ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria : BUDOWNICTWO z. 85 Nr kol. 1404

Barbara WIECZOREK

ROZWIĄZANIA FUNDAMENTALNE ZAGADNIENIA QUASI-STATYCZNEGO TERMODYFUZJI LEPKOSPRĘŻYSTEJ

Streszczenie. W opracowaniu analizowane jest zadanie początkowo-brzegowe, dotyczące wyznaczenia stanu przemieszczenia w ośrodku lepkosprężystym z uwzględnieniem przepływów masy i ciepła, opisanych równaniami dyfuzji i przewodnictwa cieplnego.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THE QUASI-STATIC PROBLEM OF VISCOELASTIC THERMODIFFUSION

Summary. There is analysed an initial-boundary problem of the displacement evaluation in the viscoelastic body with the flow of mass and heat consideration, described with diffusion and conductivity equations.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie statyczne sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej (por.[2]) opisane jest układem pięciu równań różniczkowo-całkowych typu splotowego, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń. Postać tych równań jest następująca:

$$
\begin{aligned}
&-\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + \gamma_S * dS_{,i} + \gamma_C * dc_{,i} = \rho F_i \\
&\rho T_o \dot{S} - k_1\left[\gamma_S * du_{i,i} + \mathrm{m} * dS + 1 * dc\right]_{,jj} = \rho r_1 \qquad (1)\\
&\rho \dot{c} - k_2\left[\gamma_C * du_{i,i} + 1 * dS + \mathrm{n} * dc\right]_{,jj} = \rho r_2
\end{aligned}
$$

gdzie λ i μ oraz $\gamma_S = \alpha_S(3\lambda + 2\mu)$, $\gamma_C = \alpha_C(3\lambda + 2\mu)$, m, n, l oznaczają odpowiednio funkcje materiałowe i funkcje relaksacji, natomiast u_i, S i c poszukiwane wielkości, tj. pole przemieszczeń, entropię i koncentrację.

W układzie (1) ρF_i, ρr_1, ρr_2, k_1, k_2 symbole oznaczają odpowiednio składowe wektora sił masowych, źródło ciepła i masy, współczynnik przewodności cieplnej i dyfuzyjnej, natomiast

$$f * dg := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) dg(\tau) d\tau$$

oznacza splot funkcji.

W rozważaniach korzysta się z założenia, że funkcje materiałowe μ i λ oraz funkcje relaksacji m, n i l są postaci:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \mu_o \Pi(t), \\
\lambda(t) &= \lambda_o \Pi(t), \\
\mathrm{m}(t) &= \mathrm{m}_o \Pi(t), \\
\mathrm{n}(t) &= \mathrm{n}_o \Pi(t), \\
\mathrm{l}(t) &= \mathrm{l}_o \Pi(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\Pi(t)$ jest funkcją określoną następująco:

$$\Pi(t) = \left(\alpha + \beta\, \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) H(t), \tag{3}$$

natomiast μ_o, λ_o, m_o, n_o i l_o oraz α, β i γ są stałymi, a $H(t)$ - funkcją Heaviside'a.

Przy wyznaczaniu rozwiązania układu (1) stosowana będzie transformacja Fouriera, która dla dowolnej funkcji $f(x_i, t)$ określonej w przestrzeni $\Re^4$ zdefiniowana jest wzorem:

$$\mathrm{F}\left[f(x_i,t)\right] = \bar{f}(s_i,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Re^4} f(x_i,t)\, \mathrm{e}^{-i(x_i s_i + t\omega)} dx_i dt, \tag{4}$$

gdzie $s = (s_1, s_2, s_3)$, a powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie od 1 do 3.

Transformatę odwrotną określa wyrażenie

$$f(x_i,t) \equiv \mathrm{F}^{-1}\left[\bar{f}(s_i,\omega)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Re^4} \bar{f}(s_i,\omega)\, \mathrm{e}^{i(x_i s_i + t\omega)} ds_i d\omega \tag{5}$$

Zdefiniowane przekształcenie ma następujące własności:

$$\mathsf{F}\left[\partial_k f(x_i,t)\right] = is_k \hat{f}(s_i,\omega) \quad , \quad \mathsf{F}\left[\partial_t f(x_i,t)\right] = i\omega_k \hat{f}(s_i,\omega) \tag{6}$$

oraz

$$\mathsf{F}\left[f(x_i,t) * g(x_i,t)\right] = (2\pi)^2 \hat{f}(s_i,\omega)\hat{g}(s_i,\omega), \tag{7}$$

przy czym

$$f(x_i,t) * g(x_i,t) = \int_{\Re^4} f(x_i - x_i', t - t')g(x_i',t')dx_i'dt'$$

oznacza splot funkcji f i g.

Ponadto dla funkcji $g(x_i,t)$ takiej, że $g(x_i,0)=0$, prawdziwa jest zależność:

$$\mathsf{F}\left[f(x_i,t) * dg(x_i,t)\right] = (2\pi)^2 \, i\omega \, \hat{f}(s_i,\omega)\,\hat{g}(s_i,\omega) \tag{8}$$

Wykorzystane zostaną również następujące relacje:

$$\mathsf{F}\left[\frac{\delta(t)}{|x|}\right] = \frac{1}{\pi s^2} \quad , \quad \mathsf{F}\left[|x|\delta(t)\right] = -\frac{2}{\pi s^4} \quad , \quad \mathsf{F}\left[\Gamma_{\mathrm{d}}(x_i,t)\right] = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{s^2 + \mathrm{id}\omega}, \tag{9}$$

gdzie : $|x| = \sqrt{(x_i x_i)}$

$$\Gamma_{\mathrm{d}}(x_i,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi t}{\mathrm{d}}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\dfrac{\mathrm{d}\,(x_i x_i)}{4t}} & , \quad dla \quad t > 0 \\ 0 & , \quad dla \quad t < 0 \end{cases}$$

Różniczkując pierwsze z równań układu (1) i wprowadzając dylatację przemieszczania

$$e \equiv u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{10}$$

otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu) * de_{,ii} + \gamma_S * dS_{,ii} + \gamma_C * dc_{,ii} &= \rho F_{i,i} \\ -\gamma_S * de_{,ii} + \mathrm{k}\dot{S} - \mathrm{m} * dS_{,ii} - 1 * dc_{,ii} &= \frac{\rho r_1}{k_1}, \\ -\gamma_C * de_{,ii} - 1 * dS_{,ii} + \mathrm{h}\dot{c} - \mathrm{n} * dc_{,ii} &= \frac{\rho r_2}{k_2}, \end{aligned} \tag{11}$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$\mathrm{k} = \frac{\rho T_0}{k_1}, \quad \mathrm{h} = \frac{\rho}{k_2}.$$

2. Rozwiązanie fundamentalne

Rozważany układ (11) można zapisać w postaci macierzowej:

$$A(\partial_i,\partial_t)\, y = f, \tag{12}$$

gdzie:

$$y^T = [\, e, S, c\,], \quad f^T = \left[\, \rho F_{i,i}, \frac{\rho r_1}{k_1}, \frac{\rho r_2}{k_2} \,\right], \tag{13}$$

przy czym macierz układu jest określona następująco:

$$A(\partial_i,\partial_t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

gdzie:

$$A_{11} = (\lambda + 2\mu) * d\partial_{ii} \qquad A_{12} = \gamma_S * d\partial_{ii} \qquad A_{13} = \gamma_C * d\partial_{ii}$$

$$A_{21} = -\gamma_S * d\partial_{ii} \qquad A_{22} = \mathrm{k}\partial_t - \mathrm{m} * d\partial_{ii} \qquad A_{23} = -1 * d\partial_{ii} \tag{15}$$

$$A_{31} = -\gamma_C * d\partial_{ii} \qquad A_{32} = -1 * d\partial_{ii} \qquad A_{33} = \mathrm{h}\partial_t - \mathrm{n} * d\partial_{ii}.$$

Dla zagadnienia opisanego układem równań różniczkowych (12) wyznacza się rozwiązanie podstawowe operatora termodyfuzji (por. [1] i [3]) poszukując dystrybucji E, spełniającej równanie

$$A(\partial_i,\partial_t)\, E = \delta, \tag{16}$$

gdzie:

$$\delta = f^o \delta(x)\delta(t), \tag{17}$$

przy czym $(f^o)^T = [1_{i,j}, 1, 1]$ oznacza wektor obciążeń jednostkowych.

Rozwiązanie układu (16) sprowadza się do wyznaczenia macierzy niezależnych dystrybucji temperowanych.

Po wykonaniu transformacji Fouriera na równaniu (16) zgodnie ze wzorem (4) otrzymuje się układ równań:

$$\hat{A}(s_i,\omega)\, \hat{E}(s_i,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} I, \tag{18}$$

który jest układem równań algebraicznych, a macierz $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową. Macierz układu (18) jest określona następująco:

$$\hat{\boldsymbol{A}}(s_i,\omega) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

gdzie:

$$\hat{A}_{11} = \left(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}\right) i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{12} = -\hat{\gamma}_S\, i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{13} = -\hat{\gamma}_C\, i\omega\, s^2$$

$$\hat{A}_{21} = \hat{\gamma}_S\, i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{22} = \mathrm{k} i\omega + \hat{\mathrm{m}}\, i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{23} = \hat{\mathrm{l}}\, i\omega\, s^2 \tag{20}$$

$$\hat{A}_{31} = \hat{\gamma}_C\, i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{32} = \hat{\mathrm{l}}\, i\omega\, s^2 \qquad \hat{A}_{33} = \mathrm{h} i\omega + \hat{\mathrm{n}}\, i\omega\, s^2,$$

przy czym $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$.

Wyznacznik macierzy $\hat{\boldsymbol{A}}(s_i,\omega)$ przyjmuje wartość:

$$\det\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right) = (i\omega)^3 s^2 \left(\vartheta_1 s^4 + \vartheta_2 i\omega\ s^2 - \vartheta_3 \omega^2\right), \tag{21}$$

gdzie:

$$\vartheta_1 = \hat{\mathrm{n}}\hat{\gamma}_S^2 - 2\hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_S\hat{\gamma}_C + \hat{\mathrm{m}}\hat{\gamma}_C^2 + \left(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}\right)\left(\hat{\mathrm{m}}\hat{\mathrm{n}} - \hat{\mathrm{l}}^2\right)$$

$$\vartheta_2 = \mathrm{h}\hat{\gamma}_S^2 + \mathrm{k}\hat{\gamma}_C^2 + \left(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}\right)\left(\mathrm{h}\hat{\mathrm{m}} + \mathrm{k}\hat{\mathrm{n}}\right) \tag{22}$$

$$\vartheta_3 = \mathrm{hk}\left(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}\right).$$

Wyrażenie (21) można zapisać w postaci:

$$\det\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right) = \vartheta_1 (i\omega)^3 s^2 \left(s^2 + \mathrm{a}\ i\omega\right)\left(s^2 + \mathrm{b}\ i\omega\right), \tag{23}$$

przy czym stałe a i b są określone zależnościami:

$$\mathrm{a} = \frac{-\vartheta_2 - \sqrt{\vartheta_2^2 - 4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1}, \qquad \mathrm{b} = \frac{-\vartheta_2 - \sqrt{\vartheta_2^2 - 4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1}. \tag{24}$$

Z układu (18) wyznacza się macierz rozwiązań $\hat{\boldsymbol{E}}$, której postać jest następująca:

$$\hat{\boldsymbol{E}}(s_i,\omega) = \begin{bmatrix} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} & \hat{E}_{13} \\ \hat{E}_{21} & \hat{E}_{22} & \hat{E}_{23} \\ \hat{E}_{31} & \hat{E}_{32} & \hat{E}_{33} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

gdzie:

$$\hat{E}_{11} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{-\mathrm{hk}\omega^2 + (\mathrm{h}\hat{\mathrm{m}} + \mathrm{k}\hat{\mathrm{n}})i\omega s^2 + (\hat{\mathrm{m}}\hat{\mathrm{n}} - \hat{\mathrm{l}}^2)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{12} = -\hat{E}_{21} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{h}\hat{\gamma}_S\, i\omega s^2 + (\hat{\mathrm{n}}\hat{\gamma}_S - \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_C)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{13} = -\hat{E}_{31} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{k}\hat{\gamma}_C\, i\omega s^2 + (\hat{\mathrm{m}}\hat{\gamma}_C - \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_S)s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{22} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{h}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})i\omega s^2 + (\hat{\gamma}_C^2 + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\mathrm{n}})s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{23} = \hat{E}_{32} = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{(\hat{\gamma}_S\hat{\gamma}_C + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\mathrm{l}})s^4}{\det(\hat{A})}$$

$$\hat{E}_{33} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{k}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})i\omega s^2 + (\hat{\gamma}_S^2 + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\hat{\mathrm{m}})s^4}{\det(\hat{A})}.$$

Ogólnie elementy macierzy $\hat{E}$ wyrażają się wzorami:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\xi_{ij}\; s^4 + \eta_{ij}\; i\omega\; s^2 - \varsigma_{ij}\; \omega^2}{\vartheta_1\; (i\omega)^3 s^2\; (s^2 + \mathrm{a}\; i\omega)\; (s^2 + \mathrm{b}\; i\omega)} \qquad dla \quad i,j = 1,2,3, \tag{26}$$

gdzie ξ_{ij}, η_{ij} oraz ς_{ij} są elementami macierzy:

$$\xi = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{m}}\hat{\mathrm{n}} - \hat{\mathrm{l}}^2 & \hat{\mathrm{n}}\hat{\gamma}_S - \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_C & \hat{\mathrm{m}}\hat{\gamma}_C - \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_S \\ \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_C - \hat{\mathrm{n}}\hat{\gamma}_S & \hat{\mathrm{n}}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) + \hat{\gamma}_C^2 & -\hat{\mathrm{l}}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) - \hat{\gamma}_S\hat{\gamma}_C \\ \hat{\mathrm{l}}\hat{\gamma}_S - \hat{\mathrm{m}}\hat{\gamma}_C & -\hat{\mathrm{l}}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) - \hat{\gamma}_S\hat{\gamma}_C & \hat{\mathrm{m}}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) + \hat{\gamma}_S^2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \mathrm{h}\hat{\mathrm{m}} + \mathrm{k}\hat{\mathrm{n}} & \mathrm{h}\hat{\gamma}_S & \mathrm{k}\hat{\gamma}_C \\ -\mathrm{h}\hat{\gamma}_S & \mathrm{h}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) & 0 \\ -\mathrm{k}\hat{\gamma}_C & 0 & \mathrm{k}(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \end{bmatrix} \qquad \varsigma = \begin{bmatrix} \mathrm{hk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyrażenie (26) można rozłożyć na ułamki proste w postaci:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\vartheta_1}\left[\frac{\widetilde{P}_{ij}}{s^2 + \mathrm{a}\; i\omega} + \frac{\widetilde{Q}_{ij}}{s^2 + \mathrm{b}\; i\omega} + \frac{\widetilde{R}_{ij}}{(i\omega)^3 s^2}\right], \tag{28}$$

gdzie stałe $\widetilde{P}_{ij}$, $\widetilde{Q}_{ij}$ i $\widetilde{R}_{ij}$ określają zależności:

$$\widetilde{P}_{ij} = \frac{\xi_{ij}\mathrm{a}^2 - \eta_{ij}\mathrm{a} + \varsigma_{ij}}{\mathrm{a}\;(\mathrm{a} - \mathrm{b})}, \quad \widetilde{Q}_{ij} = \frac{-\xi_{ij}\mathrm{b}^2 + \eta_{ij}\mathrm{b} - \varsigma_{ij}}{\mathrm{b}\;(\mathrm{a} - \mathrm{b})}, \quad \widetilde{R}_{ij} = \frac{\varsigma_{ij}}{\mathrm{a}\;\mathrm{b}}. \tag{29}$$

W ogólnym przypadku znalezienie rozwiązań fundamentalnych termodyfuzji lepkosprężystej jest nieosiągalne w formie zamkniętej ze względu na trudności w określeniu odwrotnych transformat Fouriera funkcji typu $\left(s^2 + \mathrm{z}\, i\omega\right)^{-1}$, gdzie $\mathrm{z} = \mathrm{z}(\omega)$. Okazuje się jednak, że w szczególnych przypadkach, kiedy funkcje relaksacji spełniają pewne ograniczenia, znajduje się rozwiązanie fundamentalne. Ograniczenie to sprowadza się do spełnienia jednej równości ograniczającej funkcje relaksacji

$$\int_0^t \vartheta_1(\tau)\vartheta_3(t-\tau)d\tau = \mathrm{a\,b} \int_0^t \vartheta_2(\tau)\vartheta_2(t-\tau)d\tau, \tag{30}$$

przy czym przyjmuje się, że a i b są dowolnymi stałymi różnymi do zera, tzn. $\mathrm{a} \neq 0$ i $\mathrm{b} \neq 0$. Jest to podstawowe ograniczenie nakładane na funkcje relaksacji, występujące w zadaniach analizowanych w pracy. W fizykalnej interpretacji oznacza to, że zmiany czasowe współrzędnych macierzy rozwiązań fundamentalnych będą miały przebieg podobny do iloczynów splotowych funkcji relaksacji.

Uwzględniając wprowadzone założenia (2) i (30) uzyskuje się następującą postać macierzy:

$$\begin{aligned} E_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\Bigg\{ & \left[\mathrm{A}_{ij}\hat{\Phi}(\omega) - \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{B}_{ij}\hat{\Psi}(\omega) + \frac{1}{\mathrm{a}^2}\mathrm{C}_{ij}\hat{\Xi}(\omega)\right]\frac{\mathrm{a}}{s^2 + \mathrm{a}\, i\omega} + \\ & - \left[\mathrm{A}_{ij}\hat{\Phi}(\omega) - \frac{1}{\mathrm{b}}\mathrm{B}_{ij}\hat{\Psi}(\omega) + \frac{1}{\mathrm{b}^2}\mathrm{C}_{ij}\hat{\Xi}(\omega)\right]\frac{\mathrm{b}}{s^2 + \mathrm{b}\, i\omega} + \left[\mathrm{D}_{ij}\hat{\Xi}(\omega)\right]\frac{1}{s^2}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{31}$$

gdzie:

$$\mathrm{A}_{ij} = \frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\frac{\xi^\circ_{ij}}{\vartheta^\circ_l},\quad \mathrm{B}_{ij} = \frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\frac{\eta^\circ_{ij}}{\vartheta^\circ_l},\quad \mathrm{C}_{ij} = \frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\frac{\varsigma^\circ_{ij}}{\vartheta^\circ_l},\quad \mathrm{D}_{ij} = \frac{1}{\mathrm{a\,b}}\frac{\varsigma^\circ_{ij}}{\vartheta^\circ_l}. \tag{32}$$

Współczynniki ξ°_{ij}, η°_{ij} i ς°_{ij} oraz ϑ°_l określone są wzorami (22) i (26), przy czym w miejscu $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\mathrm{m}}$, $\hat{\mathrm{n}}$ i $\hat{\mathrm{l}}$ występują odpowiednio stałe λ°, μ°, m°, n° i l°.

Funkcje $\hat{\Phi}(\omega)$, $\hat{\ }(\omega)$ i $\hat{\Xi}(\omega)$ wyrażają się wzorami:

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega\,\hat{\Pi}(\omega)},$$

$$\hat{\ }(\omega) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\frac{1}{(i\omega)^2\,\hat{\Pi}^2(\omega)}, \tag{33}$$

$$\hat{\Xi}(\omega)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{3}}\,\frac{1}{(i\omega)^{3}\,\hat{\Pi}^{3}(\omega)},$$

przy czym $\hat{\Pi}(\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $\Pi(t)$.

Wykorzystując wzór na retransformatę (3) i własności (6), (7) i (9) uzyskuje się macierz rozwiązań podstawowych:

$$E(x_i,t)=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \tag{34}$$

o elementach:

$$\begin{aligned} E_{ij} \;=\; & \left[\mathrm{A}_{ij}\Phi(t)-\frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{B}_{ij}\Psi(t)+\frac{1}{\mathrm{a}^{2}}\mathrm{C}_{ij}\Xi(t)\right]*\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)\;+ \\ & -\left[\mathrm{A}_{ij}\Phi(t)-\frac{1}{\mathrm{b}}\mathrm{B}_{ij}\Psi(t)+\frac{1}{\mathrm{b}^{2}}\mathrm{C}_{ij}\Xi(t)\right]*\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)\;+\;\frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{D}_{ij}\Xi(t)\right]*\frac{\delta(t)}{x}, \end{aligned} \tag{35}$$

gdzie $\Phi(t)$, (t) i $\Xi(t)$ są odwrotnymi transformatami Fouriera funkcji $\hat{\Phi}(\omega)$, $\hat{}(\omega)$ i $\hat{\Xi}(\omega)$ postaci:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha+\beta}\{(\gamma-\lambda)\}\,\Gamma(t) \\ (t) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{(\alpha+\beta)^{2}}\left\{\left(\lambda^{2}-2\gamma\lambda\right)t+\left(\gamma^{2}+2\gamma-2\lambda\right)\right\}\Gamma(t) \\ \Xi(t) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2(\alpha+\beta)^{3}}\left\{\begin{aligned}&\left(6\gamma\lambda^{2}-6\gamma^{2}\lambda-\lambda\right)t^{2}+\\&+\left(6\gamma^{2}-12\gamma\lambda-6\lambda^{2}\right)t+\left(\gamma^{3}+6\gamma-6\lambda\right)\end{aligned}\right\}\Gamma(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Natomiast funkcje $\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)$ i $\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)$ oraz $\Gamma(t)$ zdefiniowane są następująco:

$$\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{4\pi t}{\mathrm{a}}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}\,(x_i x_i)}{4t}}, & dla\;\; t>0\\[2ex] 0, & dla\;\; t<0\end{cases}$$

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{4\pi t}{\mathrm{b}}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{b}\,(x_i x_i)}{4t}}, & dla\;\; t>0\\[2ex] 0, & dla\;\; t<0\end{cases}$$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & , \ dla \ \ t > 0 \\ 0 & , \ dla \ \ t < 0 \end{cases}, \qquad \lambda = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} .$$

3. Rozwiązanie ogólne

Określona wzorami (34) i (35) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 9 niezależnych dystrybucji i może posłużyć do wyznaczenia rozwiązania źródłowych zagadnień sprężonej termodyfuzji zgodnie z relacją

$$y = E * f \tag{37}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} y_i = & \left\{ \left[\mathrm{A}_{ij}\Phi(t) - \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{B}_{ij}\Psi(t) + \frac{1}{\mathrm{a}^2}\mathrm{C}_{ij}\Xi(t) \right] * \Gamma_{\mathrm{a}}(x_i, t) + \right. \\ & \left. - \left[\mathrm{A}_{ij}\Phi(t) - \frac{1}{\mathrm{b}}\mathrm{B}_{ij}\Psi(t) + \frac{1}{\mathrm{b}^2}\mathrm{C}_{ij}\Xi(t) \right] * \Gamma_{\mathrm{b}}(x_i, t) + \frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{D}_{ij}\Xi(t) \right] * \frac{\delta(t)}{|x|} \right\} * f_j . \end{aligned} \tag{38}$$

Pole przemieszczeń u_i uzyskuje się analizując transformatę Fouriera równania:

$$-\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu) * d\{y_l\}_{,i} + \gamma_S * d\{y_2\}_{,i} + \gamma_C * d\{y_3\}_{,i} = \rho F_i , \tag{39}$$

która ma postać:

$$\sqrt{2\pi}\left(\hat{\mu}\, i\omega\, s^2 \hat{u}_i - \left(\hat{\lambda}+\hat{\mu}\right) i\omega\, is_i\{\hat{y}_l\} + \hat{\gamma}_S\, i\omega\, is_i\{\hat{y}_2\} + \hat{\gamma}_C\, i\omega\, is_i\{\hat{y}_3\} \right) = \rho \hat{F}_i , \tag{40}$$

przy czym $\rho\hat{F}_i$ jest transformatą czynnika ρF_i .

Po wykonaniu transformat rozwiązań (38), podstawieniu do (40) i uporządkowaniu otrzymuje się następującą zależność:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = \frac{is_i}{s^2} & \left\{ \left[\mathrm{A}_j\hat{\Phi}(\omega) - \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{B}_j\hat{\Psi}(\omega) + \frac{1}{\mathrm{a}^2}\mathrm{C}_j\hat{\Xi}(\omega) \right] \frac{\mathrm{a}}{s^2 + \mathrm{a}\, i\omega} + \right. \\ & - \left[\mathrm{A}_j\hat{\Phi}(\omega) - \frac{1}{\mathrm{b}}\mathrm{B}_j\hat{\Psi}(\omega) + \frac{1}{\mathrm{b}^2}\mathrm{C}_j\hat{\Xi}(\omega) \right] \frac{\mathrm{b}}{s^2 + \mathrm{b}\, i\omega} + \\ & \left. + \left[\mathrm{D}_j\hat{\Xi}(\omega) \right] \frac{1}{s^2} \right\} \hat{f}_j + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mu_o} \frac{\rho\hat{F}_i}{i\omega s^2} \frac{1}{\hat{\Pi}(\omega)} , \end{aligned} \tag{41}$$

określającą transformatę pola przemieszczeń.

Stałe występujące w równości (41) określone są wzorami:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_j &= \frac{(\lambda_o+\mu_o)}{\mu_o}\mathrm{A}_{1j} - \frac{\gamma_S^o}{\mu_o}\mathrm{A}_{2j} - \frac{\gamma_C^o}{\mu_o}\mathrm{A}_{3j} \\
\mathrm{B}_j &= \frac{(\lambda_o+\mu_o)}{\mu_o}\mathrm{B}_{1j} - \frac{\gamma_S^o}{\mu_o}\mathrm{B}_{2j} - \frac{\gamma_C^o}{\mu_o}\mathrm{B}_{3j} \\
\mathrm{C}_j &= \frac{(\lambda_o+\mu_o)}{\mu_o}\mathrm{C}_{1j} - \frac{\gamma_S^o}{\mu_o}\mathrm{C}_{2j} - \frac{\gamma_C^o}{\mu_o}\mathrm{C}_{3j} \\
\mathrm{D}_j &= \frac{(\lambda_o+\mu_o)}{\mu_o}\mathrm{D}_{1j} - \frac{\gamma_S^o}{\mu_o}\mathrm{D}_{2j} - \frac{\gamma_C^o}{\mu_o}\mathrm{D}_{3j}.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Wykonując transformatę odwrotną wyrażenia (41) otrzymuje się odpowiednio dla układu równań zależność określającą pole przemieszczeń:

$$u_i = \frac{1}{8\pi^2}\left\{\Lambda_{j,i} * f_j + \Lambda\, \Gamma(t) * \frac{\delta(t)}{|x|} * \rho F_i\right\} \tag{43}$$

lub w równoważnej postaci:

$$u_i = \frac{1}{8\pi^2}\left\{\Lambda_j * f_{j,i} + \Lambda\, \Gamma(t) * \frac{\delta(t)}{|x|} * \rho F_i\right\}, \tag{44}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_j = \sqrt{2\pi}\Bigg\{&\left[\mathrm{A}_j\Phi(t) - \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{B}_j\Psi(t) + \frac{1}{\mathrm{a}^2}\mathrm{C}_j\Xi(t)\right] * \Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t) + \\
&- \left[\mathrm{A}_j\Phi(t) - \frac{1}{\mathrm{b}}\mathrm{B}_j\Psi(t) + \frac{1}{\mathrm{b}^2}\mathrm{C}_j\hat{\Xi}(t)\right] * \Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)\Bigg\} * \frac{\delta(t)}{|x|} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{D}_j\Xi(t)\right] * |x|\delta(t)
\end{aligned}
$$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\mu_o}\frac{\gamma-\lambda}{\alpha+\beta}$$

4. Podsumowanie

Oprócz przedstawionego ujęcia termodyfuzji lepkosprężystej przeanalizowano dodatkowo układy równań:

$$
\begin{aligned}
&-\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu)* du_{j,ji} + \gamma_T * d\theta_{,i} + \gamma_C * dc_{,i} = \rho F_i \\
&\rho T_o \frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T * du_{j,j} + \mathrm{m} * d\theta + 1 * dc\right] - k_1 \theta_{,ii} = \rho r_1 \\
&\rho \dot{c} + k_2\left[\gamma_C * du_{j,j} + 1 * d\theta + \mathrm{n} * dc\right]_{,ii} = \rho r_2
\end{aligned}
\tag{45}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&-\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu)* du_{j,ji} + \gamma_T * d\theta_{,i} + \gamma_M * dM_{,i} = \rho F_i \\
&-\rho T_o \frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T * du_{j,j} + \mathrm{m} * d\theta + 1 * dM\right] - k_1 \theta_{,ii} = \rho r_1 \\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_M * du_{j,j} + 1 * d\theta + \mathrm{n} * dM\right] - k_2 M_{,ii} = \rho r_2
\end{aligned}
\tag{46}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&-\mu * du_{i,jj} - (\lambda+\mu)* du_{j,ji} + \gamma_T * d\theta_{,i} + \gamma_M * dM_{,i} = \rho F_i \\
&-\rho T_o \frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T * du_{j,j} + \mathrm{m} * d\theta + 1 * dM\right] - k_1 \theta_{,ii} = \rho r_1 \\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_M * du_{j,j} + 1 * d\theta + \mathrm{n} * dM\right] - k_2 M_{,ii} = \rho r_2 ,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

określające również charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola przemieszczeń. Wynikają one z różnych ujęć termodynamicznych problemu i ze sposobu oddziaływania pól rozpatrywanego zagadnienia. W układach tych jako niewiadome występują odpowiednio temperatura, koncentracja, entropia i potencjał chemiczny oraz pole przemieszczeń. W wyniku analogicznych przekształceń uzyskuje się rozwiązania układów równań (45), (46) i (47), które mają identyczną postać jak w przypadku układu (1), przy czym współczynniki A_j, B_j, C_j i D_j oraz a i b zależą bezpośrednio od współczynników występujących w odpowiednich układach i w odmienny sposób niż w omówionym zadaniu. Oczywiście, również funkcje $\Phi(t)$, (t) i $\Xi(t)$ będą zależne w różny sposób od funkcji $\Pi(t)$.

LITERATURA

1. Domański Z., Piskorek A.: Matrices of fundamental solutions for the system of quasi-static equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses., AMS 23,2,1971.

2. Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids., SGT 8,2,1986.
3. [3] Wieczorek B.: Rozwiązania fundamentalne zagadnienia quasi-statycznego termodyfuzji sprężystej., ZN Pol.Śl., s.Budownictwo, z.84, Gliwice 1997.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał
Prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

The problem of statical convoluted viscoelastic thermodiffusion in described with the system of fine partial differential equations of the second order, describing character of mutual reaction of the heat, diffusion and stress fields. There was four different forms of these equations systems, resulted of the way of fields reactions.

There was presented the method of the solution for one of the equations' system. With the Fourier transformation, its propertied and theory of distribution was build a fundamental solution of that system. On their basis was obtained the solution of the basic system.

Per analogy the solution was obtained for two rest equation systems which describe the thermodiffusion problem.