstawiona metoda gwarantuje oszacowanie z góry i z dołu wartości rozwiązania równania różniczkowego (26) nawet, gdy nie posiada ono jednoznacznego rozwiązania, co ma zasadnicze znaczenie w problemach stateczności.

Algorytm różnicowy dla równań wyższych rzędów zilustrujemy na przykładzie równania ugięcia belki:

$$EJy'' = M(x) \quad (33)$$

z warunkami początkowymi $y(0) = y_0$, $y'(0) = \varphi_0$. Będziemy poszukiwali linii ugięcia oraz kątów obrotu belki. W tym celu przekształcimy równanie (33) do postaci normalnej [5]:

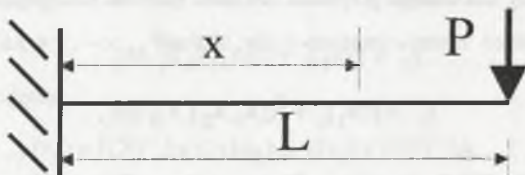
$$\begin{cases} \varphi'(x) = \frac{M(x)}{EJ} \\ y'(x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (34)$$

$\varphi(0) = \varphi_0$, $y(0) = y_0$. Na podstawie (31) i (32) otrzymujemy następujący schemat różnicowy:

$$\varphi_{i+1}^- = \varphi_i^- + \frac{M(X_i)^-}{EJ} \Delta x_i, \quad \varphi_{i+1}^+ = \varphi_i^+ + \frac{M(X_i)^+}{EJ} \Delta x_i \quad (35)$$

$$y_{i+1}^- = y_i^- + \varphi_i^- \Delta x_i, \quad y_{i+1}^+ = y_i^+ + \varphi_i^+ \Delta x_i \quad (36)$$

Obliczymy ugięcie i kąt obrotu końca belki przedstawionej na rysunku 7.



Rys. 7. Schemat statyczny
Fig.7. Statical scheme

W obliczeniach przyjęto $P=10$ kN, $L=1$ m, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $J = \frac{0.04^4}{12}$. Wyniki obliczeń przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Δx	$\varphi(L)$	$y(L)$
0.1	[0.1004, 0.1228]	[0.0636, 0.1736]
0.01	[0.1105, 0.1127]	[0.0744, 0.0856]
0.001	[0.1115, 0.1117]	[0.0744, 0.0755]

Na podstawie wzorów analitycznych otrzymano: $\varphi(L) = 0.1116$ rad, $y(L)=0.0744$ m. W tabeli 3 przedstawiono rozwiązania dla nieliniowego równania osi ugięcia belki

$$\frac{EJy''(x)}{3} = M(x) \cdot (1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}} \quad (37)$$

Tabela 3

Δx	$\varphi(L)$	$y(L)$
0.1	[0.1009, 0.1275]	[0.0638, 0.1759]
0.01	[0.1111, 0.1136]	[0.0747, 0.0861]
0.001	[0.1122, 0.1124]	[0.0747, 0.0758]

4. Wnioski

W pracy przedstawiono przedziałowe metody rozwiązywania równań algebraicznych i różniczkowych. Wszystkie zaprezentowane metody charakteryzują się globalną zbieżnością. Ponadto pozwalają znaleźć zbiór zawierający wszystkie rozwiązania. Przedziałowe metody umożliwiają otrzymanie rozwiązania z dużą (teoretycznie dowolną) dokładnością. Wadą metod przedziałowych jest duża złożoność obliczeniowa. Zagadnienie rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych jest w ogólności „NP-hard” [25]. Poszczególne algorytmy charakteryzują się zwykle jeszcze większą złożonością. Jest to podstawowa wada metod przedziałowych. Wady te rekompensuje możliwość rozwiązywania równań algebraicznych z nieróżniczkowalnymi, a nawet nieciągłymi funkcjami. Przedziałowe metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych można zastosować w zagadnieniach stateczności, drgań własnych oraz do badania układów mogących znajdować się w kilku stanach równowagi. Przedziałową metodę Eulera można zastosować do znajdowania dokładnych rozwiązań liniowych i nieliniowych równań różniczkowych mechaniki

Stosując algorytmy przedziałowe mamy możliwość uwzględniania błędów zaokrągleń powstających podczas obliczeń numerycznych.

LITERATURA

1. Alefeld G., Gienger A., Potra F.: Efficient Numerical Validation of Solutions of Nonlinear Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31, 1, 1994, s.252-260.
2. Alefeld G., Herzberger J.: *Introduction to Interval Computation*. Academic Press, New York, 1983.
3. Alefeld G.: On the Convergence of Some Interval-Arithmetic Modifications of Newton's Methods *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21, 2, 1984, s.363-372.
4. Allgower E.L., McCormick S.T.F., Pryor D.V.: A General Mesh Independence Principle for Newton's Method Applied to Second Order Boundary Value Problems. *Computing*, 23, 1979, s.233-246.
5. Arnold W.I.: *Równania różniczkowe zwyczajne*. PWN, Warszawa 1975.

6. Bauch H. Kimmel W.: Solving Ordinary Initial Value Problems with Guaranteed Bounds. ZAMM, 69, 1989, s.110-112.
7. Bauch H.: On the Iterative Inclusion of Solutions in Initial-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Computing 22, 1979, s.339-354.
8. Benedetti A.: Guglielmi N.: Tracing Characteristic of Smooth Nonlinear Resistive Circuits by Interval Analysis. <http://cs.utep.edu/interval-comp/papers.html>, 1996.
9. Corliss G.F.: Survey of Interval Algorithms for Ordinary Differential Equations. Applied Mathematics and Computation. 31, 1989, s.112-120.
10. Davey D.P., Stewart N.F.: Guaranteed Error Bounds for the Initial Value Problems using Polytope Arithmetic. BIT 16, 1976 s.257-268.
11. Dimarogonas A.D.: Interval Analysis of Vibrating Systems. Journal of Sound and Vibration, 183, 1995 s.739-749.
12. Dobronets B.S.: A Posteriori Error Estimation and Corrected Solution of Partial Differential Equations. APIC'95, 1995.
13. Dobronets B.S.: Numerical methods using defects. Reliable Computing 1, 4, 1995 s.383-391.
14. Dobronets B.S.: On Some Two-Sided Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations. Interval Computations, 1, 3, 1992, s.6-21.
15. Ermakov O.B.: Solving Systems of Ordinary Differential Equations using Adams Interpolation. Method with Guaranteed Accuracy. Interval Computations, 1994.
16. Ermakov O.B.: Two-Sides Method for Solving System of Ordinary Differential Equations with Automatic Determination of Guaranteed Estimation. Interval Computations, 3, 5, 1992, s.63-69.
17. Frommer A., Mayer G.: Efficient Methods for Enclosing Solutions of Systems of Nonlinear Equations. Computing, 44, 1990, s. 221-235.
18. Frommer A., Schwandt H.: Asynchronous parallel methods for enclosing solutions of nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 60, 1995, s.47-62.
19. Hammer R., Hocks M., Kulisch U., Ratz D.: Numerical Toolbox for Verified Computing I. Basic Numerical Problems. Springer-Verlag, Berlin 1993.
20. Hansen E.: Global Optimization using Interval Analysis. Marcel Dekker, New York 1992
21. Hansen E.: Interval Form of Newton Methods, Computing 20, 1978, s.153-163.

22. Heindl G.: Experiences with a method for enclosing solutions of systems of equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 60, 1995, s. 63-73.
23. Jäger CH., Ratz D.: A combined method for enclosing all solution of nonlinear systems of polynomial equations. *Reliable Computing*, 1, 1, 1995, s. 41-64.
24. Kearfott R.B., Xing Z.: An Interval Method Step Control for Continuation Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31, 3, 1994, s.892-914.
25. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P.: *Computational Complexity Feasibility of Data Processing and Interval Computations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
26. Kulpa Z., Pownuk A., Skalna I.: Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. *CAMES*, 5, 4, 1998.
27. Li L., Bettess P.: Adaptive finite element methods: A review. *Applied Mechanics Review*, 50, 10, 1997, s. 581-591.
28. Madan V.P.: Interval Newton Method: Hansen-Greenberg Approach-Some Procedural Improvements. *Applied Mathematics and Computation*, 35, 1990, s.263-276.
29. Moore R.E.: *Interval Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey 1966.
30. Neher M.: Enclosing Solutions of Inverse Sturm-Liouville Problem with Finite Data. *Computing* 53, 1994, s.379-395.
31. Neumaier A.: *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, New York 1990.
32. Nickel K.: The Construction of a priori Bounds for Solution of a Two Point Boundary Value Problem with Finite Element I, *Computing* 23, 1979, s.247-265.
33. Pinter J.: Solving Nonlinear Equations Systems Via Global Partition and Search: Some Experimental Results. *Computing* 43, 1990, s.309-323.
34. Pownuk A.: Przedziałowe metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych mechaniki konstrukcji. XXXVIII Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, Wisła 1999.
35. Ratschek H., Rokne J.: *New Computer Methods for Global Optimization*. John Willey & Sons, New York 1988.
36. Schwandt H.: Almost Globally Convergent Interval Methods for Discertizations of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23, 2, 1986, s.304-324.

37. Schwandt H.: An interval arithmetic domain decomposition method for a class of elliptic PDEs on nonrectangular domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50, 1994, s.509-521.
38. Sivasundaram S., Sun Y.: Application of Interval Analysis to Impulse Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 47, 1992, s.201-210.
39. Stewart J.R., Hughes T.J.R.: A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 158, 1998, s.1-22.
40. Tupper J.A.: Graphing Equations with Generalized Interval Arithmetic. <http://www.dgp.utoronto.ca/people/mooncake/msc.html>.
41. Wolff von Gudenberg J.: Determination of Minimum Sets of the Set of Zeros of a Function. *Computing*, 24, 1980, s.203-212.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Tadeusz Burczyński

Abstract

In the first part of this paper three interval methods for solution nonlinear algebraic equations are presented. Interval Newton method is an interval extension classical Newton's algorithms. Using this method displacement of Misses truss was calculated. Bisection method is based on properties of natural interval extensions. Next method is based on interval global optimization's algorithm. Both methods are very similar and are useful tools to creating diagrams of implicit functions. Using bisection method the diagram $P=P(\varphi)$ for inverted pendulum was created.

In the second parts one point interval Euler method for system of first order differential equations was presented. This algorithm can find upper and lower bounds of solution. Presented examples shows that this algorithm is convergent.

All interval algorithms are globally convergent, robust and accurate. Unfortunately interval methods usually have large computational complexity. Using interval methods we can solve algebraic equations with not continuously differentiable and not continuous functions.