ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: BUDOWNICTWO z. 85 Nr kol. 1404

Ryszard WALENTYŃSKI

UŚCIŚLONE ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE ZASTOSOWANE DO POWŁOKI SFERYCZNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono na przykładzie powłoki sferycznej poddanej prostej kombinacji obciążenia mechanicznego i termicznego różnice wynikające z zastosowania uproszczonych i uściślonych zależności konstytutywnych

REFINED CONSTITUTIVE RELATIONS APPLIED TO SPHERICAL SHELL

Summary. The paper presents on example of spherical shell subjected to simple load combination of mechanical and environmental (thermal) load – the differences caused by application of simplified and refined constitutive relations

1. Wprowadzenie

W wielu dotychczasowych teoriach powłok stosuje się uproszczone związki konstytutywne pomiędzy tensorami sił wewnętrznych a tensorami odkształceń. Tensory sił przekrojowych oraz momentów oblicza się najczęściej odpowiednio ze wzorów:

$$N^{ij} \approx \hat{N}^{ij} = \frac{2\,E\,h}{1-\nu^2}\left[\nu\, a^{ij}\,\gamma^p_p + (1-\nu)\,\gamma^{ij}\right]. \tag{1}$$

$$M^{ij} \approx \hat{M}^{ij} = -\frac{4\,E\,h^3}{3\,(1-\nu^2)}\left[\nu\, a^{ij}\,\rho^p_p + (1-\nu)\,\rho^{ij}\right]. \tag{2}$$

Związki te wiążą tensor sił przekrojowych jedynie z tensorem odkształceń błonowych. Tensor momentów zależy tu jedynie od tensora odkształceń błonowo-zgięciowych. Zależności są proste, a tensory sił wewnętrznych symetryczne - nie spełniają jednak równania równowagi:

$$\varepsilon_{ij}\left(N^{ij} - b_k^j\, M^{kj}\right) = 0. \tag{3}$$

Dokładniejsze zależności wprowadził Bielak w pracy [1]. Niesymetryczne zależności przyjmują tu postać:

$$N^{ij} \approx \hat{N}^{ij} + \left(2H\,\delta_k^j - b_k^j\right)\hat{M}^{ik}, \tag{4}$$

$$M^{ij} \approx \hat{M}^{ij} + \frac{h^2}{3}\left(2H\,\delta_k^j - b_k^j\right)\hat{N}^{ik}. \tag{5}$$

Zależności te dokładniej opisują związki konstytutywne, jednak również nie spełniają równania (3).

Na przeszkodzie uzyskania zależności dokładniejszych, spełniających równanie (3) stały do niedawna trudności natury rachunkowej. Zastosowanie systemu algebry komputerowej *Mathematica* [3] i pakietu analizy tensorowej *MathTensor* [2] umożliwiło pokonanie tych trudności.

Szczegółowe informacje dotyczące wyprowadzenia związków konstytutywnych zawarto w pracy [4]. W pracy niniejszej przedstawiono jedynie wyprowadzone zależności skupiając uwagę na przykładzie obrazującym sytuację, gdy zastosowanie uściślonych związków konstytutywnych prowadzi do wyników zasadniczo odmiennych niż z zastosowaniem zależności (1) i (2).

2. Uściślone związki konstytutywne

Związki konstytutywne dla powłok uzyskuje się obliczając całki postaci:

$$N^{ij} = \int_{-h}^{h} \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\delta_p^j - z\, b_p^j\right)\tau^{ip}\,\mathrm{d}z, \tag{6}$$

$$M^{ij} = \int_{-h}^{h} \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\delta_p^j - z\, b_p^j\right)\tau^{ip}\, z\,\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Stosunkowo proste zależności są w rzeczywistości trudne do scałkowania ze względu na postać tensora naprężenia, która nawet dla powłoki zbudowanej z liniowego materiału izotropowego przyjmuje po rozpisaniu postać:

$$
\begin{aligned}
\tau^{ij} = & \frac{E\left(\gamma_{pq} - 2z\,\rho_{pq} + z^2\,\vartheta_{pq}\right)}{\left(1-\nu^2\right)Z^4}\cdot \\
& \Big\{\left(1-4H\,z+4H^2z^2-K\,z^2\right)^2\left[\nu\,a^{pq}\,a^{ij}+\left(1-\nu\right)a^{pi}\,a^{qj}\right]+ \\
& -2z\left(1-H\,z\right)\left(1-4H\,z+4H^2\,z^2-K\,z^2\right)\cdot \\
& \cdot\left[\nu\left(b^{pq}\,a^{ij}+a^{pq}\,b^{ij}\right)+\left(1-\nu\right)\left(b^{pi}\,a^{qj}+a^{pi}\,b^{qj}\right)\right]+ \\
& +4z^2\left(1-H\,z\right)^2\left[\nu\,b^{pq}\,b^{ij}+\left(1-\nu\right)b^{pi}\,b^{qj}\right]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dla potrzeb inżynierskich i ze względu na spełnienie równania (3) wystarczające jest obliczenie całek (6) i (7) z dokładnością do trzeciej potęgi grubości powłoki *2h*. Po obliczeniach i uproszczeniu wykonanym systemem *Mathematica* z wykorzystaniem pakietu *MathTensor* uzyskano następujące zależności:

$$
\begin{aligned}
N^{ij} = & \frac{2\,E\,h}{3\left(1-\nu^2\right)}\Big\{\left(3-5K\,h^2\right)\left[\nu\,a^{ij}\,\gamma^p_p+\left(1-\nu\right)\gamma^{ij}\right]+ \\
& +2\left[\nu\,b_{pq}b^{ij}+\left(1-\nu\right)b^i_p\,b^j_q\right]\gamma^{pq}\,h^2+ \\
& +4H\left[\nu\,b^{ij}\,\gamma^p_p+\left(1-\nu\right)b^j_p\,\gamma^{pi}\right]h^2+ \\
& +2H\left[\nu\,a^{ij}\,b_{pq}\,\gamma^{pq}+\left(1-\nu\right)b^i_p\,\gamma^{pj}\right]h^2+ \\
& -2b^{pj}\left[\nu\,b^i_p\,\gamma^q_q+\left(1-\nu\right)b_{pq}\,\gamma^{qi}\right]h^2+ \\
& -4\left[\nu\,a^{ij}\,b_{pq}\,\rho^{pq}+\left(1-\nu\right)b^i_p\,\rho^{pj}\right]h^2+ \\
& +2\left(2H\,\delta^j_q-b^j_q\right)\left[\nu\,a^{qi}\,\rho^p_p+\left(1-\nu\right)\rho^{qi}\right]h^2+ \\
& +\left[\nu\,a^{ij}\,\vartheta^p_p+\left(1-\nu\right)\vartheta^{ij}\right]h^2\Big\}+O\left(h^5\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{ij} = & \frac{2\,E\,h^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\Big\{2\left[\nu\,a^{ij}\,b_{pq}\,\gamma^{pq}+\left(1-\nu\right)b^i_p\,\gamma^{pj}\right]+ \\
& -\left(2H\,\delta^j_q-b^j_q\right)\left[\nu\,a^{qi}\,\gamma^p_p+\left(1-\nu\right)\gamma^{qi}\right]+ \\
& -2\left[\nu\,a^{ij}\,\rho^p_p+\left(1-\nu\right)\rho^{ij}\right]\Big\}+O\left(h^5\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

We wzorach (9) i (10) pominięto wyrazy mnożone przez piątą i wyższe potęgi grubości powłoki. Zależności te spełniają równanie (3), a ponadto ze względu na ustalenie ogólnej zależności siły wewnętrzne–odkształcenia mogą być zastosowane w liniowej jak i geometrycznie nieliniowej teorii powłok.

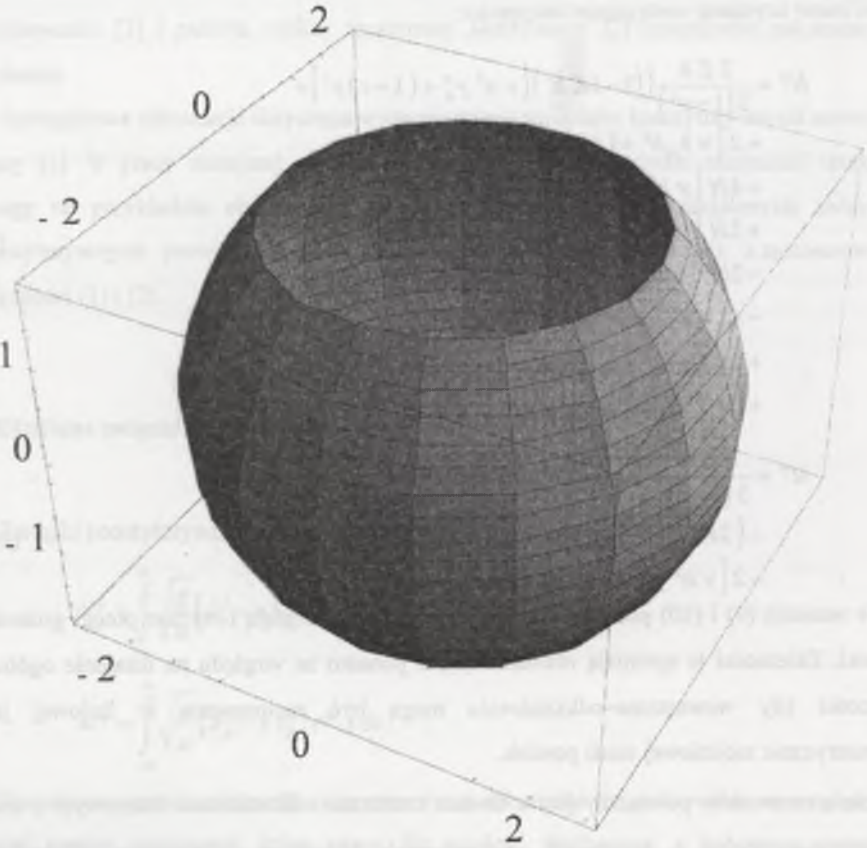
Tensor momentów powiązany jest z dwoma tensorami odkształcenia: błonowym γ oraz błonowo-zgięciowym ρ, tensor sił przekrojowych dodatkowo z tensorem odkształceń zgięciowych ϑ. Dla tensora momentów wpływ obu tensorów odkształcenia jest równoważny, gdyż oba mnożone są przez trzecią potęgę grubości powłoki. Dla tensora sił przekrojowych na ogół dominuje tensor odkształceń błonowych z uwagi na to, że mnożony jest przez grubość

powłoki w pierwszej potędze. Gdy jednak odkształcenia błonowe są małe, uwidacznia się wpływ pozostałych składników

3. Przykład – powłoka sferyczna

Przyjmując parametryzację powłoki sferycznej (rys. 1) postaci

$$r = \left\{ s_o \cos\left(\frac{x^1}{s_o}\right)\cos\left(x^2\right), s_o \cos\left(\frac{x^1}{s_o}\right)\sin\left(x^2\right), s_o \sin\left(\frac{x^1}{s_o}\right) \right\} \tag{11}$$



Rys.1. Powłoka sferyczna – opis w tekście
Fig. 1. Spherical shell – description in the text

i podstawiając do związków konstytutywnych (1), (2), (9) i (10) zależności geometryczne pomiędzy tensorami odkształceń i fizycznymi składowymi wektorów przemieszczenia **w** oraz obrotu **d** z uwzględnieniem dystorsji pochodzących od wpływu temperatury średniej ε_t i gradientu temperatury κ, otrzymano wyrażenia na składowe tensora sił przekrojowych przedstawione na rys. 2.

Ponieważ dla powłoki sferycznej składowe drugiej i trzeciej formy różniczkowej powierzchni środkowej są proporcjonalne do składowych tensora metrycznego, to po podstawieniu wyrazy przemnożone przez trzecią potęgę grubości powłoki uległy redukcji i oba związki (1) i (9) prowadzą do identycznych zależności.

$$N^{11} = \hat{N}^{11} = \frac{-2Eh\,\epsilon(x,y)}{1-\nu} - \frac{4Eh\,\nu\tan(\frac{x}{s_o})\,w_1(x,y)}{(1-\nu^2)s_o} - \frac{2Eh\,w_3(x,y)}{(1-\nu)s_o} + \frac{4Eh\,\nu\sec(\frac{x}{s_o})\,w_2^{(0,1)}(x,y)}{(1-\nu^2)s_o} + \frac{4Eh\,w_1^{(1,0)}(x,y)}{1-\nu^2}$$

$$N^{12} = N^{21} = \hat{N}^{12} = \hat{N}^{21} = \frac{2Eh\,w_1^{(0,1)}(x,y)\sec^2(\frac{x}{s_o})}{(\nu+1)s_o^2} + \frac{2Eh\tan(\frac{x}{s_o})\,w_2(x,y)\sec(\frac{x}{s_o})}{(\nu+1)s_o^2} + \frac{2Eh\,w_2^{(1,0)}(x,y)\sec(\frac{x}{s_o})}{(\nu+1)s_o}$$

$$N^{22} = \hat{N}^{22} = \frac{4Eh\,w_2^{(0,1)}(x,y)\sec^3(\frac{x}{s_o})}{(1-\nu^2)s_o^3} - \frac{2Eh\,\epsilon(x,y)\sec^2(\frac{x}{s_o})}{(1-\nu)s_o^2} - \frac{4Eh\tan(\frac{x}{s_o})\,w_1(x,y)\sec^2(\frac{x}{s_o})}{(1-\nu^2)s_o^3} + \frac{2Eh\,w_3(x,y)\sec^2(\frac{x}{s_o})}{(1-\nu)s_o^3} + \frac{4Eh\,\nu\,w_1^{(1,0)}(x,y)\sec^2(\frac{x}{s_o})}{(1-\nu^2)s_o^2}$$

Rys. 2. Związki składowych tensora sił przekrojowych ze składowymi wektorów przemieszczeń i obrotu
Fig. 2. Relations between axial forces components and the components of displacement and rotation vectors

Zasadniczo odmienna sytuacja występuje w przypadku składowych tensora momentów (rys. 3). Już na pierwszy rzut oka można zauważyć, że składowe uściślone określone są przez znacznie krótszymi wyrażeniami. Okazuje się, że składowe tensora momentów zależą jedynie od składowych wektora obrotów.

$$M^{11} = \frac{2E\epsilon(x,y)h^3}{3s_o(1-\nu)} + \frac{2E\kappa(x,y)h^3}{3(1-\nu)} - \frac{4E\nu\tan(\frac{x}{s_o})d_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o} - \frac{4E\nu\sec(\frac{x}{s_o})d_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o} + \frac{4Ed_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$\hat{M}^{11} = \frac{4E\epsilon(x,y)h^3}{3s_o(1-\nu)} + \frac{2E\kappa(x,y)h^3}{3(1-\nu)} - \frac{4E\nu\tan(\frac{x}{s_o})d_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o} + \frac{4E\nu\tan(\frac{x}{s_o})w_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^2} + \frac{2Ew_3(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^2} + \frac{4E\nu\sec(\frac{x}{s_o})d_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o} - \frac{4E\nu\sec(\frac{x}{s_o})w_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^2} + \frac{4Ed_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)} + \frac{4Ew_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o}$$

$$M^{12} = M^{21} = \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})d_2(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^2} + \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})d_1^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^2} + \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})d_2^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o}$$

$$\hat{M}^{12} = \hat{M}^{21} = \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})d_2(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^2} - \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})w_2(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^3} + \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})d_1^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^2} - \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})w_1^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^3} + \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})d_2^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o} + \frac{2E\sec(\frac{x}{s_o})w_2^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(\nu+1)s_o^2}$$

$$M^{22} = \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})\epsilon(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^3} + \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})\kappa(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^2} + \frac{4E\sec^2(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})d_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^3} + \frac{4E\sec^3(\frac{x}{s_o})d_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^3} + \frac{4E\nu\sec^2(\frac{x}{s_o})d_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^2}$$

$$\hat{M}^{22} = \frac{4E\sec^2(\frac{x}{s_o})\epsilon(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^3} + \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})\kappa(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^2} - \frac{4E\sec^2(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})d_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^3} - \frac{4E\sec^2(\frac{x}{s_o})\tan(\frac{x}{s_o})w_1(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^4} + \frac{2E\sec^2(\frac{x}{s_o})w_3(x,y)h^3}{3(1-\nu)s_o^4} + \frac{4E\sec^3(\frac{x}{s_o})d_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^3} + \frac{4E\sec^3(\frac{x}{s_o})w_2^{(0,1)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^4} + \frac{4E\nu\sec^2(\frac{x}{s_o})d_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^2} - \frac{4E\nu\sec^2(\frac{x}{s_o})w_1^{(1,0)}(x,y)h^3}{3(1-\nu^2)s_o^3}$$

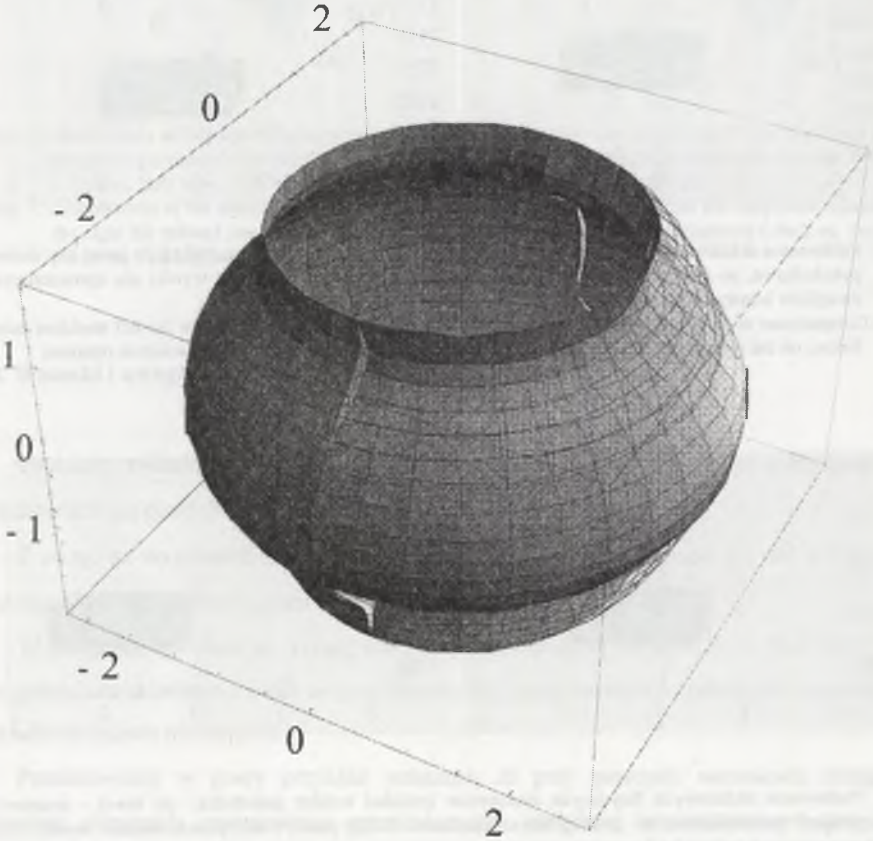
Rys. 3. Związki składowych tensora momentów ze składowymi wektorów przemieszczeń i obrotu
Fig. 3. Relations between moment tensor components and the components of displacement and rotation vectors

Dla obu zależności konstytutywnych rozwiązano osiowo-symetryczne zadanie brzegowe, przyjmując do obliczeń następujące dane:

Promień sfery 2,5 m; współczynnik Poissona $\nu=1/6$; grubość powłoki 0,20 m; moduł Younga $E=324000$ kPa.

Obciążenia: ciągłe równomierne ciśnienie normalne $P^3=62.208$ kPa oraz obciążenie termiczne $\varepsilon_t=0.001$.

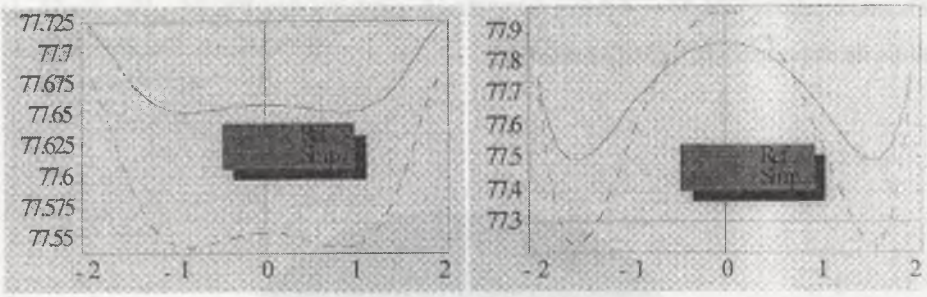
Warunki brzegowe: składowe wektora przemieszczenia oraz wartości momentów zginających zerują się na brzegach ($x^1=\pm 5\pi/8\approx 1.96$ m).



Rys. 4. Porównanie deformacji powłoki – po lewej dla związków uproszczonych, po prawej dla uściślonych, skala przemieszczeń skażona 20000 razy

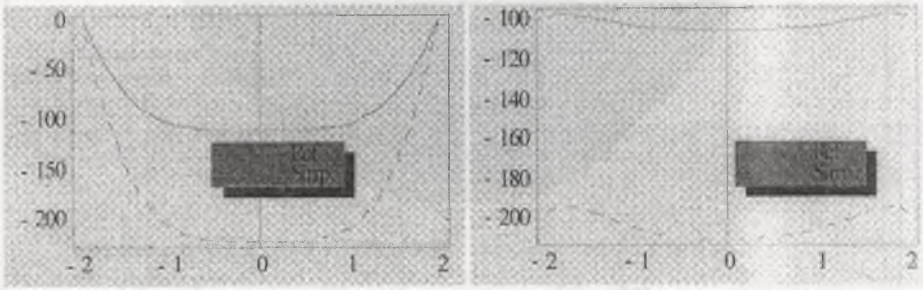
Fig. 4. Comparisson of the shell deformation – on the left for simplified relations, on the right for refined ones, displacement scale exagerated 20000 times

Okazało się, że dla tego stosunkowo prostego przypadku obciążenia otrzymano wyniki zasadniczo różniące się w zakresie niemal wszystkich parametrów. Wybrane rezultaty przedstawiono na rysunkach 4-7. Analizując wyniki można zauważyć, że szczególnie duże różnice widoczne są w przypadku składowych fizycznych momentów oraz odkształcenia powłoki.



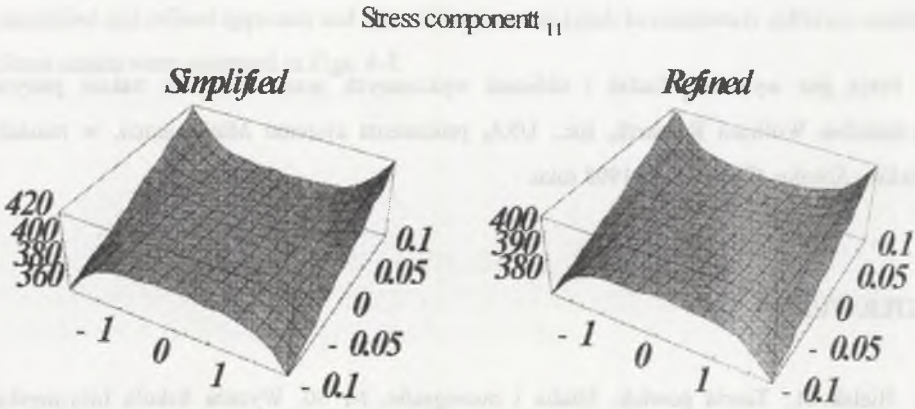
Rys. 5. Porównanie składowych fizycznych sił przekrojowych (rozkład wzdłuż południka); po lewej siły osiowe południkowe, po prawej równoleżnikowe. Linią przerywaną przedstawiono wyniki dla uproszczonych związków konstytutywnych

Fig. 5. Comparisson of axial forces' phisical components (distribution along meridian), on the left meridian axial forces, on the right parallel ones. Dashed line represents results for simplified constitutive relations



Rys. 6. Porównanie składowych fizycznych momentów (rozkład wzdłuż południka); po lewej - momenty zginające południkowe, po prawej równoleżnikowe. Linią przerywaną przedstawiono wyniki dla uproszczonych związków konstytutywnych

Fig. 6. Comparisson of moments' phisical components (distribution along meridian), on the left meridian bending moments, on the right parallel ones. Dashed line represents results for simplified constitutive relations



Rys. 7. Porównanie składowych fizycznych naprężeń południkowych - po lewej wykres dla zależności uproszczonych, po prawej dla uściślonych. Przedstawiono rozkłady naprężeń wzdłuż południka (przedział (-5π/8 m, 5π/8 m)≈(-1.96 m, 1.96 m)) oraz grubości (przedział (-0.1 m, 0.1 m)

Fig. 7. Comparisson of the meridian stress phisical components - on the left diagram for simplified relations, on the right for refined one. There are presented distributions along meridian (interval (-5π/8 m, 5π/8 m)≈ (-1.96 m, 1.96 m)) and the thickness (interval (-0.1 m, 0.1 m)

4. Wnioski i uwagi końcowe

Uściślone związki konstytutywne spełniają równanie równowagi (3) oraz lepiej opisują zachowanie się powłok.

Z uwagi na wyprowadzoną ogólną postać zależności mogą być zastosowane w liniowej i geometrycznie nieliniowej teorii powłok.

W przypadku powłoki sferycznej oba podejścia, uściślone i uproszczone, dają identyczne wyrażenia na składowe tensora sił przekrojowych, jednak zasadniczo odmienne wyrażenia na składowe tensora momentów.

Przedstawiony w pracy przykład wskazuje, że przy pewnych warunkach obciążenia powłoki sferycznej zastosowanie uproszczonych związków konstytutywnych prowadzić może do zasadniczo odmiennych wyników.

Podsumowując należy stwierdzić, że w obliczeniach naukowo-technicznych należy stosować uściślone związki konstytutywne.

PODZIĘKOWANIA

Praca jest wynikiem badań i obliczeń wykonanych przez autora w trakcie pobytu w siedzibie Wolfram Research, Inc., USA, producenta systemu *Mathematica*, w ramach *Visiting Scholar Grant*, latem 1998 roku.

LITERATURA

1. Bielak St.: Teoria powłok, Studia i monografie, Nr 30, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, 1990.
2. Parker L., Christensen St.M.: *MathTensor* – a system for doing tensor analysis by computer, first ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
3. Wolfram St.: The *Mathematica* book, third ed., Wolfram Media, / Cambridge University Press, 1996.
4. Walentyński R.: Refined constitutive shell equations, w przygotowaniu, 1998.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Feliks Andermann

Abstract

Simplified constitutive equations (1) and (2) do not satisfy the equation of equilibrium (3). The refined constitutive equations (9) and (10) were evaluated. They satisfy this equation and better describe shell behaviour. They can be applied for both linear and non-linear theory of shells.

There is presented an example of application of refined constitutive equations (9), (10) for shells and their comparison to simplified ones (1), (2). The both solutions were substituted with kinematic relations for spherical shell parameterised with vector (11). For spherical shell simplified and refined relations result in identical constitutive kinematic relations for axial forces' tensor, Fig. 2. In contrary kinematic relations for tensor of moments are completely different, Fig. 3. A simple boundary value problem of spherical shell subjected to mechanical

and environmental influence has been solved. It has been made with application of both simplified and refined approach and shows that they can result in completely different results. Some results were presented in Figs. 4-7.