ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: BUDOWNICTWO z. 81 Nr kol.1292

Jadwiga JĘDRZEJCZYK - KUBIK

O PEWNYM SZCZEGÓLNYM ROZWIĄZANIU ZADANIA TERMODYFUZJI W CIELE LEPKOSPRĘŻYSTYM O TRANSWERSALNEJ IZOTROPII

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie szczególne równań termodyfuzji lepkosprężystej. Zadanie analizuje się dla ciał o transwersalnej izotropii w ramach teorii quasi-statycznej. Wprowadzając dwie niezależne funkcje będące potencjałem uogólnionych przemieszczeń, zadanie sprowadza się do rozprzężonych równań teorii naprężeń cieplnych.

ON THE PARTICULAR SOLUTION OF THE VISCOELASTIC THERMODIFFUSION PROBLEM

Summary. In the paper the proposition of particular solutions of the thermodiffusion equations in the transversely isotropic viscoelastic body is presented.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИФФУЗИИ В ВЯЗКО - УПРУГОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Резюме. В работе представлено частное решение уравнений линейной несвязанной квазистатической термодиффузи в перемещениях для трансверсально-изотропных вязкоупругих тел, содержащее симметричным образом две функции, определемые независимо одна от другой и удавлетворяющие уравнениям Пуассона.

1. WSTĘP

Termodyfuzja lepkosprężysta jest opisem procesu termodynamicznego związanego z wymianą masy, pędu i energii w ciele lepkosprężystym i prowadzi do złożonego układu równań różniczkowo - ałkowych. Trudności związane z całkowaniem tego układu równań, szczególnie w przypadku anizotropii, skłaniają do poszukiwania prostszych ujęć analizowanego problemu brzegowego. Jedną z takich propozycji w zakresie termosprężystości dla ciał transwersalno-izotropowych przedstawiono w pracach [1,5,7]. Metoda zaproponowana w [1] sprowadza układ trzech równań przemieszczeniowych zadań termosprężystości do rozsprzężonych równań teorii naprężeń cieplnych.

Niniejsza praca stanowi przeniesienie tej idei na zagadnienia termodyfuzji lepkosprężystej.

2. RÓWNANIA ZAGADNIENIA

Rozpatrzmy równania teorii naprężeń cieplno-dyfyzyjnych w ciele lepkosprężystym. W równaniach tych pola temperatur i koncentracji są funkcjami znanymi, wyznaczonymi z osobnych zadań brzegowych opisujących przewodzenie temperatury i przepływ masy. Natomiast równania fizyczne dla ciała lepkosprężystego, anizotropowego mają postać por. [3,4]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \Phi_{ij} * d\Theta - \Psi_{ij} * dc \tag{2.1}$$

W powyższym równaniu przyjęto następujące oznaczenia:

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,t)$ - tensor stanu naprężenia,

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x,t)$ - tensor stanu odkształcenia,

$E_{ijkl} = E_{ijkl}(t), \Phi_{ij} = \Phi_{ij}(t), \Psi_{ij} = \Psi_{ij}(t)$ - tensory funkcji relaksacji,

$\Theta = \Theta(\mathbf{x},t)$ - przyrost temperatury,

$c = c(\mathbf{x},t)$ - przyrost koncentracji,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - współrzędne punktu,

t - zmienna czasowa,

$*$ - splot Stieltjesa.

Rozpatrzmy ciało o transwersalnej izotropii [6]. Własności fizyczne takiego ciała pozostają niezmiennicze przy następującej transformacji współrzędnych:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \cos\vartheta + x_2 \sin\vartheta ,\\
x_2' &= -x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta ,\\
x_3' &= x_3 .
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Warunki (2.2) prowadzą do redukcji pól tensorowych $E_{ijkl}, \Phi_{ij}, \Psi_{ij}$. Niezerowymi będą:

$$
\begin{aligned}
&E_{1111}(t), E_{1122}(t), E_{1133}(t), E_{2222}(t) = E_{1111}(t),\\
&E_{2233}(t) = E_{1133}(t), E_{3333}(t), E_{2323}(t), E_{3131}(t) = E_{2323}(t),\\
&E_{1212}(t) = \frac{1}{2}\left(E_{1111}(t) - E_{1122}(t)\right),\\
&\Phi_{11}(t), \Phi_{22}(t) = \Phi_{11}(t), \Phi_{33}(t), \Psi_{11}(t), \Psi_{22}(t) = \Psi_{11}(t), \Psi_{33}(t).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Dla wygody wprowadzimy nowe oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
&E_{1111}(t) = C_{11}(t), \quad E_{1122}(t) = C_{12}(t), \quad E_{1133}(t) = C_{13}(t),\\
&E_{3333}(t) = C_{33}(t), \quad E_{1313}(t) = C_{44}(t),\\
&\Phi_{11}(t) = b_1(t), \ \Phi_{33}(t) = b_2(t), \ \Psi_{11}(t) = D_1(t), \ \Psi_{33}(t) = D_2(t).
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Związki konstytutywne (2.1) przyjmą więc postać:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}*d\varepsilon_{11} + C_{12}*d\varepsilon_{22} + C_{13}*d\varepsilon_{33} - b_1*d\Theta - D_1*dc ,\\
\sigma_{22} &= C_{12}*d\varepsilon_{11} + C_{11}*d\varepsilon_{22} + C_{13}*d\varepsilon_{33} - b_1*d\Theta - D_1*dc ,\\
\sigma_{33} &= C_{13}*d\varepsilon_{11} + C_{13}*d\varepsilon_{22} + C_{33}*d\varepsilon_{33} - b_2*d\Theta - D_2*dc ,\\
\sigma_{23} &= 2C_{44}*d\varepsilon_{23} ,\\
\sigma_{13} &= 2C_{44}*d\varepsilon_{13} ,\\
\sigma_{12} &= \left(C_{11} - C_{12}\right)*d\varepsilon_{12} .
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Z analizy równań (2.5) wynika podobieństwo wpływów cieplno-dyfuzyjnych.

Współrzędne tensora naprężenia (2.5), określone przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t), u_3(\mathbf{x},t))$ będą wynosiły:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}*du_{1,1} + C_{12}*du_{2,2} + C_{13}*du_{3,3} - b_1*d\Theta - D_1*dc ,\\
\sigma_{22} &= C_{12}*du_{1,1} + C_{11}*du_{2,2} + C_{13}*du_{3,3} - b_1*d\Theta - D_1*dc ,\\
\sigma_{33} &= C_{13}*d(u_{1,1} + u_{2,2}) + C_{33}*du_{3,3} - b_2*d\Theta - D_2*dc ,\\
\sigma_{23} &= C_{44}*d(u_{2,3} + u_{3,2}) ,\\
\sigma_{13} &= C_{44}*d(u_{1,3} + u_{3,1}) ,\\
\sigma_{12} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})*d(u_{1,2} + u_{2,1}) .
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

W powyższym $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Uwzględniając związki (2.6) w równaniach ruchu

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

otrzymamy równania przemieszczeniowe w termodyfyzji lepkosprężystej:

$$\begin{aligned}
&C_{11} * du_{1,11} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) * du_{1,22} + C_{44} * du_{1,33} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) * du_{2,12} + \\
&+(C_{13} + C_{14}) * du_{3,13} = b_1 * d\Theta_{,1} + D_1 * dc_{,1}, \\
&C_{11} * du_{2,22} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) * du_{2,11} + C_{44} * du_{2,33} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) * du_{1,21} + \\
&+(C_{13} + C_{14}) * du_{3,23} = b_1 * d\Theta_{,2} + D_1 * dc_{,2}, \\
&C_{44} * d(u_{3,11} + u_{3,22}) + C_{33} * du_{3,33} + (C_{13} + C_{44}) * d(u_{1,13} + u_{2,33}) = b_2 * d\Theta_{,3} + D_2 * dc_{,3}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Do przytoczonego układu równań należy dołączyć warunki brzegowe i początkowe:

$$u_i(x,t)\big|_{\partial\Omega} = \hat{u}_i(x,t), \qquad u_i(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{2.8}$$

3. POTENCJAŁY W TRANSWERSALNO - IZOTROPOWEJ LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

Przez wprowadzenie potencjałów

$$u^{\bullet}_m = \Phi^1_{,m} + \Phi^2_{,m}, \quad u^{\bullet}_3 = h^1 * d\Phi^1_{,3} + h^2 * d\Phi^2_{,3}, \qquad m = 1,2 \tag{3.1}$$

sprowadzimy układ transwersalnej izotropii do uogólnionych równań teorii potencjału w postaci:

$$\Delta_2\Phi^n + k^n * d\Phi^n_{,33} = \beta^n * dT, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad n = 1,2, \tag{3.2}$$

w której funkcje h^1, h^2, k^1, k^2, β^1, β^2 dobieramy z rozwiązania stowarzyszonego układu równań. Układ ten wynika z warunków sprowadzenia wyjściowego układu równań przemieszczeniowych transwersalnej izotropii do równań postaci (3.2).

$$
\begin{aligned}
&C_{11}*du_{1,11}+\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})*du_{1,22}+C_{44}*du_{1,33}+\\
&+\frac{1}{2}(C_{11}+C_{12})*du_{2,12}+(C_{13}+C_{44})*du_{3,13}=b_1*dT_{,1}\\
&C_{11}*du_{2,22}+\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})*du_{2,11}+C_{44}*du_{2,33}+\\
&+\frac{1}{2}(C_{11}+C_{12})*du_{1,21}+(C_{13}+C_{44})*du_{3,23}=b_1*dT_{,2}\\
&C_{44}*d(u_{3,11}+u_{3,22})+C_{33}*du_{3,33}+(C_{13}+C_{44})*d(u_{1,13}+u_{2,23})=b_2*dT_{,3}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

W równaniach tych poszukiwane są współrzędne wektora przemieszczeń u_1 , u_2 , u_3 . Występujące po prawej stronie układu (3.3) pole $b_1*dT_{,1}$, $b_1*dT_{,2}$, $b_2*dT_{,3}$ oznacza wpływ pola temperatury. Łatwo zauważyć, że w miejsce pola temperatury można podstawić każdy z wpływów o charakterze dystorsji, który posiada potencjał.

Podstawiając przemieszczenia (3.1) określone przez potencjały Φ^1 i Φ^2 do równań (3.3) otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&\Big[C_{11}*d\left(\Phi^1_{,11}+\Phi^2_{,11}\right)+\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})*d\left(\Phi^1_{,22}+\Phi^2_{,22}\right)+\\
&+C_{44}*d\left(\Phi^1_{,33}+\Phi^2_{,33}\right)+\frac{1}{2}(C_{11}+C_{12})*d\left(\Phi^1_{,22}+\Phi^2_{,22}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left(h^1*d\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)-b_1*dT\Big]_{,1}=0\\
&\Big[C_{11}*d\left(\Phi^1_{,22}+\Phi^2_{,22}\right)+\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})*d\left(\Phi^1_{,11}+\Phi^2_{,11}\right)+\\
&+C_{44}*d\left(\Phi^1_{,33}+\Phi^2_{,33}\right)+\frac{1}{2}(C_{11}+C_{12})*d\left(\Phi^1_{,11}+\Phi^2_{,11}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left(h^1*d\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)-b_1*dT\Big]_{,2}=0\\
&\Big\{C_{44}*d\left(h^1*d\Phi^1_{,11}+h^2*d\Phi^2_{,11}\right)+C_{44}*d\left(h^1*d\Phi^1_{,22}+h^2*d\Phi^2_{,22}\right)+\\
&+C_{33}*d\left(h^1*d\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left[\left(\Phi^1_{,11}+\Phi^2_{,11}\right)+\left(\Phi^1_{,22}+\Phi^2_{,22}\right)\right]-b_2*dT\Big\}_{,3}=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Dalsze przekształcenia prowadzą do układu równań:

$$
\begin{aligned}
&\Big[C_{11}*d\left(\Phi^1_{,\alpha\alpha}+\Phi^2_{,\alpha\alpha}\right)+C_{44}*d\left(\Phi^1_{,33}+\Phi^2_{,33}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left(h^1*d\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)-b_1*dT\Big]_{,1}=0\\
&\Big[C_{11}*d\left(\Phi^1_{,\alpha\alpha}+\Phi^2_{,\alpha\alpha}\right)+C_{44}*d\left(\Phi^1_{,33}+\Phi^2_{,33}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left(h^1*d\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)-b_1*dT\Big]_{,2}=0\\
&\Big[C_{44}*d\left(h^1*d\Phi^1_{,\alpha\alpha}+h^2*d\Phi^2_{,\alpha\alpha}\right)+C_{33}*d\left(h^1*\Phi^1_{,33}+h^2*d\Phi^2_{,33}\right)+\\
&+(C_{13}+C_{44})*d\left(\Phi^1_{,\alpha\alpha}+\Phi^2_{,\alpha\alpha}\right)-b_2*dT\Big]_{,3}=0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

gdzie $\Phi_{,\alpha\alpha} = \Phi_{,11} + \Phi_{,22}$.

Równania powyższe będą spełnione, jeżeli:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=2}^{2} \left\{ C_{11} * \Delta_2 d\Phi^\alpha + \left[C_{44} + h^\alpha * d(C_{13} + C_{44}) \right] * d\Phi^\alpha_{,33} - b_1 * dT \right\} = 0 \\ &\sum_{\alpha=2}^{2} \left\{ \left[C_{13} + C_{44} + C_{44} * dh^\alpha \right] * \Delta_2 d\Phi^\alpha + C_{33} * dh^\alpha * d\Phi^\alpha_{,33} - b_2 * dT \right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Porównując równania (3.6) i (3.2) otrzymamy następujące warunki:

$$\begin{aligned} k^\alpha * dC_{11} &= C_{44} + h^\alpha * d(C_{13} + C_{44}) && \alpha = 1,2 \\ k^\alpha * d(C_{13} + C_{44} + C_{44} * dh^\alpha) &= C_{33} * dh^\alpha && \alpha = 1,2 \\ b_1 &= (\beta^1 + \beta^2) * dC_{11} \\ b_2 &= \sum_{\alpha=1}^{2} (C_{13} + C_{44} + C_{44} * dh^\alpha) * d\beta^\alpha \end{aligned} \tag{3.7}$$

Spełnienie warunków (3.7) zapewnia równoważność początkowego układu równań przemieszczeniowych ciała lepkosprężystego o transwersalnej izotropii z równaniami postaci (3.2), w których należy określić funkcje k^α, β^α i h^α dla $\alpha = 1,2$.

Znajomość h^α pozwala wyznaczyć k^α z równań $(3.7)_1$, a β^α z następującego układu:

$$\begin{aligned} &\beta^\alpha * d(h^\gamma - h^\alpha) * dC_{11} * dC_{44} = + \\ &+ b_1 * d(C_{13} + C_{44} + C_{44} * dh^\gamma) - b_2 * dC_{11} \qquad \alpha \neq \gamma, \quad \alpha, \gamma = 1,2 . \end{aligned} \tag{3.8}$$

otrzymanego z $(3.7)_3$ i $(3.7)_4$.

W celu wyznaczenia h^α obliczmy transformatę Laplace'a równań $(3.7)_1$ i $(3.7)_2$ i wyeliminujmy z nich k^α. Otrzymamy:

$$\left(\hat{h}^\alpha\right)^2 + \left[2 + \frac{\left(\overline{C}_{13}\right)^2 - \overline{C}_{11}\overline{C}_{33}}{\overline{C}_{44}\left(\overline{C}_{13} + \overline{C}_{44}\right)} \right] \hat{h}^\alpha + 1 = 0 \tag{3.9}$$

gdzie $\overline{C}_{ij}$ oznacza transformatę Laplace'a funkcji C_{ij} (t), $\hat{h}^\alpha = p\overline{h}^\alpha$, a p jest parametrem transformacji.

Pierwiastki powyższego równania mają postać

$$\hat{h}_{1,2} = 1 + \frac{1}{2a}\left[-(B + 4a) \pm \sqrt{B(B + 4a)} \right] \tag{3.10}$$

gdzie: $a = \overline{C}_{44}\left(\overline{C}_{13} + \overline{C}_{44}\right)$ a $B = \overline{C}_{13}^2 - \overline{C}_{11}\overline{C}_{33}$.

Interesujący jest przypadek, gdy $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$. Wówczas $\hat{h}_1 = \hat{h}_2 = 1$, a funkcje θ^1 i θ^2 związane są z przemieszczeniami zależnością

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= \vartheta^1_{,\alpha} + x_3\vartheta^2_{,\alpha} \qquad \alpha = 1,2 \\
u_3 &= \vartheta^1_{,3} + x_3\vartheta^2_{,3} - w * d\vartheta^2_{,3}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Przemieszczenie $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, określone wzorami (3.2), (3.8), (3.10) jest całką szczególną równań (2.7). Dla obszaru nieskończonego całka ta jest rozwiązaniem ostatecznym.

Podstawiając (3.1) w (2.6) i uwzględniając (3.2) otrzymamy następujące związki określające naprężenia

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\sum_{j=1}^{2}\left[(C_{11} - C_{12}) * d\Phi^j_{,22} + \left(C_{44} + C_{44} * dh^j\right) * d\Phi^j_{,33}\right] \\
\sigma_{22} &= -\sum_{j=1}^{2}\left[(C_{11} - C_{12}) * d\Phi^j_{,11} + \left(C_{44} + C_{44} * dh^j\right) * d\Phi^j_{,33}\right] \\
\sigma_{33} &= -\sum_{j=1}^{2}\left(C_{44} - C_{44} * dh^j\right) * d\Delta_2\Phi^j \\
\sigma_{23} &= \sum_{j=1}^{2}\left(C_{44} - C_{44} * dh^j\right) * d\Phi^j_{,23} \\
\sigma_{13} &= \sum_{j=1}^{2}\left(C_{44} - C_{44} * dh^j\right) * d\Phi^j_{,13} \\
\sigma_{12} &= \sum_{j=1}^{2}(C_{11} - C_{12}) * d\Phi^j_{,12}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

LITERATURA

[1] Бородачев А. Н.: Об одной форме частного решения уравнений термоупругости для трансверсально-изотропных тел, Прикл. мат. и мех., 1988, **52**, 2, 294 - 301.

[2] Christensen R.M.: Theory of viscoelasticity, Academic Press, New York 1971.

[3] Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids, St. Geot. et Mech. 1986, **8**, 2, 29 - 47.

[4] Kubik J., Wyrwał J.: Variational principle for linear coupled dynamic theory of viscoelastic thermodiffusion, Int. J. Engng. Sci. 1989, **27**, 5, 605 - 607.

[5] Noda N., Takeuti Y., Sugano Y.: On a general treatise of three-dimensional thermoelastic problems in transversaly isotropic bodies, ZAMM 1985, **65**, 10, 509 - 512.

[6] Nowacki W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych, PWN, Warszawa 1983.

[7] Singh A: Axisymmetrical thermal stresses in tranversely isotropic bodies, Arch. Mech. Stos. 1960, **12**, 3, 287 - 304.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 22.05.1995 r.

Abstract

In the paper a proposal of the particular solutions of the thermodiffusion equetions is presented. The problem is analysed for the transversely isotropic viscoelastic body within the linear and quasi-static theory. The generalized displacements potential have been introduced. It leads the problem to the equivalent one which is based on the solution of the decoupling equations of the thermal stresses theory.