ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: ELEKTRYKA z.126 Nr kol. 1168

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Piotr MALICKI

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

MODEL MATEMATYCZNY INDUKCYJNEGO SILNIKA KLATKOWEGO UWZGLĘDNIAJĄCY PRĄDY POPRZECZNE W WIRNIKU

Streszczenie. W artykule opisano model matematyczny indukcyjnego silnika klatkowego, uwzględniający zarówno wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń stojana i wirnika, jak i prądy poprzeczne w wirniku. Przedstawiono analityczne rozwiązanie dla modelu z równomiernym ciągłym rozkładem rezystancji pomiędzy prętami wirnika dla stanu ustalonego.

MATHEMATICAL MODEL OF SQUIRREL-CAGE MOTOR ALLOWING FOR TRANSVERSE CURRENTS IN ROTOR

Summary. A mathematical model of squirrel-cage motor allowing for both MMF space harmonics of stator and rotor windings and transverse currents in rotor iron has been presented. Analitical solution for a model with continuous distribution of bar-to-bar resistance has been found at steady-state.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО КОРОТКОЗАМКНУТОГО ДВИГАТЕЛЯ УЧИТЫВАЮЩАЯ ПОПЕРЕЧНЫЕ ТОКИ В РОТОРЕ

Резюме. В статье описана математическая модель асинхронного короткозамкнутого двигателя, учитывающая как высоие пространственные гармоники магнитодвижуьей силы, так и поперечные токи в роторе. Представлены аналитические реюения для модели с равномерным, сплошным распределением активного сопротивления между стержнями ротора в установившимся состоянии.

1. WSTĘP

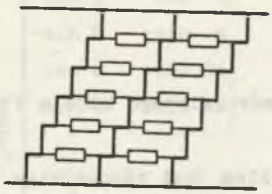
W indukcyjnych silnikach klatkowych nieizolowane pręty klatki wirnika, zwłaszcza wirnika zalewanego aluminium, przylegają bezpośrednio do powierzchni pakietu żelaza, w wyniku czego pomiędzy prętami pojawiają się prądy poprzeczne. Prądy te mogą wywierać istotny wpływ na wartości pasożytniczych momentów elektromagnetycznych generowanych przez wyższe harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego.

Celem niniejszego artykułu jest sformułowanie modelu matematycznego maszyny uwzględniającego zarówno wyższe harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego, jak i prądy poprzeczne w wirniku, a więc - modelu stwarzającego możliwość teoretycznego przeanalizowania wpływu prądów poprzecznych w żelazie wirnika na asynchroniczne i synchroniczne momenty pasożytnicze, powstające w silniku.

2. MODEL FIZYCZNY INDUKCYJNEJ MASZYNY KLATKOWEJ UWZGLĘDNIAJĄCY PRĄDY POPRZECZNE W WIRNIKU

Rezystancja R_{bb} dla prądów poprzecznych płynących poprzez żelazo pomiędzy sąsiednimi prętami klatki wirnika zależy przede wszystkim od rezystancji styku pręta z blachami pakietu żelaza. Wartość tej rezystancji jest różna dla różnych egzemplarzy silników tego samego typu i ustala się w sposób przypadkowy w zależności od przebiegu procesu technologicznego zalewania klatki wirnika aluminium bądź też w zależności od ułożenia się prętów miedzianych w żłobkach wirnika. Rezystancja ta ponadto zmienia swoją wartość w trakcie eksploatacji silnika. Może być ona wyznaczona pomiarowo, wymaga to jednak rozcięcia pierścieni zwierających klatkę, a więc - zniszczenia wirnika. Pomiary przeprowadzone na silnikach średniej mocy z wirnikami zalewanymi aluminium wskazują, że rezystancja ta przyjmuje wartość rzędu kilkudziesięciu $\mu\Omega$ [5].

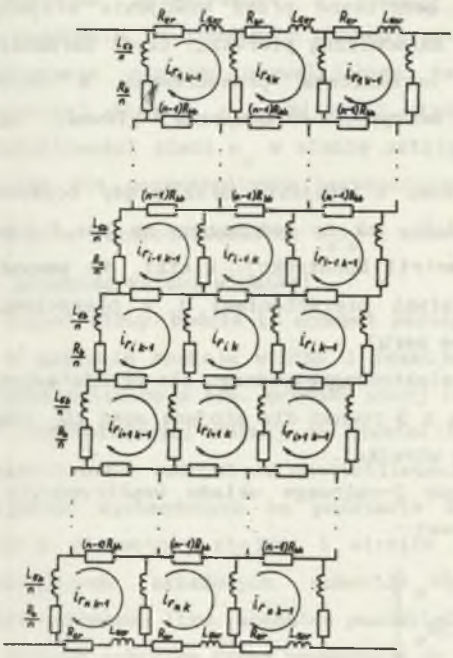
W modelu fizycznym silnika można stworzyć możliwość płynięcia prądów poprzecznych pomiędzy prętami wirnika poprzez wprowadzenie pewnej liczby fikcyjnych skupionych rezystancji pomiędzy sąsiednimi prętami klatki. Celowe jest przy tym zastąpienie żłobków skośnych żłobkami odcinkami prostymi, tak jak to przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Wirnik podzielony na n plastrów (n=5)

Fig. 1. Rotor divided into n slice-rotors

Wprowadzone rezystancje dzielą analizowany wirnik na n wirników-plastrów o długości $\frac{l}{n}$, sprzężonych ze sobą galwanicznie i skręconych względem siebie o kąt $\frac{\gamma}{n-1}$ (gdzie: γ - kąt skosu żłobków wirnika, l - długość wirnika). Jeżeli R_{bb} jest zmierzoną wartością rezystancji dla prądów poprzecznych płynących pomiędzy sąsiednimi prętami, to wprowadzone do modelu fikcyjne rezystancje skupione przyjmują wartość $(n-1)R_{bb}$. Takiemu modelowi wirnika odpowiada schemat przedstawiony na rys. 2. Każdy z wirników-plastrów jest sprzężony elektromagnetycznie ze stojanem oraz - sprzężony galwanicznie z sąsiednimi wirnikami-plastrami. Stojan sprzęga się elektromagnetycznie ze wszystkimi wirnikami- plastrami.



Rys. 2. Rozwinięty schemat elektryczny wirnika ze skupionymi rezystancjami dla prądów poprzecznych

Fig. 2. Developed electric scheme of rotor with lumped-resistance for transverse currents

3. MODEL MATEMATYCZNY INDUKCYJNEJ MASZYNY KLATKOWEJ UWZGLĘDNIAJĄCY PRĄDY POPRZECZNE W WIRNIKU

Przy formułowaniu równań różniczkowych przedstawionego modelu fizycznego maszyny założono, że:

- szczelina powietrzna między stojanem i wirnikiem jest równomierna i gładka,
- obwód magnetyczny jest liniowy (nienasycony),
- składowa osiowa pola magnetycznego głównego jest równa zeru (pole w szczelinie powietrznej jest płaskie),
- nie zachodzi zjawisko wypierania prądu w prętach wirnika.

Powyższe założenia oznaczają, że model uwzględnia wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń, nie uwzględnia zaś wyższych harmonicznych permeancyjnych (przewodnościowych) oraz nasyceniowych.

W rozkładzie przestrzennym przepływu stojana i wirnika uwzględnia się wszystkie harmoniczne przestrzenne generowane przez uzwojenia stojana i wirnika aż do rzędu Ω, przy czym za harmoniczną pierwszą, czyli harmoniczną podstawową (ν=1), przyjmuje się harmoniczną przestrzenną o okresie odpowiadającym pełnemu obwodowi maszyny. Harmoniczna główna, czyli pracująca, posiada więc rząd ν=p [8].

Jako zmienne przyjęto prądy fazowe w stojanie oraz prądy oczkowe w poszczególnych wirnikach-plastrach tak, jak to zaznaczono na rys.2 (można wykazać, korzystając z warunków symetrii konstrukcji klatki, że wszystkie prądy oczkowe związane z rzeczywistymi pierścieniami i z pierścieniami fikcyjnych wirników-plastrów są równe zeru).

Układ równań różniczkowych stanu elektromagnetycznego dla przedstawionego modelu fizycznego maszyny składa się z 3 równań dla stojana oraz nQ_r równań dla wirnika (gdzie Q_r-liczba żłobków wirnika).

Równania te przetransformowano do 2-osiowego układu współrzędnych za pomocą macierzy transformacji 2-osiowej:

$$\left[K_s\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha_s & \cos 2\alpha_s \\ -\sin 0 & -\sin\alpha_s & -\sin 2\alpha_s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie $\alpha_s = \frac{2\pi}{3}$

dla stojana

oraz:

$$\left[K_r\right]=\sqrt{\frac{2}{Q_r}}\begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha_r & \cos 2\alpha_r & \dots & \cos(Q_r-1)\alpha \\ -\sin 0 & -\sin\alpha_r & -\sin 2\alpha_r & \dots & -\sin(Q_r-1)\alpha \\ \cos 0 & \cos 2\alpha_r & \cos 4\alpha_r & \dots & \cos 2(Q_r-1)\alpha_r \\ \sin 0 & -\sin 2\alpha_r & -\sin 4\alpha_r & \dots & -\sin 2(Q_r-1)\alpha_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (2),$$

gdzie $\alpha_r = \frac{2\Pi}{Q_r}$

dla wirnika.

Pary kolejnych współrzędnych 2-osiowych wyznaczają wektory przestrzenne, które można zapisać w postaci liczb zespolonych. Jeżeli przyjąć założenie, że reakcją wirnika na ν-tą harmoniczną przestrzenną stojana jest wyłącznie harmoniczna przestrzenna o rzędzie ν, wówczas staje się możliwe wyprowadzenie, na podstawie stransformowanych równań różniczkowych, schematu zastępczego maszyny pozwalającego na wyznaczenie tzw. prądu reakcji pierwotnej stojana i_s (składowej prądu stojana o częstotliwości równej częstotliwości sieci ω_0 w stanie ustalonym) oraz prądów reakcji pierwotnej wirnika dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych (składowych prądu wirnika o częstotliwościach $\omega_0 s_\nu$ w stanie ustalonym, gdzie: $s_\nu = \frac{\omega_0-\nu\omega}{\omega_0}$, ω - prędkość kątowa wirnika).

Innymi słowy, będzie to schemat zastępczy maszyny odpowiadający założeniu, że w maszynie reakcja wtórna i reakcje wyższych rzędów uzwojeń stojana i wirnika związane z tzw. prądami obcej częstotliwości (dla uzwojenia stojana - częstotliwości różnej od częstotliwości sieci, dla uzwojenia wirnika - częstotliwości różnych od częstotliwości poślizgu $\omega_0 s_\nu$) są pomijalnie małe. Znajomość wyznaczonych na podstawie takiego schematu zastępczego prądów reakcji pierwotnej stojana i wirnika jest wystarczająca do wyznaczenia dominujących składowych momentów pasożytniczych asynchronicznych i synchronicznych (tzw. momentów pasożytniczych I rzędu).

Opiszmy pokrótce drogę prowadzącą do sformułowania uproszczonego schematu zastępczego maszyny. Po przyjęciu założenia dotyczącego reakcji wirnika na ν-tą harmoniczną przestrzenną stojana układ równań różniczkowych wirnika dla wektorów przestrzennych rozprzęga się na niezależne układy równań, związane

z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi (uzyskuje się Ω układów n-tego stopnia). Umożliwia to przekształcenie równań zawierających współczynniki okresowo zmienne względem kąta obrotu wirnika w równania o stałych współczynnikach za pomocą odpowiednich transformacji obrotu, różnych dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych. Transformacja obrotu dla układu równań wirnika związanego z ν-tą harmoniczną przestrzenną ma, zależnie od kierunku wirowania pola tej harmonicznej w stanie ustalonym, jedną z czterech następujących postaci:

$$i'_{ri\nu} = \sqrt{\frac{Q_r}{3}} \; \frac{k_{wr\nu}}{N_s k_{ws\nu}} \; e^{\pm j\nu\theta} \; i^{(k)}_{ri\nu} \tag{3a}$$

$$i'_{ri\nu} = \sqrt{\frac{Q_r}{3}} \; \frac{k_{wr\nu}}{N_s k_{ws\nu}} \; e^{\pm j\nu\theta} \; i^{(k)}_{ri\nu} \tag{3b}$$

gdzie:

$k_{wr\nu}$ - współczynnik uzwojenia wirnika dla ν-tej harmonicznej,

$k_{ws\nu}$ - współczynnik uzwojenia stojana dla ν-tej harmonicznej,

N_s - liczba zwojów uzwojenia stojana,

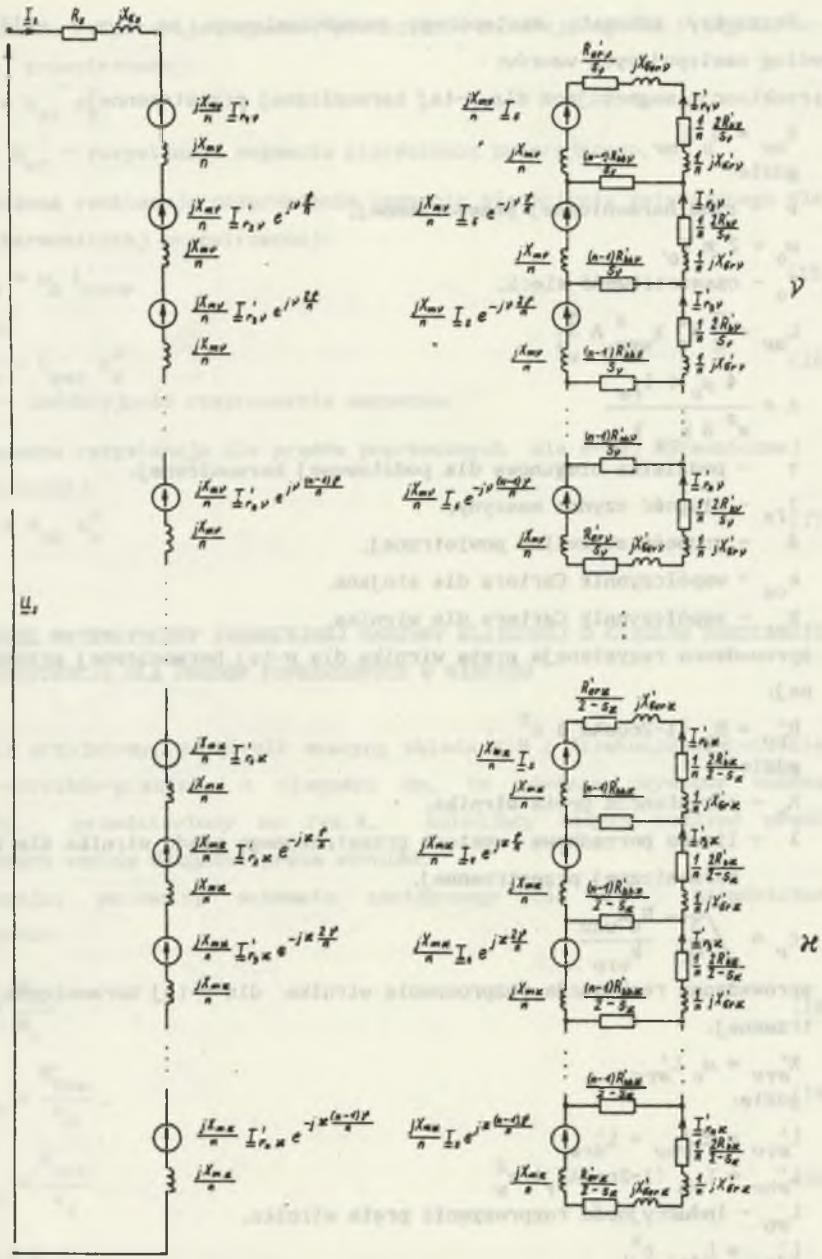
θ - kąt obrotu wirnika,

$i^{(k)}_{ri\nu}$ - wektor przestrzenny prądu generowanego przez ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego stojana w i-tym wirniku-plastrze (wektor wyrażony na płaszczyźnie wirnika),

$i'_{ri\nu}$ - powyższy wektor wyrażony na płaszczyźnie nieruchomej (płaszczyźnie stojana).

Kierunki wirowania pól poszczególnych harmonicznych przestrzennych wirnika można łatwo określić np. na podstawie tzw. schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne, którego konstrukcja jest opisana w pracach [3], [4].

Stransformowanym równaniom różniczkowym maszyny dla wektorów przestrzennych odpowiada w stanie ustalonym schemat zastępczy przedstawiony na rys.3. Schemat ten ma postać łańcucha. Można w nim wyróżnić podłańcuchy związane z kolejnymi harmonicznymi przestrzennymi (na rys.3 zaznaczono symbolicznie podłańcuchy związane z harmoniczną ν-tą oraz κ-tą). Każdy z podłańcuchów zawiera elementy odpowiadające kolejnym n wirnikom-plastrom. Podłańcuchy odpowiadające harmonicznym przestrzennym przepływu wirującym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara są analogiczne do podłańcucha ν-tego, a podłańcuchy odpowiadające harmonicznym przestrzennym wirującym w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara - do podłańcucha κ-tego.



Rys. 3. Schemat zastępczy maszyny klatkowej ze skupionymi rezystancjami pomiędzy prętami

Fig. 3. Lumped-interbar resistance equivalent circuitof squirrel-cage motor

Parametry schematu zastępczego przedstawionego na rys.3 oblicza się według następujących wzorów:

- reaktancja magnesująca dla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$X_{m\nu} = \omega_0 L_{m\nu} \tag{4}$$

gdzie:

ν - rząd harmonicznej przestrzennej,

$$\omega_0 = 2\pi f_0, \tag{5}$$

f_0 - częstotliwość sieci,

$$L_{m\nu} = \frac{3}{2} N_s^2 k_{ws\nu}^2 \Lambda \frac{1}{\nu^2} \tag{6}$$

$$\Lambda = \frac{4 \mu_0 \tau l_{fe}}{\pi^2 \delta k_{cs} k_{cr}} \tag{7}$$

τ - podziałka biegunowa dla podstawowej harmonicznej,

l_{fe} - długość czynna maszyny,

δ - grubość szczeliny powietrznej,

k_{cs} - współczynnik Cartera dla stojana,

k_{cr} - współczynnik Cartera dla wirnika,

- sprowadzona rezystancja pręta wirnika dla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$R'_{b\nu} = R_b (1-2\cos\lambda\alpha_r) c_\nu^2 \tag{8}$$

gdzie:

R_b - rezystancja pręta wirnika,

λ - liczba porządkowa wektora przestrzennego prądu wirnika dla ν-tej harmonicznej przestrzennej,

$$c_\nu = \sqrt{\frac{3}{Q_r}} \frac{N_s k_{ws\nu}}{k_{wr\nu}} \tag{9}$$

- sprowadzona reaktancja rozproszenia wirnika dla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$X'_{\sigma r\nu} = \omega_0 L'_{\sigma r\nu} \tag{10}$$

gdzie:

$$L'_{\sigma r\nu} = 2L'_{\sigma b\nu} + L'_{dr\nu} \tag{11}$$

$$L'_{\sigma b\nu} = L_{\sigma b} (1-2\cos\lambda\alpha_r) c_\nu^2 \tag{12}$$

$L_{\sigma b}$ - indukcyjność rozproszenia pręta wirnika,

$$L'_{dr\nu} = L_{dr\nu} c_\nu^2, \tag{13}$$

$L_{dr\nu}$ - indukcyjność rozproszenia różnicowego dla ν-tej harmonicznej przestrzennej,

- sprowadzona rezystancja segmentu pierścienia zwierającegodla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$R'_{er\nu} = R_{er}\, c_{\nu}^{2} \tag{14}$$

gdzie R_{er} - rezystancja segmentu pierścienia zwierającego,

- sprowadzona reaktancja rozproszenia segmentu pierścienia zwierającego dla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$X'_{\sigma er\nu} = \omega_0\, L'_{\sigma er\nu} \tag{15}$$

gdzie:

$$L'_{\sigma er\nu} = L_{\sigma er}\, c_{\nu}^{2} \tag{16}$$

$L_{\sigma er}$ - indukcyjność rozproszenia segmentu,

- sprowadzona rezystancja dla prądów poprzecznych dla ν-tej harmonicznej przestrzennej:

$$R'_{bb\nu} = R_{bb}\, c_{\nu}^{2} \tag{17}$$

4. MODEL MATEMATYCZNY INDUKCYJNEJ MASZYNY KLATKOWEJ O CIĄGŁYM ROZKŁADZIE REZYSTANCJI DLA PRĄDÓW POPRZECZNYCH W WIRNIKU

Jeżeli przyjmiemy, że wirnik maszyny składa się z nieskończenie wielkiej liczby wirników-plastrów o długości dx, to wówczas uzyskamy schemat zastępczy, przedstawiony na rys.4, opisujący ciągły rozkład prądów poprzecznych wzdłuż długości pręta wirnika.

Oznaczając parametry schematu zastępczego dla ν-tej harmonicznej odpowiednio:

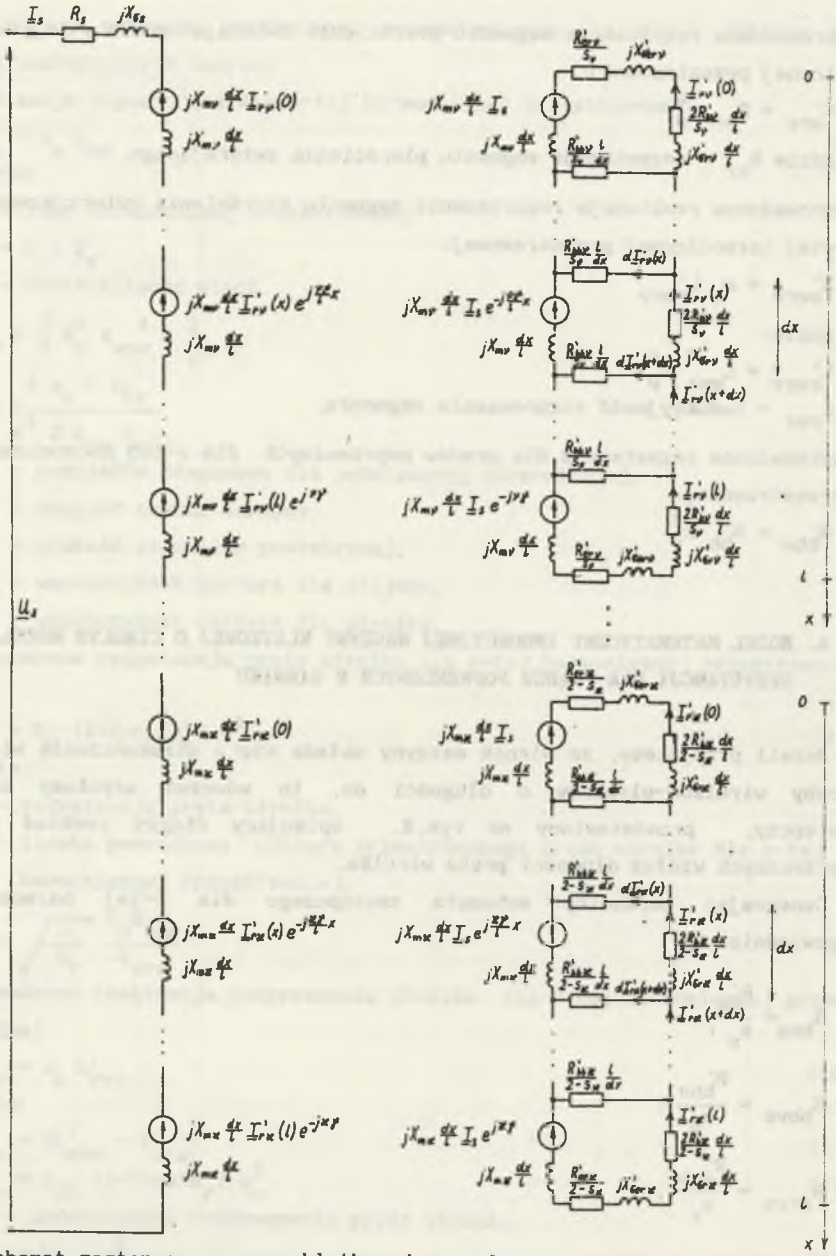
$$R_{b\nu s} = \frac{R'_{b\nu}}{s_{\nu}}, \tag{18}$$

$$R_{bb\nu s} = \frac{R'_{bb\nu}}{s_{\nu}}, \tag{19}$$

$$R_{er\nu s} = \frac{R'_{er\nu}}{s_{\nu}}, \tag{20}$$

$$\alpha_{\nu} = \frac{\nu\,\gamma}{1}, \tag{21}$$

jeśli ν-ta harmoniczna przestrzenna stojana wiruje współbieżnie,



Rys. 4. Schemat zastępczy maszyny klatkowej z rozłożoną rezystancją pomiędzy prętami

Fig. 4. Distributed-interbar resistance equivalent circuit of squirrel-cage motor

lub:

$$R_{b\nu s} = \frac{R'_{b\nu}}{2-s_\nu}, \tag{22}$$

$$R_{bb\nu s} = \frac{R'_{bb\nu}}{2-s_\nu}, \tag{23}$$

$$R_{er\nu s} = \frac{R'_{er\nu}}{2-s_\nu}, \tag{24}$$

$$\alpha_\nu = -\frac{\nu\gamma}{l}, \tag{25}$$

jeśli ν-ta harmoniczna przestrzenna stojana wiruje przeciwbieżnie, oraz:

$$z_{r\nu} = 2R_{b\nu s} + jX'_{\sigma r\nu} + jX_{m\nu} \tag{26}$$

$$z_{er\nu} = R_{er\nu s} + jX_{\sigma er\nu} \tag{27}$$

można, na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa dla wirnika-plastra o grubości dx, zapisać równanie:

$$jX_{m\nu}\frac{dx}{l}I_s e^{-j\alpha_\nu x} + z_{r\nu}\frac{dx}{l}I'_{r\nu}(x) + R_{bb\nu s}\frac{1}{dx}dI'_{r\nu}(x) - R_{bb\nu s}\frac{1}{dx}dI'_{r\nu}(x+dx) = 0 . \tag{28}$$

Po przekształceniach otrzymuje się równanie różniczkowe opisujące rozkład prądu wirnika generowanego przez ν-tą harmoniczną przestrzenną stojana wzdłuż długości pręta:

$$\frac{d^2 I'_{r\nu}(x)}{dx^2} - \frac{z_{r\nu}}{R_{bb\nu s} l^2} I'_{r\nu}(x) = \frac{jX_{m\nu}}{R_{bb\nu s} l^2} I_s e^{-j\alpha_\nu x} . \tag{29}$$

Rozwiązanie tego równania ma następującą postać:

$$I'_{r\nu}(x) = B_\nu\left(e^{-j\alpha_\nu x} + K_{1\nu}e^{k_\nu x} + K_{2\nu}e^{-k_\nu x}\right)I_s \tag{30}$$

gdzie:

$$k_\nu = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{z_{r\nu}}{R_{bb\nu s}}}, \tag{31}$$

$$B_\nu = -\frac{jX_{m\nu}}{z_{r\nu}}\frac{k_\nu^2}{\alpha_\nu^2 + k_\nu^2} . \tag{32}$$

Stałe $K_{1\nu}$, $K_{2\nu}$ wyznaczyć można z warunków brzegowych. Dla x=0 i x=l zachodzi równość spadków napięć w pakiecie żelaza wirnika i pierścieniu zwierającym (przy założeniu, że impedancja odcinka pręta wystającego poza pakiet żelaza jest pomijalnie mała):

$$\begin{cases} I'_{r\nu}(0)\, z_{er\nu} = J'_{bb\nu}(0)\, R_{bb\nu s}\, l \\ I'_{r\nu}(l)\, z_{er\nu} = -J'_{bb\nu}(l)\, R_{bb\nu s}\, l \end{cases} \tag{33}$$

gdzie:

$J'_{bb\nu}(x)$ - gęstość liniowa prądu poprzecznego płynącego pomiędzy sąsiednimi prętami, generowanego przez ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego stojana (prąd poprzeczny wirnika sprowadzony na płaszczyznę nieruchomą względem płaszczyzny stojana). Gęstość ta wyraża się następującym wzorem:

$$J'_{bb\nu}(x) = \frac{dI'_{r\nu}(x)}{dx} = B_\nu \left(-j\alpha_\nu e^{-j\alpha_\nu x} + k_\nu K_{1\nu} e^{k_\nu x} - k_\nu K_{2\nu} e^{-k_\nu x} \right) I_s \tag{34}$$

Oznaczając:

$$k_\nu R_{bb\nu s}\, l + z_{er\nu} = C_{1\nu} \tag{35a}$$

$$k_\nu R_{bb\nu s}\, l - z_{er\nu} = C_{2\nu} \tag{35b}$$

$$j\alpha_\nu R_{bb\nu s}\, l + z_{er\nu} = D_{1\nu} \tag{36a}$$

$$j\alpha_\nu R_{bb\nu s}\, l - z_{er\nu} = D_{2\nu} \tag{36b}$$

otrzymujemy:

$$K_{1\nu} = \frac{C_{2\nu} D_{1\nu} e^{-k_\nu l} - C_{1\nu} D_{2\nu} e^{-j\alpha_\nu l}}{C_{2\nu}^2 e^{-k_\nu l} - C_{1\nu}^2 e^{k_\nu l}}, \tag{37a}$$

$$K_{2\nu} = \frac{C_{1\nu} D_{1\nu} e^{k_\nu l} - C_{2\nu} D_{2\nu} e^{-j\alpha_\nu l}}{C_{2\nu}^2 e^{-k_\nu l} - C_{1\nu}^2 e^{k_\nu l}}. \tag{37b}$$

W przypadku żłobków prostych otrzymujemy:

$$K_{1\nu} = \frac{C_{2\nu} e^{-k_\nu l} + C_{1\nu}}{C_{2\nu}^2 e^{-k_\nu l} - C_{1\nu}^2 e^{k_\nu l}}\, z_{er\nu}, \tag{38a}$$

$$K_{2\nu} = \frac{C_{1\nu} e^{k_\nu l} + C_{2\nu}}{C_{2\nu}^2 e^{-k_\nu l} - C_{1\nu}^2 e^{k_\nu l}}\, z_{er\nu}. \tag{38b}$$

Na podstawie schematu zastępczego można wyznaczyć impedancję maszyny w obecności prądów poprzecznych jako sumę impedancji poszczególnych podłańcuchów, odpowiadających kolejnym harmonicznym przestrzennym oraz rezystancji i reaktancji rozproszenia stojana:

$$z_s = R_s + jX_{\sigma s} + \sum_{\nu} z_{\nu} \tag{39}$$

gdzie:

impedancja podłańcucha dla ν-tej harmonicznej

$$z_{\nu} = jX_{m\nu}\left\{1+B_{\nu}\left[1+\frac{K_{1\nu}}{(j\alpha_{\nu}+k_{\nu})l}\left(e^{(j\alpha_{\nu}+k_{\nu})l}-1\right)+\frac{K_{2\nu}}{(j\alpha_{\nu}-k_{\nu})l}\left(e^{(j\alpha_{\nu}-k_{\nu})l}-1\right)\right]\right\} \tag{40}$$

5. PASOŻYTNICZE MOMENTY ASYNCHRONICZNE

Moment asynchroniczny I rzędu powstaje wskutek oddziaływania ν-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego stojana z ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego wirnika, będącą reakcją na ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego stojana.

Moment asynchroniczny I rzędu wytwarzany za pośrednictwem harmonicznej głównej, czyli pracującej (ν=p), jest momentem głównym. Pozostałe momenty są momentami pasożytniczymi, pogarszającymi warunki przetwarzania energii elektrycznej w energię mechaniczną.

Jeżeli wirnik jest podzielony na n wirników plastrów, to moment asynchroniczny I rzędu i-tego plastra wytwarzany za pośrednictwem ν-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego ma w stanie ustalonym wartość

$$M_{e\nu i} = \nu \frac{L_{m\nu}}{n} \mathrm{Re}\left\{ \pm j\, I_s^{*}\, I'_{ri\nu}\, e^{\pm j\nu\frac{i-1}{n}\gamma} \right\}. \tag{41}$$

Znak w nawiasie zależy od kierunku wirowania pola magnetycznego ν-tej harmonicznej przestrzennej stojana: "+" dla kierunku przeciwnego do ruchu wskazówek zegara, "-" dla kierunku zgodnego z ruchem wskazówek zegara. Wypadkowy moment asynchroniczny maszyny, wytwarzany za pośrednictwem ν-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego, jest sumą momentów wytwarzanych przez wszystkie maszyny-plastry:

$$M_{e\nu} = \sum_{i=1}^{n} M_{e\nu i} = \nu\, L_{m\nu}\, \mathrm{Re}\left\{ \pm j\, I_s^{*} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I'_{ri\nu}\, e^{\pm j\nu \frac{i-1}{n}\gamma} \right\} \tag{42}$$

W przypadku ciągłego rozkładu prądów poprzecznych ($n \to \infty$):

$$M_{e\nu} = \nu\, L_{m\nu}\, \mathrm{Re}\left\{ \pm j\, I_s^{*} \left(\frac{1}{l} \int_0^{l} I'_{r\nu}(x)\, e^{j\alpha_\nu x}\, dx \right) \right\} \tag{43}$$

gdzie:

$$\frac{1}{l} \int_0^{l} I'_{r\nu}(x)\, e^{j\alpha_\nu x}\, dx = \tag{44}$$

$$= I_s\, B_\nu \left[1 + \frac{K_{1\nu}}{(j\alpha_\nu + k_\nu)l} \left(e^{(j\alpha_\nu + k_\nu)l} - 1 \right) + \frac{K_{2\nu}}{(j\alpha_\nu - k_\nu)l} \left(e^{(j\alpha_\nu - k_\nu)l} - 1 \right) \right]$$

W przypadku żłobków prostych:

$$M_{e\nu} = \nu\, L_{m\nu}\, \mathrm{Re}\left\{ \pm j\, I_s^{*} \left(\frac{1}{l} \int_0^{l} I'_{r\nu}(x)\, dx \right) \right\} \tag{45}$$

6. PASOŻYTNICZE MOMENTY SYNCHRONICZNE I RZĘDU

Moment synchroniczny I rzędu powstaje wskutek oddziaływania ν-tej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego stojana z ν-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego wirnika, będącą reakcją na ρ-tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego stojana.

Wzór na moment synchroniczny I rzędu przyjmuje postać:

$$M_{e\nu(\rho)} = \nu \frac{c_\rho}{c_\nu} L_{m\nu}\, \mathrm{Re}\left\{ \pm j I_s^{*} \left(\frac{1}{l} \int_0^{l} I'_{r\rho}(x) e^{j\alpha_\nu x}\, dx \right) e^{\pm j(\nu \pm \rho)\vartheta} \right\}, \tag{46a}$$

jeśli moment pasożytniczy powstaje w maszynie zatrzymanej lub:

$$M_{e\nu(\rho)} = \nu \frac{c_\rho}{c_\nu} L_{m\nu}\, \mathrm{Re}\left\{ \pm j I_s^{*} \left(\frac{1}{l} \int_0^{l} I'_{r\rho}(x) e^{-j\alpha_\nu x}\, dx \right)^{*} e^{\pm j(\nu \pm \rho)\vartheta}\, e^{-j2\omega_o t} \right\}, \tag{46b}$$

jeśli moment pasożytniczy powstaje w maszynie przy prędkości różnej od zera.

W przypadku żłobków prostych otrzymujemy odpowiednio:

$$M_{e\nu(\rho)} = \nu \frac{c_\rho}{c_\nu} L_{m\nu} \operatorname{Re}\left\{ \pm j I_s^* \left[\frac{1}{l} \int_0^l I'_{r\rho}(x)\, dx \right] e^{\pm j(\nu \pm \rho)\vartheta} \right\} . \tag{47a}$$

lub:

$$M_{e\nu(\rho)} = \nu \frac{c_\rho}{c_\nu} L_{m\nu} \operatorname{Re}\left\{ \pm j I_s^* \left[\frac{1}{l} \int_0^l I'_{r\rho}(x)\, dx \right]^* e^{\pm j(\nu \pm \rho)\vartheta}\, e^{-j2\omega_0 t} \right\} . \tag{47b}$$

Całka we wzorach (46a,b) ma postać:

$$\frac{1}{l} \int_0^l I'_{r\rho}(x)\, e^{\pm j\alpha_\nu x}\, dx = I_s B_\rho \left[\frac{1}{j(\pm\alpha_\nu - \alpha_\rho)l} \left(e^{j(\pm\alpha_\nu - \alpha_\rho)l} - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{K_{1\nu}}{(\pm j\alpha_\nu + k_\rho)l} \left(e^{(\pm j\alpha_\nu + k_\rho)l} - 1 \right) + \frac{K_{2\nu}}{(\pm j\alpha_\nu - k_\rho)l} \left(e^{(\pm j\alpha_\nu - k_\rho)l} - 1 \right) \right] . \tag{46}$$

Znaki "+", "-" we wzorach zależą od kierunku wirowania pól magnetycznych ν-tej i ρ-tej harmonicznej przestrzennej stojana i wirnika.

8. PODSUMOWANIE

Opisany w artykule model indukcyjnego silnika klatkowego umożliwia obliczanie w stosunkowo prosty sposób wartości pasożytniczych momentów synchronicznych i asynchronicznych przy uwzględnieniu prądów poprzecznych w wirniku.

LITERATURA

1. Heller V., Hamata V.: Harmonic Field Effects in Induction Machines. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praque 1977.
2. Jordan H., Weis M.: Nutenschragung und ihre Wirkungen. ETZ-A Bd.88 (1967), H.21.
3. Kluszczyński K.: Momenty pasożytnicze w maszynach asynchronicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, z.102., Gliwice 1986.
4. Kluszczyński K.: Graphical method of choice of the number of slots in asynchronous machines. Proc. of ICEM, 88, Pisa, Italy 1988 pp.447-452.

5. Krzymiński L.: Wpływ nieizolowania klatki na asynchroniczne momenty pasożytnicze w silnikach indukcyjnych. Prace Instytutu Elektrotechniki, z.32, Warszawa 1963.
6. Pawelec Z.: Wpływ prądów upływu do pakietu blach wirnika na parametry modelu matematycznego silnika indukcyjnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, z.110,Gliwice 1990, s.55-71.
7. Sobczyk T.: Analiza procesów stacjonarnych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, z.97, Kraków 1977.
8. Wach P.: Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych. Zeszyty Naukowe WSI, z.19, Opole 1982.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 listopada 1991.

MATHEMATICAL MODEL OF SQUIRREL-CAGE MOTOR ALLOWING FOR TRANSVERSE CURRENTS IN ROTOR

A b s t r a c t

In the cage of an induction machine with skewed bars insulated from the rotor iron, particularly in a motor with a cast aluminium cage, considerable transverse currents flow from one bar through the iron to the adjacent bar. The values of these bar-to-bar currents depend mainly on the interbar resistance R_{bb} which is continuosly distributed along individual bars. In order to derive an equivalent circuit of a machine it will be advantageous to divide the actual rotor into n slice-rotors of the length $\frac{l}{n}$ (where: l - length of rotor) and to replace each portion of the distributed bar-to-bar resistance by the lumped resistance of the value $(n-1)R_{bb}$. It is also convenient to substitute the skewed segments of bars referring to consecutive slice rotors for unskewed ones, which, in other words, means that zig-zag bars consisting of n straight pieces will be considered instead of the real skewed bars (Fig.1). As a result, we get a model of a machine composed of n slice-rotors mutually turned around a shaft by the angle $\frac{\gamma}{n-1}$ (where: γ - skew angle). Developed rotor electric scheme and the

lumped-parameter equivalent-circuit corresponding to such a model are presented in Fig.2 and 3, respectively. Assuming that the rotor consists of infinitive number of slice-rotors of length dx ($n \to \infty$) we can change the lumped-parameter equivalent circuit presented in Fig.3 in a distributed-parameter equivalent circuit shown in Fig.4. The differential equation of second order resulting from this equivalent circuit which describes the distribution of bar current generated by ν-th MMF stator space harmonic has the form (1). Its solution is given by the relation (2). The distributed-parameter equivalent circuit and Exp. (2) allow to determine expressions for asynchronous and synchronous parasitic torques. They are given in the form of integrals (5) and (6). The model of a squirrel-cage motor allowing for both MMF space harmonics and transverse bar-to-bar currents in the rotor iron enables us to calculate synchronous and asynchronous parasitic torques and to analyse influence of interbar currents on the values of parasitic torques.