ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: BUDOWNICTWO z. 81 Nr kol. 1292

Ryszard WALENTYŃSKI

O ZASTOSOWANIU SZTUCZNEJ INTELIGENCJI DO ROZWIĄZANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH POWŁOK OBROTOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie systemu *Mathematica* do poszukiwania drogą analityczną rozwiązania układów równań różniczkowych powłok obrotowych. Zagadnienie sprowadzono, z użyciem tego systemu, do jednego liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu. Podano przypadki, kiedy rozwiązanie tego równania okazało się możliwe oraz przykład zastosowania systemu *Mathematica* do jego rozwiązania.

ON THE APPLICATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR SOLVING SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SHELLS OF REVOLUTION

Summary. The paper presents application of the system *Mathematica* for investigation of the solution of differential equations' systems of shells of revolution with an analytical way. The task has been reduced, with utilisation of the system, to one linear differential equation of the second order. Cases when the equation can be solved and the example of *Mathematica* application for its solution have been presented.

ÜBER DIE VERWENDUNG DER KÜNSTLICHEN INTELLIGENZ ZUR LÖSUNG DER DIFFERENTIALEN GLEICHUNGSSYSTEME DER ROTATIONSSCHALEN

Zusammenfassung. In der vorliegenden Schrift wurde eine Verwendung des Systems *Mathematica* zur analitischen Erhebung der Lösung der differentialen Gleichungssysteme der Rotationsschalen dargestellt. Das Problem wurde, bei der Benutzung des Systems, zu einer linearen Differentialengleichung zweiter Ordnung reduziert. Es wurden die Fälle angegeben für welche die Lösung der Gleichung sich als möglich erwiesen hat, sowie ein Beispiel der Verwendung des Systems *Mathematica* zur Lösung des Problems.

1. WSTĘP

W przypadku powłok obrotowych każde ich obciążenie można rozłożyć w szereg Fouriera względem współrzędnej mierzonej wzdłuż równoleżnika. Pozwala to na sprowadzenie problemu dwuwymiarowego do n zagadnień jednowymiarowych. W praktyce mamy więc do czynienia z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi zamiast cząstkowymi.

Układy tych równań różniczkowych mają mimo to dość zawiłą postać i znalazły dotychczas rozwiązanie jedynie dla niektórych klas powłok, jak sfera, stożek i walec.

Korzystając z narzędzia analizy symbolicznej, jakim jest *Mathematica* [1], autorowi pracy udało się sprowadzić powyższe zagadnienie do dwóch liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu [2] dla sił przekrojowych i infinitezymalnych przemieszczeń. W niniejszej pracy przedstawiono dalsze uproszczenie postaci tych równań do jednego równania i podano szeroką klasę powłok, dla której jest możliwe uzyskanie zamkniętego rozwiązania problemu. Postępowanie zilustrowano przykładem rozwiązania tego równania z użyciem systemu *Mathematica*.

2. OPIS GEOMETRYCZNY

Powierzchnia środkowa powłoki obrotowej może być opisana równaniem:

$$\bar{r} = f(u^1)\left(\bar{i}\cos(u^2) + \bar{j}\sin(u^2)\right) + u^1\bar{k}, \tag{1}$$

gdzie f jest funkcją opisującą południk. Zakładamy, że funkcja ta jest k-krotnie różniczkowalna.

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej tej powierzchni opisane są następującymi wzorami:

$$g_{11} = \left[f(u^1)_{,1}\right]^2 + 1, \tag{2}$$

$$g_{22} = \left[f(u^1)\right]^2, \tag{3}$$

$$g_{12} = g_{21} = 0. \tag{4}$$

$$b_{11} = -\frac{\sqrt{g_{22}}_{,11}}{\sqrt{g_{11}}}, \tag{5}$$

$$b_{22} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}, \tag{6}$$

$$b_{12} = b_{21} = 0. \tag{7}$$

3. UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Podstawowe rozwiązanie powłok [3] polega na znalezieniu tensora sił wewnętrznych umownego stanu błonowego oraz wektora infinitezymalnych przemieszczeń.

Siły wewnętrzne wyznaczyć możemy dla każdej składowej obciążenia po rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych.

$$\begin{cases} \left(g_{11}\sqrt{g_{22}}\,\tilde{\tilde{N}}^{11}\right)_{,1} + \theta\, g_{11}\sqrt{g_{22}}\,\tilde{\tilde{N}}^{12} - \dfrac{\sqrt{g_{22}}}{2}\, g_{22,1}\,\tilde{\tilde{N}}^{22} + g_{11}\sqrt{g_{22}}\,\tilde{P}^{1} = 0, \\ \left(\sqrt{g}\,\tilde{\tilde{N}}^{12}\right)_{,1} - \theta\sqrt{g}\,\tilde{\tilde{N}}^{22} + 2\sqrt{g}\,\dfrac{g_{22,1}}{2\,g_{22}}\,\tilde{\tilde{N}}^{12} + \sqrt{g}\,\tilde{P}^{2} = 0, \\ b_{11}\,\tilde{\tilde{N}}^{11} + b_{22}\,\tilde{\tilde{N}}^{22} + \tilde{P}^{3} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Dla θ=0 mamy do czynienia z obciążeniem osiowo-symetrycznym, którego rozwiązanie znane jest od dawna. Nie będziemy się zatem tym zajmować. Dla innych składowych obciążenia problem komplikuje się.

Możemy jednak wyrugować z układu (8) dwie składowe tensora sił przekrojowych:

$$\tilde{\tilde{N}}^{22} = \frac{\sqrt{g_{22}}_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}\,\tilde{\tilde{N}}^{11} - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\,\tilde{P}^{3}, \tag{9}$$

$$\tilde{\tilde{N}}^{12} = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,\tilde{\tilde{N}}^{11}\right)_{,1} + \tilde{P}^{1} + \tilde{P}^{3}\dfrac{\sqrt{g_{22}}_{,1}}{\sqrt{g_{11}}}}{\theta}, \tag{10}$$

i doprowadzić do jednego równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$\tilde{\tilde{N}}^{11}{}_{,11} + p(u^{1})\,\tilde{\tilde{N}}^{11}{}_{,1} + q(u^{1})\,\tilde{\tilde{N}}^{11} = \tilde{P}(u^{1}), \tag{11}$$

o współczynnikach funkcyjnych:

$$p(u^1) = \frac{2\left(g_{22}\sqrt{g_{11}}\right)_{,1}}{g_{22}\sqrt{g_{11}}}, \tag{12}$$

$$q(u^1) = \frac{\left(g_{22}\sqrt{g_{11}}\right)_{,11}}{g_{22}\sqrt{g_{11}}} + \frac{(\theta^2 - 1)\sqrt{g_{22}}_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}. \tag{13}$$

Prawa strona tego równania jest funkcją składowych wektora obciążenia:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u^1) = &\frac{-\tilde{P}^1 f_{,1}(3 g_{11} + f f_{,11})}{f g_{11}} - \tilde{P}^1{}_{,1} + \theta \tilde{P}^2 + \\ &- \frac{\tilde{P}^3\left[3(f_{,1})^2 - \theta^2 g_{11} + f f_{,11}\right]}{f\sqrt{g_{11}}} - \frac{\tilde{P}^3{}_{,1} f_{,1}}{\sqrt{g_{11}}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Po wyznaczeniu sił przekrojowych określamy składowe tensora odkształceń błonowych. Infinitezymalne przemieszczenia wyznaczamy z układu równań różniczkowych (15):

$$\begin{cases}\sqrt{g_{11}}\left(\sqrt{g_{11}}\,\tilde{\bar{w}}^1\right)_{,1} - b_{11}\tilde{\bar{w}}^3 = \tilde{\gamma}_{11}, \\ -\theta g_{11}\tilde{\bar{w}}^1 + g_{22}\tilde{\bar{w}}^2{}_{,1} = 2\tilde{\gamma}_{12}, \\ \frac{1}{2} g_{22,1}\tilde{\bar{w}}^1 + \theta g_{22}\tilde{\bar{w}}^2 - b_{22}\tilde{\bar{w}}^3 = \tilde{\gamma}_{22}.\end{cases} \tag{15}$$

Rugując z tego układu dwie składowe wektora przemieszczenia (dla $\theta>0$):

$$\tilde{\bar{w}}^1 = \frac{g_{22}\tilde{\bar{w}}^2{}_{,1} - 2\tilde{\gamma}_{12}}{\theta g_{11}}, \tag{16}$$

$$\tilde{\bar{w}}^3 = \frac{\frac{1}{2} g_{22,1}\tilde{\bar{w}}^1 + \theta g_{22}\tilde{\bar{w}}^2 - \tilde{\gamma}_{22}}{b_{22}}, \tag{17}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\tilde{\bar{w}}^2{}_{,11} + \tilde{p}(u^1)\tilde{\bar{w}}^2{}_{,1} + \tilde{q}(u^1)\tilde{\bar{w}}^2 = \tilde{\gamma}(u^1), \tag{18}$$

o następujących współczynnikach funkcyjnych:

$$\tilde{p}(u^1) = \frac{2\sqrt{g_{22}}_{,1}}{\sqrt{g_{22}}}, \tag{19}$$

$$\tilde{q}(u^1) = \frac{\theta^2\sqrt{g_{22}}_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}. \tag{20}$$

Prawa strona tego równania ma postać:

$$\tilde{\gamma}(u^1) = \frac{-\theta\left(\tilde{\gamma}_{11} + \tilde{\gamma}_{22}\frac{\sqrt{g_{22}}_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}\right) - 2\tilde{\gamma}_{12,1}}{g_{22}}. \tag{21}$$

Wykonując elementarne przekształcenia i podstawiając w równaniu (11):

$$y(x) = \tilde{\bar{N}}^{11} g_{22}\sqrt{g_{11}}, \tag{22}$$

$$r(x) = \bar{P} g_{22}\sqrt{g_{11}}, \tag{23}$$

oraz w (17):

$$y(x) = \tilde{\bar{w}}^2\sqrt{g_{22}}, \tag{24}$$

$$r(x) = \tilde{\gamma}\sqrt{g_{22}}, \tag{25}$$

a także przyjmując dla uproszczenia dalszego zapisu:

$$u^1 = x,$$

otrzymujemy jedno równanie różniczkowe:

$$y''(x) + y(x)\frac{(\theta^2 - 1) f''(x)}{f(x)} = r(x). \tag{26}$$

Dotychczas udało się znaleźć rozwiązanie tego równania w wielu przypadkach funkcji opisującej południk. Na przykład jeżeli:

$\theta=1$ - przypadek obciążenia antysymetrycznego, praktycznie bardzo interesujący, gdyż rozwiązanie nie zależy od kształtu funkcji f, a składowa antysymetryczna obciążenia ma istotny wpływ na wielkość sił wewnętrznych oraz przemieszczeń wysokich kominów.

$f(x) = a\,x + b$ - walec i stożek.

W tych dwu przypadkach rozwiązanie zadania jest trywialne, gdyż równanie (26) sprowadza się do postaci:

$$y''(x) = r(x). \tag{27}$$

Jeżeli południk opisany jest funkcjami

$$f(x) = a\,sin(c\,x) + b\,cos(c\,x),$$

$f(x) = a\ sinh(c\ x) + b\ cosh(c\ x)$,

to równanie różniczkowe (26) ma stały współczynnik przy y(x). Rozwiązanie jest również bardzo proste. Ponadto można znaleźć rozwiązanie tego zadania, jeżeli południk opisany jest funkcjami:

$f(x) = a\ x^n$ - należy tu na przykład paraboloida obrotowa,

$f(x) = a\sqrt{1+\frac{x^2}{b^2}}$ - hiperboloida obrotowa,

$f(x) = a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$ - elipsoida obrotowa (w tym sfera).

W tych trzech przypadkach współczynnik przy y(x) w równaniu (26) jest zmienny, ale *Mathematica* potrafi znaleźć rozwiązanie jednorodnej części tego równania. Znalezienie rozwiązania równania niejednorodnego, gdy znamy całkę ogólną, nie sprawia większych problemów [4]. Rozwiązanie tego zadania dla hiperboloidy podano w pracy [5].

4. PRZYKŁAD

Przedstawimy przykład rozwiązania równania (26) z użyciem systemu *Mathematica*. Zajmiemy się przypadkiem powłoki, której południk opisany jest równaniem:

$f(x) = a\ sin(c\ x) + b\ cos(c\ x)$, a $\theta > 1$.

Poniżej przedstawiamy kolejne kroki rozwiązania.

Po pierwsze deklarujemy współczynnik funkcyjny równania (26), θ oznaczymy przez k :

```
In[1]:= g[x_]:=Simplify[(k^2-1) f''[x]/f[x]]
```

Następnie definiujemy funkcję opisującą południk:

```
In[2]:= f[x_]:=a Sin[c x] + b Cos[c x]
```

I w końcu samo równanie:

```
In[3]:= rownanie=y[x] g[x]+y''[x]==r[x];
```

W tym miejscu przywołujemy pakiet rozwiązywania równań różniczkowych.

```
In[4]:= <<Calculus`DSolve`
```

i rozwiązujemy równanie:

```
In[5]:= DSolve[rownanie,y[x],x]
```

Trwa to trochę, bo ładowane są pakiety całkowania.

```
On::none: Message SeriesData::csa not found.
General::intinit: Loading integration packages -- please wait.
```

Wreszcie jest:

```
Out[5]= ({y[x] ->
                                                 2
              C[1]            c Sqrt[-1 + k ] x
>       ------------------ + E                    C[2] +
                     2
        c Sqrt[-1 + k ] x
       E

>       Integrate[

                                2                              2
              c Sqrt[-1 + k ] DSolve`t - c Sqrt[-1 + k ] x
           -(E                                                   r[DSolve`t])
>          ------------------------------------------------------------------ +
                                                   2
                                  2 c Sqrt[-1 + k ]

                               2                              2
           -(c Sqrt[-1 + k ] DSolve`t) + c Sqrt[-1 + k ] x
          E                                                      r[DSolve`t]
>         ------------------------------------------------------------------,
                                                   2
                                  2 c Sqrt[-1 + k ]

>        {DSolve`t, 0, x}]}}
```

Wynik wymaga pewnego uproszczenia. Użyjemy w tym celu instrukcji podstawienia:

```
In[6]:= %/.{c Sqrt[-1+k^2] z_+c Sqrt[-1+k^2] v_->c Sqrt[-1+k^2] (z+v),
        DSolve`t->t}
Out[6]= {{y[x] ->

                                                 2
              C[1]            c Sqrt[-1 + k ] x
>       ------------------ + E                    C[2] +
                     2
        c Sqrt[-1 + k ] x
       E
```

```
                                    2
                          c Sqrt[-1 + k ] (t - x)
                     -(E                          r[t])
>        Integrate[------------------------------- +
                                                2
                                2 c Sqrt[-1 + k ]

                                2
            c Sqrt[-1 + k ] (-t + x)
          E                            r[t]
>         ------------------------------, {t, 0, x}]}}
                                2
                 2 c Sqrt[-1 + k ]
In[7]:= %/.z_ r[t]+ v_ r[t]->(z+v) r[t]
Out[7]= {{y[x] ->
                                                2
              C[1]              c Sqrt[-1 + k ] x
>       ------------------ + E                      C[2] +
                        2
        c Sqrt[-1 + k ] x
       E

                                    2                          2
                          c Sqrt[-1 + k ] (t - x)    c Sqrt[-1 + k ] (-t + x)
                     -E                             E
>        Integrate[(------------------------- + -------------------------)
                                          2                          2
                          2 c Sqrt[-1 + k ]          2 c Sqrt[-1 + k ]

>          r[t], {t, 0, x}]}}
```

Ta postać już jest zadowalająca. Zapiszemy rozwiązanie w formie bardziej czytelnej:

$$y(x) = C_1\, e^{-c\sqrt{\theta^2-1}\,x} + C_2\, e^{c\sqrt{\theta^2-1}\,x} + \int_0^x \frac{r(t)}{2c\sqrt{\theta^2-1}}\left[e^{c\sqrt{\theta^2-1}(x-t)} - e^{c\sqrt{\theta^2-1}(t-x)}\right]dt$$

Podstawiając do tego wyrażenia odpowiednie wielkości, otrzymać możemy analitycznie wszystkie wielkości rozwiązania podstawowego powłoki.

5. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione rozwiązanie pokazuje możliwości otwierające się obecnie na polu działalności badawczej. Wspomaganie komputerowe może być stosowane nie tylko do obliczeń numerycznych, ale także na etapie formułowania problemu.

Dzieje się tak dzięki rozwojowi systemów sztucznej inteligencji, jakim jest bez wątpienia system *Mathematica*. Narzędzie to pozwala nie tylko sformułować skomplikowane problemy, ale także, jak pokazano powyżej, umożliwić rozwiązanie zagadnień uważanych do niedawna za nierozwiązalne analitycznie.

Zagadnienia, które nie znalazły rozwiązań analitycznych, mogą być z powodzeniem rozwiązane numerycznie w ramach systemu lub przekazane do programów, lub systemów analizy numerycznej. Wyniki analizy numerycznej mogą być z kolei opracowane graficznie w ramach systemu *Mathematica*.

Interaktywny charakter współpracy z użytkownikiem oraz doskonałe walory graficzne pozwalają na sprawne prowadzenie przekształceń symbolicznych oraz wizualizację wyników. Najważniejsza jest jednak duża doza pewności co do poprawności działań.

System *Mathematica* nie jest jedynym narzędziem sztucznej inteligencji pozwalającym na symboliczne działania matematyczne w zakresie algebry, analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego, zagadnień stochastyki i wielu innych. Należy jednak do lepszych.

System ten rozwija się dynamicznie. Stanowi niewątpliwie wsparcie w rozwoju metod teorii mechaniki i zastosowaniach inżynierskich. Jest wykorzystywane szeroko w renomowanych uczelniach krajów rozwiniętych jako wspomaganie edukacyjne. Należy żywić nadzieję, że będzie to możliwe w niedalekiej przyszłości również w Polsce.

LITERATURA

[1] Wolfram St.: *Mathematica*: A System for Doing Mathematics by Computer, Second Edition, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Champaign, Illinois 1991.

[2] Walentyński R.: Statyka powłok obrotowych wychylonych-porównanie metod rozwiązania analitycznej i numerycznej, rozprawa doktorska, Politechnika Śląska w Gliwicach 1995.

[3] Bielak St.: Teoria powłok, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Studia i Monografie zeszyt 30, Opole 1990.

[4] Kamke E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1, Gewöhnliche Differetialgleichungen, Academische Verlagsresellschaft, Leipzig 1959, w rosyjskim tłumaczeniu przez Fomina S. W. , GIFML, Moskwa 1961.

[5] Walentyński R.: Application of Mathematica for solving analytical problems in theory of shells, proceedings of International Mathematica Symposium IMS'95, Southampton 1995.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Bielak

Wpłynęło do Redakcji dnia 5.06 1995 r.

Abstract

Systems of differential equations of shells of revolution are very complicated. Thus they were solved, up till now, only for spherical, conical and cylindrical shells.

The system of doing mathematics by computer - *Mathematica* has allowed to solve the problem. It has helped to reduce the system of eqns (8) to linear differential eqn (11) and system (15) to eqn (18). Eqns (11) and (18) has been reduced to one eqn (26) which has solution for wide class of shells.

The example shows how easy is to solve this eqn with *Mathematica*.

Mathematica as a tool of artificial intelligence can not only solve analytical and numerical tasks but firstly can be used to formulate problems. It does it with a very high level of reliability.