

Marian BŁACHUTA

Andrzej ORDYS

WŁASNOŚCI DYNAMICZNE ALGORYTMÓW ÅSTRÖMA I KALMANA W PROBLEMIE STEROWANIA MINIMALNO-WARIANCYJNEGO

Streszczenie. W artykule podaje się wzory określające wartość wariancji wyjścia obiektu CARMA regulowanego przy zastosowaniu praw sterowania Kalmana i Åströma w chwilach $i = 0, 1, 2 \dots$ gdzie $i = 0$ oznacza moment rozpoczęcia sterowania.

Wartość ta jest przedstawiona w postaci sumy składowej ustalonej, jednakowej dla obydwu algorytmów oraz składowej przejściowej. Wyniki zilustrowano przykładami.

1. WSTĘP

Poprzez problem sterowania minimalno-wariancyjnego rozumie się tu dobór prawa sterowania minimalizującego wariancję wyjścia obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu opisanego dyskretnym, liniowym i stacjonarnym modelem w przestrzeni stanu o skorelowanych między sobą zakłóceniach stanu i wyjścia. Modelowi temu w opisie wejściowo-wyjściowym odpowiada model CARMA [1], [2].

Algorytmem Kalmana nazywa się optymalne prawo sterowania uzyskane w przestrzeni stanu. Algorytm Åströma [1] wyprowadzony na gruncie teorii ciągów czasowych [2] może być również sformułowany w przestrzeni stanu. Jak wykazano w [7] stanowi on graniczną, asymptotyczną postać algorytmu Kalmana przy czasie zmiernym do nieskończoności. Równoważność tych dwu różnych postaci algorytmu Åströma była, przy coraz słabszych ograniczeniach, dowodzona w pracach [3]-[7].

W artykule zwraca się uwagę na nierównoważność algorytmów Åströma i Kalmana dla skończonych czasów sterowania. W szczególności pokazuje się, że wariancja wyjścia sterowanego obiektu może być przedstawiona jako suma składowej ustalonej i składowej przejściowej. Składowa ustalona ma dla obydwu algorytmów tę samą wartość podaną przez Åströma. Składowa przejściowa, zmierzająca z upływem czasu do zera, jest dla algorytmu Åströma zawsze większa od analogicznej dla algorytmu Kalmana.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU STEROWANIA OPTIMALNEGO

Obiekt regulacji jest określony równaniami:

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i \quad (1)$$

$$y_i = d^T x_i + v_i, \quad (2)$$

gdzie: $i = 0, 1, 2, \dots$ jest numerem kolejnej dyskretnej chwili czasu, x_i jest n -wymiarowym wektorem stanu, u_i - skalarnym sterowaniem, y_i - skalarnym wyjściem, v_i - skalarnym zakłóceniem; A - macierzą $n \times n$ wymiarową zaś b, g, d są wektorami n -wymiarowymi.

Zakłada się, że parametry Markowa spełniają zależności

$$d^T b = 0, \quad d^T A b = 0, \quad \dots \quad d^T A^{k-2} b = 0, \quad d^T A^{k-1} b = b_0 \neq 0 \quad (3)$$

oraz, że wartości własne macierzy

$$F = A - gd^T \quad (4)$$

leżą wewnątrz okręgu jednostkowego:

$$|\lambda_j(F)| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Warunek początkowy x_0 jest zmienną losową o rozkładzie normalnym:

$$E(x_0) = 0, \quad E(x_0 x_0^T) = Q_0 \quad (6)$$

Zakłócenie v_i jest białym szumem gaussowskim

$$E(v_i) = 0, \quad E(v_i v_j) = \sigma^2 \delta_{ij} \quad (7)$$

niezależnym od x_0 tzn. $E(v_i x_0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$

Wskaźnik jakości jest określony jako wariancja wyjścia w chwili przesuniętej w stosunku do chwili bieżącej i o k kroków w przód:

$$I_1 = E(y_{1+k}^2) \quad (8)$$

Oznaczmy przez \hat{y}_i informację pomiarową dostępną w chwili i .

W jej skład wchodzi aktualne i przeszłe wartości wyjścia i sterowania:

$$\vec{y}_1 = [y_0, y_1, \dots, y_1, u_0, u_1, \dots, u_{1-1}] \quad (9)$$

Zadanie syntezy optymalnego algorytmu sterowania polega na znalezieniu ciągu funkcji $f_1(\vec{y}_1)$ określających sterowanie minimalizujące w każdej chwili i ($i = 0, 1, \dots$) wskaźnik (8) przy informacji \vec{y}_1 .

$$u_1^0 = \arg \min I_1 | \vec{y}_1 = f_1(\vec{y}_1) \quad (10)$$

Jak wykazano w [7], układowi (1), (2) z warunkiem (3) odpowiada w opisie wejściowo-wyjściowym model CARMA o opóźnieniu k :

$$A(z^{-1})y_1 = z^{-k} B(z^{-1})u_1 + C(z^{-1})v_1$$

gdzie z^{-1} jest operatorem opóźnienia oraz

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}, \quad m = n-k$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}$$

Warunek (5) jest równoważny wymaganiu, aby wielomian

$\det(zI - F) = \tilde{C}(z) = z^n C(z^{-1})$ posiadał zera spełniające nierówność

$|z_j| < 1, j = 1, 2, \dots, n$. Proces CARMA nazywa się wówczas odwracalnym

Odwracalność jest warunkiem koniecznym istnienia algorytmu Åströma.

Zazwyczaj wymaga się również aby obiekt był minimalno-fazowy [1], tzn. ab

zera wielomianu $\tilde{B}(z) = z^m B(z^{-1})$ leżały wewnątrz okręgu jednostkowego

Chociaż zera $\tilde{B}(z)$ nie mają wpływu na istnienie i wartość wskaźnika jakości

to minimalno-fazowość wraz z odwracalnością stanowią WKW stabilności układu algorytmu Åströma.

Jako wskaźnik jakości w problemie Åströma przyjmuje się

$$I = \lim_{l \rightarrow \infty} I_l = \lim_{l \rightarrow \infty} E(y_{l+k}^2) \quad (11)$$

3. ALGORYTMY KALMANA I ÅSTRÖMA

Obecnie przytoczymy w zwięzłej formie wyprowadzone w [7] algorytmy sterowania dla problemów sformułowanych w poprzednim punkcie.

Algorytm Kalmana

Prawo sterowania minimalizujące wskaźnik (9) w każdej chwili i , $i = 0, 1, 2, \dots$, dla obiektu opisanego równaniami (1)-(5) ma postać:

$$u_1^o = -\frac{1}{b_o} d^T A^{k-1} \left[F \hat{x}_1^o + g y_1 \right] \quad (12)$$

przy czym \hat{x}_1^o jest oceną stanu wyznaczoną przez filtr Kalmana o równaniach:

$$\hat{x}_{i+1}^o = \hat{x}_{i+1/1}^o + k_{i+1} \left[y_{i+1} - d^T \hat{x}_{i+1/1}^o \right], \quad \hat{x}_{0/-1}^o = 0 \quad (13)$$

$$\hat{x}_{i+1/1}^o = F \hat{x}_i^o + b u_i + g y_i \quad (14)$$

gdzie:

$$k_{i+1} = \frac{F P_i F^T d}{\sigma + d^T F P_i F^T d} \quad (15)$$

$$P_{i+1} = F P_i F^T - \frac{F P_i F^T d d^T F P_i F^T}{\sigma + d^T F P_i F^T d}, \quad P_0 = Q_0 - \frac{Q_0 d d^T Q_0}{\sigma + d^T Q_0 d} \quad (16)$$

oraz

$$\hat{x}_1^o = E_{\vec{y}_1} x_1, \quad \hat{x}_{i+1/1}^o = E_{\vec{y}_{1-1}} x_1, \quad P_0 = E(x_1 - \hat{x}_1^o)(x_1 - \hat{x}_1^o)^T \quad (17)$$

Algorytm Åströma, minimalizujący wskaźnik (11) jest stacjonarny tzn. $f_1(\vec{y}_1) = f(\vec{y}_1)$, dla $i = 0, 1, \dots$

$$u_1^o = f(\vec{y}_1) = \arg \min I \quad (18)$$

Jak wykazano w [7] może być on sformułowany w przestrzeni stanu w postaci równoważnej zapisowi operatorowemu [1].

Algorytm Åströma (w przestrzeni stanu)

Prawo sterowania minimalizujące wskaźnik (11) dla obiektu opisanego równaniami (1)-(5) ma postać:

$$u_1^o = -\frac{1}{b_0} d^T A^{k-1} \left[F \hat{x}_1 + g y_1 \right] \quad (19)$$

przy czym \hat{x}_1 jest oceną stanu wyznaczoną przez filtr o równaniu:

$$\hat{x}_{i+1} = F \hat{x}_i + b u_i + g y_i, \quad \hat{x}_0 = 0 \quad (20)$$

Uwaga

Istotna różnica między algorytmem Kalmana i Åströma polega na równaniu filtru. Algorytm Åströma korzysta z filtru o postaci (20) będącej uproszczoną wersją filtru Kalmana (13)-(17) uzyskaną po położeniu $P_1 = 0$, $i = 0, 1, \dots$

Filtr Kalmana zmierza, przy $i \rightarrow \infty$, do postaci (20) w związku z czym w granicy obydwie algorytmy są równoważne. Dla skończonych czasów sterowania algorytmu Kalmana jest lepszy od algorytmu Åströma, wymaga on jednak dodatkowo znajomości macierzy Q_0 .

4. WARJANCJA WYJŚCIA UKŁADÓW Z ALORYTMAMI KALMANA I ÅSTRÖMA

Główne wyniki pracy sformułujemy w postaci dwóch twierdzeń

Twierdzenie 1

Wartość wariancji wyjścia obiektu (1)-(5) regulowanego za pomocą algorytmu Kalmana (12)-(17) wynosi

$$I_1^k = d^T A^{k-1} F P_1 F^T A^{k-1} d + \sigma \sum_{j=0}^{k-1} e_j^2, \quad i = 0, 1, \dots \quad (21)$$

gdzie

$$e_0 = 1, \quad e_1 = d^T g, \quad \dots, \quad e_{k-1} = d^T A^{k-2} g \quad (22)$$

zaś macierz P_1 jest rozwiązaniem równania Riccatiego

$$P_{i+1} = F P_i F^T - \frac{F P_i F^T d d^T F P_i F^T}{\sigma d^T F P_i F^T d} \quad (23)$$

z warunkiem początkowym:

$$P_0 = Q_0 - \frac{Q_0 d d^T Q_0}{\sigma + d^T Q_0 d} \quad (24)$$

Asymptotyczną wartością wskaźnika jakości jest

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} I_1^k = \sigma \sum_{j=0}^{k-1} e_j^2 \quad (25)$$

Twierdzenie 2

Wartość wariancji wyjścia obiektu (1)-(5) regulowanego za pomocą algorytmu Åströma (19), (20) wynosi:

$$I_1^A = d^T A^{k-1} F S_1 F^T A^{k-1} d + \sigma \sum_{j=0}^{k-1} e_j^2, \quad i = 0, 1, \dots \quad (26)$$

gdzie macierz S_1 jest rozwiązaniem równania Lapunowa

$$S_{i+1} = F S_i F^T \quad (27)$$

z warunkiem początkowym

$$S_0 = Q_0 \quad (28)$$

Asymptotyczną wartością wskaźnika jakości jest

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} I_1^A = \sigma \sum_{j=0}^{k-1} e_j^2 \quad (29)$$

Dowód twierdzenia 1

Jak wykazano w [7]:

$$I_1^k = \min_{u_1} I_1 = E(\tilde{y}_{1+k}^{\circ 2}) \quad (30)$$

gdzie

$$\tilde{y}_{1+k}^{\circ} = y_{1+k} - \hat{y}_{1+k}^{\circ} \quad (31)$$

jest błędem k-krokowej predykcji wyjścia zaś $\hat{y}_{1+k}^o = E_{|\hat{y}_1} y_{1+k}$ jest oceną wyjścia w chwili $i+k$ na podstawie informacji bieżącej w chwili 1.

Wyjście obiektu w chwili $i+k$ można przedstawić wzorem:

$$y_{1+k} = d^T A^k x_i + b_o u_i + d^T A^{k-1} g v_i + \sum_{j=0}^{k-1} e_j v_{i+k-j} \quad (32)$$

Wyznaczając z równania (2) $v_i = y_i - d^T x_i$ i wstawiając do (32) otrzymujemy

$$y_{1+k} = d^T A^{k-1} (F x_i + g y_i) + b_o u_i + \sum_{j=0}^{k-1} e_j v_{i+k-j} \quad (33)$$

oraz

$$\hat{y}_{1+k}^o = d^T A^{k-1} (F \hat{x}_i + g y_i) + b_o u_i \quad (34)$$

gdź

$$E_{|\hat{y}_1} \sum_{j=0}^{k-1} e_j v_{i+k-j} = 0, \quad E_{|\hat{y}_1} x_i = \hat{x}_i$$

Zatem błąd k-krokowej predykcji wyjścia jest określony zależnościami:

$$\tilde{y}_{1+k}^o = d^T A^{k-1} F \tilde{x}_i^o + \sum_{j=0}^{k-1} e_j v_{i+k-j} \quad (35)$$

gdzie:

$$\tilde{x}_i^o = x_i - \hat{x}_i^o \quad (36)$$

jest błędem oceny stanu.

Wartość wskaźnika jakości wyniesie zatem:

$$I_1^K = d^T A^{k-1} F (E \tilde{x}_i^o \tilde{x}_i^{oT}) F^T A^{k-1} d + \sigma \sum_{j=0}^{k-1} e_j^2 \quad (37)$$

Jednakże, przy zastosowaniu filtra Kalmana

$$E(\tilde{x}_i^o \tilde{x}_i^{oT}) = P_i \quad (38)$$

gdzie P_i jest rozwiązaniem równania Riccatiego (23).

Własność graniczna (25) wynika z twierdzenia Cainesa [3], zgodnie z którym, przy spełnieniu (5) niezależnie od P_0 zachodzi:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_1 = 0 \quad \square. \quad (39)$$

Dowód twierdzenia 2

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 można stwierdzić, że wartość wskaźnika jest określona wzorem o postaci (37). Jednakże ze względu na zastosowanie filtra (20) wartość kowariancji błędu filtracji będzie inna. Podstawmy $v_1 = y_1 - d^T x_1$ wyznaczone z równania (2) do (1). Otrzymamy:

$$x_{1+1} = Fx_1 + bu_1 + gy_1, \quad (40)$$

co po odjęciu od (20) daje równanie błędu oceny stanu dokonywanej przez filtr (20):

$$\tilde{x}_{1+1} = F\tilde{x}_1, \quad (41)$$

przy czym

$$\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0 = x_0 \quad (42)$$

Jest zmienną losową normalną o zerowej wartości oczekiwanej i kowariancji:

$$E(\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T) = Q_0 \quad (43)$$

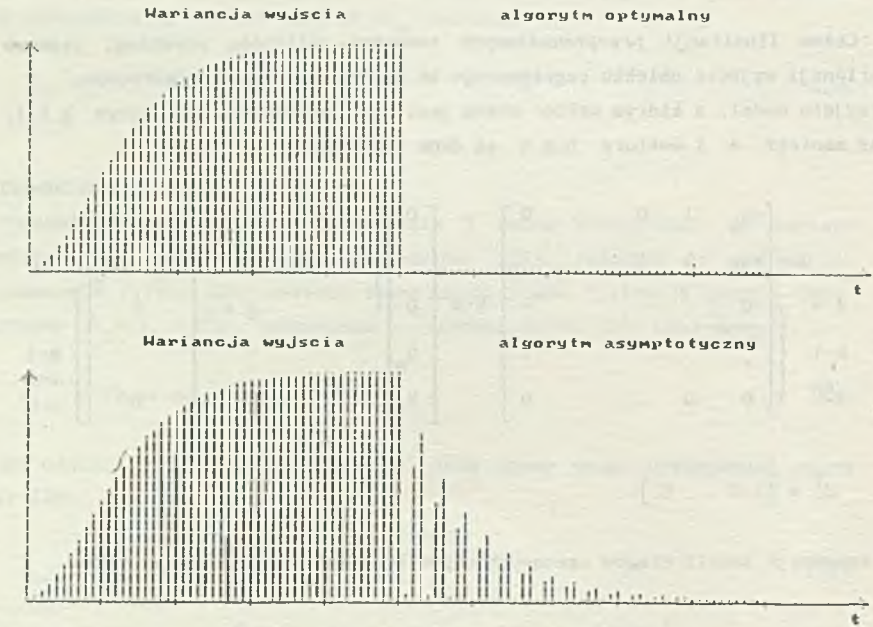
Oznaczmy

$$E(\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T) = S_1 \quad (44)$$

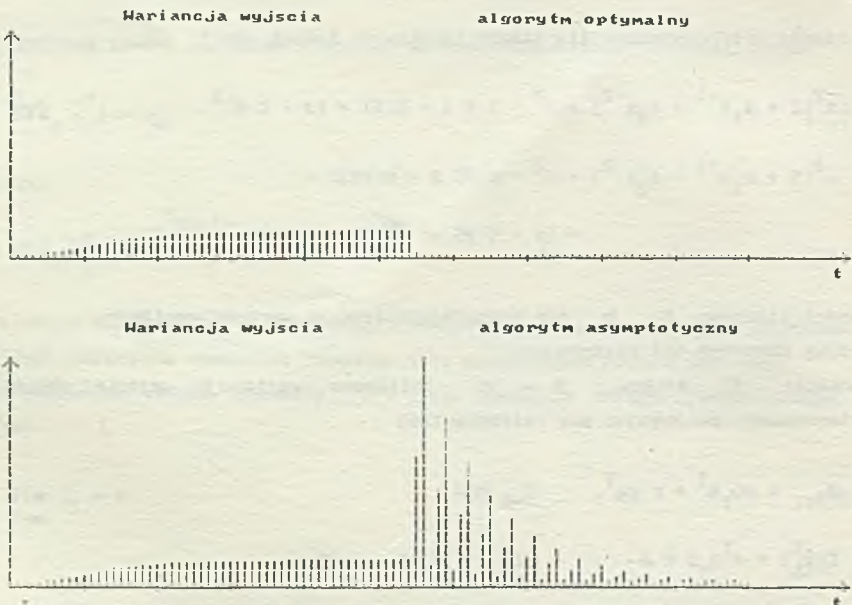
Kowariancja wektora \tilde{x}_1 określonego równaniem (41) z warunkiem początkowym (42) jest określona równaniem Lapunowa (27) z warunkiem początkowym (28).

Jeśli wartości własne macierzy F leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, wówczas:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_1 = 0 \quad \square. \quad (45)$$



Rys. 1. Przebiegi wariancji wyjścia dla opóźnienia równego 1

Fig. 1. Runs of the output variance for delay $k = 1$ 

Rys. 2. Przebiegi wariancji wyjścia dla opóźnienia równego 5

Fig. 2. Runs of the output variance for delay $k = 5$

Następnie przyjęto $Q_0 = W_0$ i wyznaczono wartości wskaźników I_1^k oraz I_1^A korzystając ze wzorów (21)-(24) oraz (26)-(28). Wyniki obliczeń dla $k = 1$, $k = 5$, przedstawiono kolejno na rys. 1, 2.

6. PODSUMOWANIE

W pracy podano wzory pozwalające na obliczenie wariancji wyjścia obiektu CARMA regulowanego za pomocą algorytmów Åströma i Kalmana.

Wskazano na różnicę tych wartości w stanach przejściowych.

Pokazano, że charakter stanu przejściowego po zastosowaniu któregośkolwiek z prezentowanych algorytmów jest zależny jedynie od wielomianu $C(z^{-1})$ zaś jego udział w wartości wskaźnika jakości od $A(z^{-1})$ oraz k .

Zamieszczony przykład wskazuje, że proces przejściowy po zastosowaniu algorytmu Kalmana może być wyraźnie lepszy niż przy zastosowaniu algorytmu Åströma. Wymienione czynniki winny być brane pod uwagę przy doborze algorytmów sterowania dla procesów szarżowych oraz doborze algorytmów regulacji samonastrajającej, które zmieniając parametry regulatora pobudzają procesy przejściowe.

LITERATURA

- [1] Åström K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, N.Y., 1970.
- [2] Box G.E.P./ Jenkins G.M.: Time Series Analysis - forecasting and control, Holden-Day, San Francisco 1976.
- [3] Caines P.E.: Relationship between Box-Jenkins-Åström control law and Kalman linear regulator, Proc. IEE 119, No 5, 1972.
- [4] Hughes D.J.: Equivalence of the Box-Jenkins-Åström control law to the Kalman regulator, El.Lett., 9, 1973.
- [5] Watson W.: Box-Jenkins-Åström linear control laws and their equivalence, Proc. IEE, 123, 1976.
- [6] Lam K.P.: Implicit and explicit self-tuning regulators, Ph.D. thesis, Univ. of Oxford, 1980.

- [7] Błachuta M., Ordys A.: Związek algorytmów Åströma i Kalmana dla problemu sterowania minimalno-wariancyjnego, Z.N. Politechniki Śl., seria Automatyka, z. 74, 1984.

Recenzent: Prof.dr inż. Henryk Górecki

Przyjęto do Redakcji 27.07.1987 r.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ АШТРОМА И КАЛМАНА
В ПРОБЛЕМЕ МИНИМАЛЬНО-ВАРИАНЦИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе исследуется линейный объект, дискретный во времени с одним выходным сигналом y , одним управляющим входом u , и одним мешающим входом v . Объект описывается уравнением:

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i \quad (\text{I})$$

$$y_i = d^T x_i + v_i \quad (\text{II})$$

Принимается, что задачей системы регулирования является минимизация вариации выхода из объекта:

$$J_i = E y_{i+k}^2 \quad (\text{III})$$

Таким образом получается закон управления [7]:

$$u_i = - \frac{1}{d^T A^{k-1} b} d^T A^{k-1} [(A-gd^T) \hat{x}_i + gv_i] \quad (\text{IV})$$

где \hat{x}_i обозначает оценку состояния x_i .

Алгоритм (IV) является алгоритмом Кальмана тогда, если оценка состояния происходит с оптимального фильтра (фильтра Кальмана). Если оценка состояния рассчитывается через асимптотический вид фильтра, то полученный таким образом алгоритм становится эквивалентным алгоритму Åстрöма (доказательство находится в [7]). В работе выводятся формулы, позволяющие рассчитать изменения во времени вариации выхода объекта (III) для представленных выше алгоритмов. Эта величина является составной суммой определенной, одинаковой для обоих алгоритмов и временной составной. Приводится программный пример позволяющий сравнить качества алгоритмов.

DYNAMICAL PROPERTIES OF ÅSTRÖM AND KALMAN ALGORITHMS
IN THE MINIMUM-VARIANCE CONTROL PROBLEM

S u m m a r y

In the paper a linear, discrete in the time object is considered. It is assumed to have single output signal y , single input-control signal u and single input-disturbance signal v . The object is described by the following state equations:

$$x_{i+1} = A x_i + b u_i + g v_i \quad (I)$$

$$y_i = d^T x_i + v_i \quad (II)$$

The task of control system is to minimize the object's output variance:

$$J_1 = E y_{1=k}^2 \quad (III)$$

In such a way the following control law [7] could be obtained:

$$u_1 = - \frac{1}{d^T A^{k-1} b} d^T A^{k-1} [(A - g d^T) \hat{x}_1 + g y_1] \quad (IV)$$

where \hat{x}_1 is an estimation of the state x_1 .

The algorithm (IV) will be called the Kalman algorithm if the state estimation is calculated by an optimal filter (the Kalman filter). If the state estimation \hat{x}_1 is done by the asymptotic form of the filter the algorithm obtained will become equivalent to the Åström algorithm (the proof is done in [7]).

In this article formulas which enable computation of the variation in the time of object's output variance (III) for both algorithms presented above are deduced. This variance is a sum of a transient part. A numerical example is presented which serves to compare the quality of algorithms.