ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: GÓRNICTWO z. 138 Nr kol. 840

Bernard DRZĘŹLA

Aleksander MENDECKI

ZASTOSOWANIE UÓGOLNIONEJ ODWROTNOŚCI MOORE'A-PENROSEGO DO LOKALIZACJI OGNISK WSTRZĄSÓW

Streszczenie. Zadanie wyznaczania współrzędnych ognisk wstrząsów, rozwiązywane w tak zwanym procesie joint hypocentre location (wspólnej lokalizacji ognisk) sprowadzono, drogą odpowiednich przekształceń, do wielokrotnego rozwiązywania układów równań liniowych z elementami nadliczbowymi. Wykorzystano tu uogólnioną odwrotność Moore'a-Penrosego, podano jej własności oraz przykład zastosowania w algorytmie jednoczesnej lokalizacji zdarzeń sejsmicznych dla górotworu sejsmicznie anizotropowego.

1. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O UOGÓLNIONEJ ODWROTNOŚCI MACIERZY

Uogólnioną odwrotnością (lub g - odwrotnością) macierzy A stopnia $m \times n$ nazywamy taką macierz A^{-} stopnia $n \times m$, dla której wektor $X = A^{-}Y$ jest rozwiązaniem równania $AX = Y$ lub dla której zachodzi związek $AA^{-}A = A$, Rao [10].

Rozpatrzmy równanie

$$AX = Y; \tag{1.1}$$

gdzie: A jest macierzą $m \times n$ dowolnego rzędu. Jest oczywistym, że istnieje rozwiązanie równania $AX = a_i$, gdzie a_i jest i-tą kolumną macierzy A, które można zapisać umownie $X = A^{-}a_i$.

Z rozwiązania tego wynika, że $AA^{-}a_i = a_i$, co, uwzględniając, że spełniane jest dla każdego i, prowadzi do związku:

$$AA^{-}A = A \tag{1.2}$$

Z zależności (1.2) widać, że jeśli macierz A^{-} istnieje, to: $AA^{-}AX = AX$, czyli $AA^{-}Y = Y$, czyli $X = A^{-}Y$ jest rozwiązaniem równania (1.1). Można dowieść [10], że macierz A^{-} istnieje i że rząd $A^{-} \geqslant$ rząd A.

Definicja g-odwrotności nie określa macierzy A^{-} w sposób jednoznaczny. Często nakładane są dla wielu zastosowań pewne dodatkowe warunki, tak jak w przypadku Moore'a [5] i Penrosego [7], którzy określili uogólnioną macierz odwrotną A^{o} o następujących własnościach:

$$AA^oA = A; \qquad A^oAA^o = A^o;$$
$$(AA^o)^T = AA^o; \qquad (A^oA)^T = A^oA; \tag{1.3}$$

Każda macierz A stopnie $m \times n$ ma dokładnie jedną odwrotność Moore'a-Penrosego (MP-odwrotność) A^o stopnia $n \times m$. Łatwo wykazać, że A^{-1} spełnia wszystkie warunki (1.3).

Peters i Wilkinson [8] wykazali, że MP-odwrotność dowolnej macierzy prostokątnej A można określić w naturalny sposób, jako takę macierz, która między macierzami A^- minimalizującymi normę euklidesową $\|b - AA^-b\|$, gdzie b jest wektorem kolumnowym, ma najmniejszą normę.

Przyjęcie więc rozwiązania $x = A^ob$, układu równań liniowych o elementach nadliczbowych, to jest układu, w którym liczba równań jest większa niż rząd macierzy $A(m > rz)$ a także rząd macierzy $[Ab]$ jest większy niż rząd macierzy $A(rz' > rz)$, oznacza znalezienie takiego x, dla którego suma kwadratów odchyłek równań jest najmniejsza. Jest to zatem rozwiązanie w sensie najmniejszych kwadratów.

Dla macierzy prostokątnej A stopnia $m \times n$, gdzie $m > n$, o rzędzie zupełnym, $rz = n$, MP-odwrotność można obliczyć bezpośrednio ze wzoru, Nashed [6].

$$A^o = (A^TA)^{-1}A^T, \tag{1.4}$$

gdzie A^TA jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą nieosobliwą rzędu n. Rozwiązanie układu równań liniowych z elementami nadliczbowymi będzie miało wtedy postać:

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb \tag{1.5}$$

W przypadku, gdy rząd macierzy podstawowej układu równań liniowych A jest mniejszy od liczby niewiadomych $(rz < n)$ oraz mniejszy od liczby równań $(rz < m)$, przy $(rz' > rz)$, można skorzystać z wyprowadzonej przez geodetę szwedzkiego Bjerhonunara odwrotności N^o macierzy osobliwej:

$N = A^TA$, dla $d = n - rz > 0$; $N^o = N(NN)^{-1}_o$, z czego wynika, że

$$A^o = N^oA^T = N(NN)^{-1}_oA^T \tag{1.6}$$

Macierz N, jak również macierz NN są osobliwe, celem więc obliczenia odwrotności $(NN)^{-1}$ należy znaleźć podmacierz nieosobliwą rzędu rz i po jej odwróceniu tak uzyskaną macierz uzupełnić zerami do wymiarów tabeli NN, co sygnalizuje oznaczenie NN^{-1}_o, Prószyński [9].

2. ALGORYTM WSPÓLNEJ LOKALIZACJI WSTRZĄSÓW W OŚRODKU ANIZOTROPOWYM Z WYKORZYSTANIEM MP-ODWROTNOŚCI

Zakłada się, że w górotworze, w dwóch prostopadłych kierunkach można wyróżnić maksymalną i minimalną wartość prędkości fali P a czoło tej fali jest w każdej chwili elipsoidą, której osie mają kierunek zgodny z kierunkami wyróżnianych prędkości. Oznacza to, że przyjęty model opisują 4 parametry anizotropii:

v_1, v_3 – ekstremalne wartości prędkości fali P

oraz

φ, ϑ – kąty określające kierunki osi elipsoidy.

Z obliczeń opartych na praktycznych rejestracjach wstrząsów w kopalniach wynika, że tak przyjęty model sejsmiczny górotworu daje wyniki lokalizacji tak samo dokładne jak model 6-parametrowy, Drzężla, Mendecki [2], zapewnia jednak bliższe rzeczywistości, w sensie fizycznym wartości wyznaczanych w procesie lokalizacji parametrów anizotropii prędkości fal sejsmicznych. Wynika to z faktu, że wraz ze wzrostem liczby wyznaczanych parametrów w procesie obliczeń pogarsza się numeryczna poprawność, stabilność oraz uwarunkowanie stosowanych algorytmów.

Dla opisanego wyżej modelu górotworu można napisać następujący układ równań stacyjnych:

$$\frac{(x'_{oi} - x'_j)^2}{v_1^2(t_{ij} - t_{oi})^2} + \frac{(y'_{oi} - y'_j)^2}{v_1^2(t_{ij} - t_{oi})^2} + \frac{(z'_{oi} - z'_j)^2}{v_3^2(t_{ij} - t_{oi})^2} = 1, \qquad (2.1)$$

gdzie:

$x'_{oi}, y'_{oi}, z'_{oi}$ – współrzędne ogniska i-tego wstrząsu, w nowym, określonym przez kierunki anizotropii układzie współrzędnych;

t_{oi} – czas powstania ogniska i-tego wstrząsu;

x'_j, y'_j, z'_j – współrzędne w układzie kierunków anizotropii, j-tego stanowiska sejsmometru;

t_{ij} – czas wejścia fali P do j-tego stanowiska w przypadku i-tego wstrząsu;

v_3, v_1 – prędkości fali P w wyznaczanych kierunkach anizotropii;

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\sin\vartheta;$$
$$y' = x\sin\varphi\cos\vartheta + y\cos\varphi\cos\vartheta + z\sin\vartheta \qquad (2.2)$$
$$z' = z\cos\vartheta;$$

φ, ϑ – kąty precesji i nutacji Eulera (kąt właściwego obrotu Ψ przyjmujemy równy 0), określające obrót podstawowego układu współrzędnych do wyznaczanych kierunków anizotropii;

$i = 1,2,\ldots,w$; w – liczba wspólnie lokalizowanych wstrząsów,

$j = 1,2,\ldots,s$; s – maksymalna liczba stanowisk sejsmometrów, które zarejestrowały jeden z lokalizowanych wstrząsów.

W celu wyeliminowania niewiadomych współrzędnych ognisk wstrząsu w kwadracie, odejmujemy stronami równanie dla k-tego stanowiska od pozostałych równań, przy czym k może być różne dla różnych wstrząsów.

Po wykonaniu wskazanych działań oraz przyjęciu poniższych oznaczeń otrzymamy, dla i-tego wstrząsu układ $s-1$ równań liniowych ze względu na x_{oi}, y_{oi}, z_{oi} oraz t_{oi}:

$$w_1X_j'x_{oi}' + w_1Y_j'y_{oi}' + w_3Z_j'z_{oi}' + T_{ij}t_{oi} = R_{ij}' \tag{2.3}$$

gdzie:

$$X_j' = 2(x_k' - x_j'); \quad Y_j' = 2(y_k' - y_j'); \quad Z_j' = 2(z_k' - z_j');$$

$$T_{ij} = 2(t_{ij} - t_{ik}); \quad w_1 = \frac{1}{v_1^2}; \quad w_3 = \frac{1}{v_3^2}$$

$$R_{ij}' = w_1(x_k'^2 - x_j'^2) + w_1(y_k'^2 - y_j'^2) + w_3(z_k'^2 - z_j'^2) + t_{ij}^2 - t_{ik}^2$$

$$i = 1,2,\ldots,w; \quad j = 1,2,\ldots,s; \quad j \neq k; \quad s \geqslant 5.$$

Proces wspólnej lokalizacji wstrząsów (joint hypocentre location) polega na tym, że z układu (2.3), rozwiązanego z zastosowaniem MP-odwrotności, otrzymujemy rozwiązania jawne na x_{oi}, y_{oi}, z_{oi} oraz t_{oi}, które są oczywiście funkcjami parametrów anizotropii. Następnie tworzymy funkcję strat (błędu lokalizacji), jako sumę kwadratów różnic niespełnienia wyjściowego układu (2.1) po wszystkich stanowiskach i po wszystkich wstrząsach, w której te jawne rozwiązania występują i minimalizujemy ją ze względu na parametry anizotropii. Wartości tych parametrów, które zapewniają minimum funkcji strat dają tym samym, po uwzględnieniu ich w jawnych rozwiązaniach na x_{oi}, y_{oi}, z_{oi} oraz t_{oi}, ostateczne rozwiązanie lokalizacji grupy wstrząsów, a wyznaczane parametry anizotropii można, w zależności od jakości i liczby danych, traktować jako średnie reprezentatywne dla danego rejonu. Jak z tego wynika, proces minimalizacji funkcji strat przebiega w czterowymiarowej przestrzeni parametrów anizotropii, a w każdym kroku poszukiwania minimum należy oprócz transformacji układu współrzędnych, według wzorów (2.2) rozwiązać dla każdego wstrząsu układ (2.3). W przypadku, gdy liczba stanowisk sejsmometrów, która zarejestrowała każdy z wstrząsów spełnia warunek $s \geqslant 5$, to układ (2.3) jest układem o rzędzie zupełnym, a w przypadku, gdy $s > 5$, to układem o rzędzie zupełnym z elementami nadliczbowymi. Rozwiązanie takiego układu, w sensie najmniejszych kwadratów zapewnia wzór (2.3) w postaci macierzowej:

$$A'_i H'_i = b'_i \tag{2.4}$$

gdzie:

A'_i - jest macierzą prostokątną (w szczególności kwadratową) stopnia $s_i \times 4$, a s_i - oznacza liczbę stanowisk sejsmometrów, na których został zarejestrowany i-ty wstrząs:

$$A_i = \begin{bmatrix} w_1 X'_1 & w_1 Y'_1 & w_3 Z'_1 & T_{i1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 X'_{s_i-1} & w_1 Y'_{s_i-1} & w_3 Z'_{s_i-1} & T_{i,s_i-1} \end{bmatrix}$$

$$H'_i = \left[x'_{oi},\ y'_{oi},\ z'_{oi},\ t_{oi}\right]^T \tag{2.5}$$

$$b'_i = \left[R'_{i1}, \ldots, R_{i,s_i-1}\right]^T$$

Rozwiązania układu (2.4) można dokonać w oparciu o wzór (1.5) - są one funkcjami w_1, w_3, φ oraz ϑ i można je zapisać w postaci:

$$H'_i(w_1, w_3, \varphi, \vartheta) = (A'_i)^o b'_i = \left[(A'_i)^T A'_i\right]^{-1} (A'_i)^T b'_i \tag{2.6}$$

Otrzymane rozwiązanie lokalizacji i-tego wstrząsu, jako funkcji parametrów przyjętego modelu anizotropii, wprowadzane jest do tworzonej numeryczne funkcji strat zdefiniowanej następująco:

$$L(w_1, w_3, \varphi, \vartheta) = \sum_{i=1}^{w} \sum_{j=1}^{s_i} \left[\sqrt{w_1(x'_{oi}-x'_j)^2 + w_1(y'_{oi}-y'_j)^2 + w_3(z'_{oi}-z'_j)^2} - (t_{ij}-t_{oi})\right]^2 \tag{2.7}$$

Minimum funkcji (2.7), dając najlepsze wartości parametrów modelu, zapewnia wzorami (2.6) rozwiązanie zadania lokalizacji; natomiast wyznaczane kierunki anizotropii oraz ekstremalne wartości prędkości fali P w tych kierunkach, a zwłaszcza ich zmiany w czasie, mogą być cenną wskazówką dla oceny stanu górotworu.

Jak wynika z układu (2.4) minimalna liczba stanowisk, na których zarejestrowany jest jakikolwiek ze wspólnie lokalizowanych wstrząsów wynosi 5. Pozostaje do określenia konieczna liczba wspólnie lokalizowanych wstrząsów z danego rejonu (grupa wstrząsów), która przy rejestracjach każdego zdarzenia na s_i stanowiskach, $s_i \geqslant 5$, spełni nierówność: sumaryczna liczba równań $= \sum_{i=1}^{w} s_i$ musi być większa lub równa liczbie niewiadomych $= 4w + 4$;

$$\sum_{i=1}^{w} s_i - 4w - 4 \geqslant 0; \quad \text{przy } s_i \geqslant 5 \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,s \tag{2.8}$$

Jak łatwo zauważyć, zależność (2.8) jest spełniona, przy rejestracjach 4 wstrząsów na 5 stanowiskach sejsmometrów.

W przypadku, gdy w procesie lokalizacji wyznaczamy tylko wartości v_1 i v_3 dla zadanych (znanych) kierunków anizotropii, relacja (2.8) przyjmie postać:

$$\sum_{i=1}^{w} s_i - 4w - 2 \geqslant 0 \tag{2.9}$$

3. PROBLEMY NUMERYCZNE ZWIĄZANE Z REALIZACJĄ PRZEDSTAWIONEGO ALGORYTMU

Praktyczna realizacja omówionego algorytmu, zwłaszcza przy korzystaniu z maszyny cyfrowej, może napotkać na następujące problemy natury numerycznej:

1) złe uwarunkowanie zadania;

2) numeryczna poprawność oraz stabilność zbudowanego algorytmu;

3) sposób obliczania macierzy $\left[(A_i')^T A_i\right]^{-1}$ - wzór (2.6);

4) możliwość pojawienia się wśród wspólnie lokalizowanych wstrząsów takiego, dla którego dane (czasy wejścia fali P) obarczone są wyjątkowo dużym błędem (pomyłka, nieczytelna rejestracja itp.);

5) złożony, w sensie numerycznego poszukiwania minimum, kształt funkcji strat lub wielość jej minimów.

Ad 1. Niekorzystne położenia analizowanej grupy wstrząsów względem sieci stanowisk rejestrujących lub błędy w odczytach czasów mogą spowodować, że rozwiązywany wielokrotnie układ (2.4) będzie źle uwarunkowany. Oznacza to, że niewielka względna zmiana danych, np. na skutek zaokrągleń w procesie obliczeń, może spowodować duże zmiany względne rozwiązania. Miarą (wskaźnikiem) uwarunkowania układu równań liniowych jest wartość iloczynu normy uogólnionej odwrotności macierzy podstawowej układu przez normę tej macierzy, czyli tzw. condition:

$$\mathrm{cond}(A_i') = \|A_i'\| \cdot \|(A_i')^{o}\| = \|A_i'\| \, \| \left[(A_i')^T A_i'\right]^{-1} (A_i')^T \| \tag{3.1}$$

gdzie symbol $\|\circ\|$ może oznaczać jedną z norm wektorowych Höldera. W tym przypadku proponuje się przyjąć normę euklidesową macierzy, tzn. liczbę rzeczywistą nieujemną taką, że:

$$\|A_i'\|^2 = \sum_{p=1}^{s_i-1} \sum_{q=1}^{4} \left|a'_{i,p,q}\right|^2 = T_r\left[A_i'(A_i')^T\right], \tag{3.2}$$

gdzie:

$a'_{i,p,q}$ - elementy macierzy A_i'.

Można wykazać, Dryja i inni [3], że za względu na błąd reprezentacji danych w arytmetyce zmiennopozycyjnej, celowe jest rozwiązywanie jedynie tych układów, dla których wskaźnik uwarunkowania jest mniejszy od 2^t, gdzie t jest liczbą cyfr binarnych przeznaczonych na reprezentację mantysy. Jeżeli więc w procesie obliczeń część z analizowanych wstrząsów nie spełnia tej relacji lub też gdy ich wartości $\mathrm{cond}(A_i')$ są duże, w porównaniu z wartościami dla pozostałych wstrząsów, to przy tworzeniu funkcji strat można wprowadzić wagę, która będzie odwrotnością wskaźnika uwarunkowania układu (2.4) dla danego wstrząsu. W przypadku gdy wszystkie wspólnie lokalizowane wstrząsy charakteryzują się dużymi wartościami wskaźnika uwarunkowania, należy przeanalizować geometrię stanowisk względem rozpatrywanego rejonu wstrząsów. W miarę możliwości należy wybrać inną konfigurację stanowisk rejestrujących lub przeprowadzić przebudowę sieci tak, aby otrzymywać w danym rejonie małe wartości cond (A_i'). Jeżeli zmiana geometrii stanowisk względem rejonu jest niemożliwa, można próbować poprawić uwarunkowanie zadania przez tzw. skalowanie układu. Polega ono na skonstruowaniu takich macierzy diagonalnych D_1 i D_2 aby wskaźnik uwarunkowania, cond $(D_1 A_i' D_2)$ był możliwie mały.

W szczególnym przypadku może to być jedna macierz diagonalna D. Smith [11] wykazuje, że rolę macierzy skalującej może spełniać taki dobór jednostek, w których podajemy dane (czasy wejścia fali i współrzędne stanowisk), aby elementy macierzy podstawowej układu były rzędu 1.

Ad 2. Nie zawsze jednak układy równań dobrze uwarunkowane mają wektor residualny, w tym przypadku $r_i = (A_i' H_i' - b_i')$, mały, spełniający warunek algorytmu numerycznie poprawnego, tzn. takiego, dla którego zachodzi nierówność:

$$\|r_i\| \leqslant k\, 2^t \, \|A_i'\| \, \|H_i'\| , \tag{3.3}$$

gdzie: k ma być najwyżej rzędu s_i^3.

Z kolei, z dwóch algorytmów numerycznie poprawnych, spełniających warunek (3.3), wektor residualny o mniejszej normie nie zawsze odpowiada dokładniejszemu rozwiązaniu. Często, wobec trudności zbudowania algorytmu numerycznie poprawnego zachodzi pytanie, jakie minimalne wymagania należy postawić przed danym algorytmem. Otóż konieczną własnością algorytmu jest ograniczoność utraty dokładności rozwiązania w stosunku do możliwości stosowanej arytmetyki, tzn. obliczone rozwiązanie powinno być tak dokładne na ile pozwala przybliżona reprezentacja danych i wyniku.

Własność ta nazywana jest numeryczną stabilnością algorytmu i w przypadku układów równań liniowych są to rozwiązania spełniające, dla omawianego tu przykładu, nierówność [3]:

$$\frac{\|H_i' - \alpha\|}{\|\alpha\|} \leqslant \frac{k\, 2^{-t} \operatorname{cond}(A_i')}{1 - k\, 2^{-t} \operatorname{cond}(A_i')}, \tag{3.4}$$

gdzie α jest rozwiązaniem dokładnym; k rzędu co najwyżej s_i^3.
Dla wstrząsów bardzo źle uwarunkowanych, gdzie $\operatorname{cond}(A_i') \cong 2^t$, błąd (3.4) może być bliski jedności.

Ad 3. Jedna z metod obliczania macierzy $\left[(A_i')^T A_i'\right]^{-1}$ polega na obliczeniu najpierw macierzy $(A_i')^T A_i'$, a następnie na jej odwróceniu. Można to jednak zrobić bezpośrednio, korzystając z twierdzenia o sprowadzaniu macierzy do postaci trójkątnej za pomocą macierzy ortogonalnej: $A_i' = Q_i' R_i'$, gdzie Q_i' jest macierzą ortogonalną $m \times n$, a R_i' macierzą górną trójkątną $n \times m$. Można wykazać, że:

$$\left[(A_i')^T A_i'\right]^{-1} = (R_i')^{-1} \left[(R_i')^T\right]^{-1} \tag{3.5}$$

Rozkładu ortogonalno-trójkątnego macierzy A można dokonać metodami Cholesky'ego-Banachiewicza (około $\frac{1}{6} n^3$ działań), Grama-Schmidta (około $m \times n^2$ działań), przekształceń Householdera ($mn^2 - \frac{1}{3} n^3$ działań) oraz obrotów Givensa. Metoda Grama-Schmidta jest numerycznie stabilna, natomiast metoda Householdera oraz obrotów Givensa są numerycznie poprawne w klasie macierzy posiadających pełny rząd [13]. Odwracanie bezpośrednie, rozkład QR, zmniejsza z pierwiastkiem kwadratowym uwarunkowanie zadania.

Ad 4. W celu pomniejszenia wpływu wstrząsów obarczonych dużymi błędami na kształt funkcji strat, a tym samym na dokładność obliczeń, można zastosować odpowiednie ważenie tworzonej w sposób numeryczny funkcji (2.7). Błąd lokalizacji i-tego wstrząsu dla znanych, w danym kroku poszukiwania minimum, parametrów anizotropii wynosi:

$$B_i = \sum_{j=1}^{s}\left[\sqrt{w_1(x'_{oi}-x'_j)^2 + w_1(y'_{oi}-y'_j)^2 + w_3(z'_{oi}-z'_j)^2} - (t_{ij}-t_{oi})\right]^2 \tag{3.6}$$

Oznaczając przez: $A = \min(B_i)$; $B = \max(B_i)$ dla $i = 1,2,\ldots,w$, oraz $C = \frac{B-uA}{1-u}$, gdzie $0 \leqslant u \leqslant 1$, można jako wagę dla i-tego wstrząsu przyjąć iloraz

$$p_i = \frac{C - B_i}{C - A} \tag{3.7}$$

Przyjęcie takiej wagi oznacza, że wstrząs obarczany największym błędem otrzymuje wagę u, natomiast najmniejszym wagę 1.

Ważona funkcja strat (błędu) wyniesie wówczas:

$$WL = \frac{(B-uA)\sum\limits_{i=1}^{w} B_i - (1-u)\sum\limits_{i=1}^{w} B_i^2}{w(B-uA) - (1-u)\sum\limits_{i=1}^{w} B_i} \tag{3.8}$$

Ad 5. W każdym przypadku numerycznego budowania oraz dalej minimalizowania funkcji wielu zmiennych, w tym przypadku funkcji strat (2.7), pojawia się niebezpieczeństwo wielości minimów oraz skomplikowanych kształtów funkcji, co pomnaża liczbę kroków koniecznych do odnalezienia minimum. Z dotychczasowych doświadczeń autorów wynika, że w szerokim zakresie fizycznie możliwych parametrów anizotropii badane funkcje błędu lokalizacji mają jedno minimum. Z uwagi jednak na kształt ich warstwic zawodzą, najczęściej stosowane, proste metody poszukiwania minimum, np. metoda gradientu. Zadawalające wyniki, zarówno co do czasu obliczeń, jak i dokładności wyznaczenia minimum, uzyskano dopiero po zastosowaniu algorytmu gradientu sprzężonego Fletchera-Reevsa i metody kierunków sprzężonych Powella w połączeniu z metodą wąwozową Gelfanda-Cetlina. Dla porównania warto może powiedzieć, że przy stosowanej początkowo pewnej odmianie metody Gaussa-Seidela czas obliczeń na maszynie ODRA 1305 wynosił kilka godzin, podczas gdy obecnie wynosi kilka do trzydziestu kilku minut.

LITERATURA

[1] Bolt B.: Earthquake location for small networks using the generalized inverse matrix, Bull. Seism. Soc. Am. vol. 60, no. 6, 1823-1828, 1970.

[2] Drzężla B., Mendecki A.: Joint hypocentre location of mining tremors and determination of anisotropy parameters of P-wave velocity, Acta Geophysica Polonica, vol. 30, no. 4, 321-333, 1982.

[3] Dryja M., Jankowska I., Jankowski M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. II, WNT, Warszawa 1982, 13-29.

[4] Denner T.I., Loizon G.: Some new bounds of the condition numbers of optimally scaled matrices. J. ACM, 1974, no. 21, 514-524.

[5] Moore E.H.: General analysis, American Phil. Soc. Philadelphia,1935.

[6] Nashed M.Z.: Generalized inverses and applications. Proceedings of an Advaced Seminar, Univ. of Wisconsin-Madison 1973.

[7] Penrose R.: A generalized inverse for matrices. Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 406-413, 1955.

[8] Peters G., Wilkinson J.H.: The least squares problem and pseudoinverses. The Computer Journal, v. 13, no. 3, 309-316, 1970.

[9] Prószyński W.: Wprowadzenie do zastosowań odwrotności uogólnionej Moore's-Penrosego w wybranych zagadnieniach wyrównawczych, Geodezja i Kartografia, tom 30, z. 2, 123-130, 1981.

[10] Rao C.R.: Modele liniowe statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1982, 42-45.

[11] Smith E.G.C.: Scaling the equations of condition to improve conditioning. Bull Seism. Soc. Am., vol. 66, no. 6, 2075-2081, 1976.

[12] Warmus M.: Uogólnione odwrotności macierzy. PWN, Warszawa 1972.

[13] Wilkinson J.H., Reinsch C.: Handbook for automatic computation, vol. 2, Linear algebra. Springer 1971.

Recenzent: Prof. dr inż. Józef A. LEDWOŃ

Wpłynęło do Redakcji w lipcu 1984 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МУРА-ПЕНРОСА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОЧАГОВ ГОРНЫХ УДАРОВ

Р е з ю м е

Задача определения координат очагов сотрясений, решаемая в т.н. процессе общей локализации была сведена, через соответствующее преобразование, к многократному решению систем линейных уравнений, с превышающим сверх нормы количеством элементов. Использована здесь обобщённая обратная матрица Мура-Пенроса. Представлены её свойства а также приведён проимер применения в алгоритме одновременной локализации сейсмических явлений для сейсмически анизотропного горообразования.

APPLICATION OF GENERALIZED MOORE-PENROSE INVERSE FOR LOCATING TREMOR HYPOCENTRES

S u m m a r y

The problem of determining the coordinates of tremor foci, solved in the so-called joint hypocentre location, has been reduced, through suitable transformations, to multiple solution of linear equations system with supernumerary elements. A generalized Moore-Penrose inverse has been used here and its properties, as well as an example of its application in an algorithm of simultaneous location of seismic events for seismically anisotropic rock mass, have been given.