ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: AUTOMATYKA z. 103 Nr kol. 1090

Abdul-Rahman HUSSIAN

AGREGACJA MODELI MATEMATYCZNYCH PEWNEJ KLASY SYSTEMÓW PRODUKCYJNYCH

Streszczenie. W hierarchicznie zorganizowanym przedsiębiorstwie przemysłowym każda komórka produkcyjna za wyjątkiem całego przedsiębiorstwa i jego komórek elementarnych jest równocześnie systemem produkcyjnym i podsystemem systemu produkcyjnego wyższego poziomu organizacyjnego. Model matematyczny takiego podsystemu jest zagregowanym modelem matematycznym odpowiedniego systemu produkcyjnego.

W pracy przedstawiono metodę agregacji modeli matematycznych systemów produkcyjnych z podsystemami o jednym wiodącym strumieniu materiałowym, mogącymi pracować tylko w jednym wariancie produkcyjnym. Przedyskutowano możliwości uogólnienia metody na systemy produkcyjne z podsystemami o wielu wielkościach wiodących, przełączanymi okresowo do pracy w różnych wariantach produkcyjnych.

1. STRUKTURA SYSTEMÓW PRODUKCYJNYCH

Strukturę schematu przepływu materiałów w systemie produkcyjnym takim jak przedsiębiorstwo przemysłowe, jego zakład lub wydział można przedstawić jak na (rys. 1), przy czym [4]

N - liczba podsystemów produkcyjnych,

I^r - liczba strumieni materiałów dopływających do systemu,

I^d - liczba strumieni materiałów odpływających z systemu,

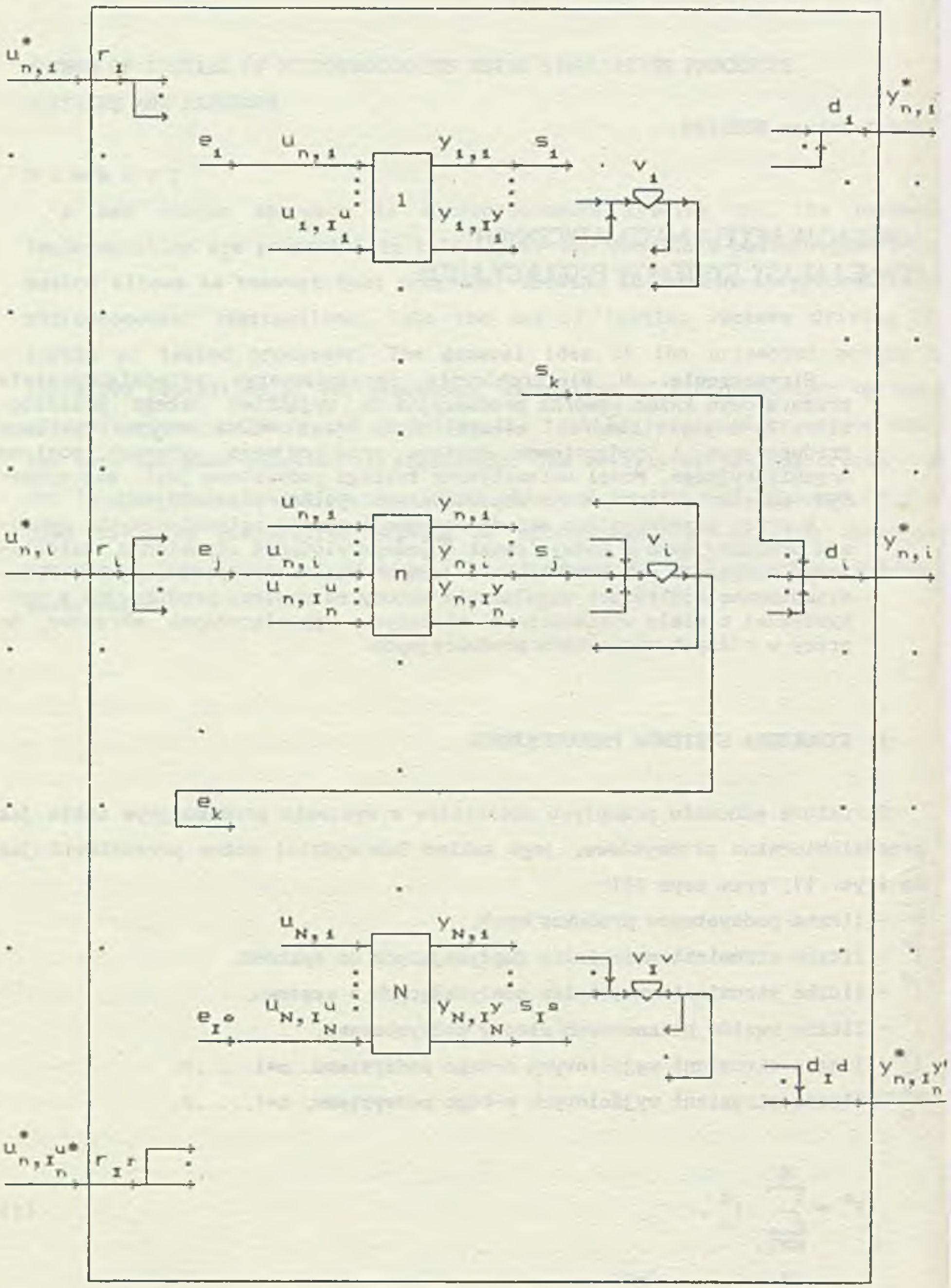
I^v - liczba węzłów bilansowych między podsystemami,

I^u_n - liczba strumieni wejściowych n-tego podsystemu, n=1,...,N,

I^y_n - liczba strumieni wyjściowych n-tego podsystemu, n=1,...,N,

$$I^e = \sum_{n=1}^{N} I^u_n , \tag{1}$$

$$I^s = \sum_{n=1}^{N} I^y_n . \tag{2}$$



Rys. 1. Struktura systemu produkcyjnego

Fig. 1. The production system structure

Korzystając z łącznej indeksacji strumieni materiałowych dopływających do wszystkich podsystemów, $j=1,\dots,I^e$, i odpływających z nich $j=1,\dots,I^s$, strukturę powiązań elementów systemu produkcyjnego można określić podając wielkości:

$$K_j^e = \begin{cases} i, & \text{jeśli } j\text{-ty strumień wejściowy podsystemów dopływa} \\ & \text{z } i\text{-tego węzła bilansowego, } i \in \{1,\dots,I^v\}, \\ -i, & \text{jeśli } j\text{-ty strumień wejściowy podsystemów dopływa} \\ & \text{z } i\text{-tego wejścia systemu, } i \in \{1,\dots,I^r\}, \end{cases} \quad (3)$$
$$\text{dla } j=1,\dots,I^e,$$

$$K_j^s = \begin{cases} i, & \text{jeśli } j\text{-ty strumień wyjściowy podsystemów odpływa do} \\ & i\text{-tego węzła bilansowego, } i \in \{1,\dots,I^v\}, \\ -i, & \text{jeśli } j\text{-ty strumień wyjściowy podsystemów odpływa do} \\ & i\text{-tego wyjścia systemu, } i \in \{1,\dots,I^d\}, \end{cases} \quad (4)$$
$$\text{dla } j=1,\dots,I^s.$$

Przepływ materiałów w systemie produkcyjnym (rys. 1) opisują zależności:

$$e_j = u_{n,i}\,, \quad \text{dla} \quad j=I_n^{el}+i, \quad i=1,\dots,I_n^u, \quad n=1,\dots,N, \quad (5)$$

$$s_j = y_{n,i}\,, \quad \text{dla} \quad j=I_n^{sl}+i, \quad i=1,\dots,I_n^y, \quad n=1,\dots,N, \quad (6)$$

$$r_i = \sum_{j\in J_i^r} e_j\,, \quad \text{dla} \quad i=1,\dots,I^r, \quad (7)$$

$$d_i = \sum_{j\in J_i^d} s_j\,, \quad \text{dla} \quad i=1,\dots,I^d, \quad (8)$$

$$\dot{v} = \sum_{j\in J_i^s} s_j - \sum_{j\in J_i^e} e_j, \quad \text{dla} \quad i=1,\dots,I^v, \quad (9)$$

w których

$u_{n,i}, y_{n,i}$ - natężenia przepływu w strumieniach wejściowych i wyjściowych n-tego podsystemu, $n=1,\dots,N$;

e_j, s_j - natężenia przepływu w strumieniach wejściowych i wyjściowych zbioru wszystkich podsystemów;

r_i, d_i - natężenia przepływu w strumieniach materiałowych wejściowych i wyjściowych systemu,

v_i - zapasy w wewnętrznych węzłach bilansowych systemu, natomiast

$$I_n^{el} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n=1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k^u, & \text{dla } n=2,\dots,N, \end{cases} \tag{10}$$

$$I_n^{sl} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n=1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k^y, & \text{dla } n=2,\dots,N, \end{cases} \tag{11}$$

$$J_i^r = \{j \in \{1,\dots,I^e\}: \quad K_j^e = -i\}, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^r, \tag{12}$$

$$J_i^d = \{j \in \{1,\dots,I^s\}: \quad K_j^s = -i\}, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^d, \tag{13}$$

$$J_i^e = \{j \in \{1,\dots,I^e\}: \quad K_j^e = i\}, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^v, \tag{14}$$

$$J_i^s = \{j \in \{1,\dots,I^s\}: \quad K_j^s = i\}, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^v, \tag{15}$$

2. MODEL PODSYSTEMU PRODUKCYJNEGO

W praktyce natężenia przepływu we wszystkich strumieniach materiałowych elementarnego podsystemu produkcyjnego nadążają za natężeniami przepływu w jednym lub kilku strumieniach wiodących. W przypadku ciągłych procesów technologicznych koordynację przepływu materiałów zapewniają układy regulacji bepośredniej [2], a w przypadku procesów dyskretnych - synchronizacja operacji wykonywanych na współpracujących stanowiskach roboczych [3]. Ograniczając rozważania do podsystemów produkcyjnych o jednym strumieniu wiodącym, wybieranym zawsze spośród strumieni wejściowych, otrzymujemy statyczny model matematyczny n-tego podsystemu o postaci:

$$u_{n,i} = C_{n,i}\, w_n, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I_n^u, \quad n = 1,\dots,N \tag{16}$$

$$y_{n,i} = G_{n,i}\, w_n, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I_n^u, \quad n = 1,\dots,N \tag{17}$$

przy czym

$C_{n,i}$, $G_{n,i}$ - współczynniki stałe,

w_n - natężenie przepływu w strumieniu wiodącym n-tego podsystemu.

Ponieważ numeracja strumieni wejściowych danego podsystemu jest dowolna, można przyjąć, że strumieniowi wiodącemu przyporządowany jest zawsze indeks 1, czyli

$$w_n = u_{n,1}, \qquad \text{dla} \quad n = 1,\dots,N \tag{17}$$

Równania (16),(17),(18) dotyczą podsystemów produkcyjnych mogących pracować tylko w jednym wariancie produkcyjnym. Nie rozpatrujemy więc systemów produkcyjnych, których podsystemy mogą być przełączane na pracę w różnych wariantach, różniących się asortymentem zużywanych bądź wytwarzanych mateirиałów.

3. PROBLEM AGREGACJI MODELU MATEMATYCZNEGO SYSTEMU PRODUKCYJNEGO

Między natężeniami przepływu w strumieniach zewnętrznych systemu produkcyjnego r_i, d_i i odpowiadającymi im natężeniami przepływu w strumieniach materiałowych podsystemu wyższego poziomu $u^*_{n,i}$, $y^*_{n,i}$ zachodzą następujące zależności (rys. 1):

$$u^*_{n,i} = r_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^{u^*}_n, \qquad I^{u^*}_n = I^r \tag{19}$$

$$y^*_{n,i} = d_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^{y^*}_n, \qquad I^{y^*}_n = I^d \tag{20}$$

Chcąc zachować tę samą strukturę modeli matematycznych systemów produkcyjnych z różnych poziomów hierarchii organizacyjnej należy przyjąć, że

$$u^*_{n,i} = C^*_{n,i}\, w^*_n, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^{u^*}_n, \quad n = 1,\dots,N^* \tag{21}$$

$$y^*_{n,i} = G^*_{n,i}\, w^*_n, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^{y^*}_n, \quad n = 1,\dots,N^* \tag{22}$$

$$w^*_n = u^*_{n,1}, \qquad \text{dla} \quad n = 1,\dots,N^* \tag{23}$$

Zależności (21),(22),(23) są dla danego n zagregowanym modelem matematycznym odpowiedniego systemu produkcyjnego opisanego równaniami (5)... (9), (16), (17), (18). Problem agregacji polega więc na wyznaczeniu współczynników $C^{*}_{n,i}$, dla $i=1,\dots,I^{u^*}_n$; $G^{*}_{n,i}$; dla $i=1,\dots,I^{y^*}_n$, na podstawi parametrów struktury systemu produkcyjnego:

N, I^r, I^d, I^v, I^u_n $(n=1,\dots,N)$, I^y_n $(n=1,\dots,N)$,

K^e_j $(j=1,\dots,I^e)$, K^s_j $(j=1,\dots,I^s)$

i współczynników modeli matematycznych podsystemów:

$C_{n,i}$ $(i=1,\dots,I^u_n)$, $G_{n,i}$ $(i=1,\dots,I^y_n)$, dla $n=1,\dots,N$.

Problemu agregacji nie można rozwiązać przez przekształcenie model systemu produkcyjnego, ponieważ model zagregowany (21), (22), (23) ma tylk 1 stopień swobody, a model systemu przed agregacją jest znacznie bardzie elastyczny. Elastyczność ta jest zresztą niezbędna, gdyż w system sterowania produkcją jest wykorzystywana do likwidacji skutków tej częś zakłóceń ciągłości produkcji, na którą nie reagują jednostki sterując wyższych poziomów systemu sterowania.

Oczywistym usztywnieniem modelu dla potrzeb agregacji jest zastąpieni równań (9) przez zależność

$$\sum_{j\in J^s_i} s_j - \sum_{j\in J^e_i} e_j = 0\,, \qquad \text{dla } i = 1,\dots,I^v \tag{24}$$

co odpowiada rezygnacji z możliwości akumulacyjnych wewnętrznych magazynó buforowych systemu produkcyjnego. To usztywnienie na ogół nie wystarcza, gdy nie są określone stałe proporcje między natężeniami odpływu materiałów z tyc samych węzłów bilansowych lub tych samych wejść systemu, ani analogiczn proporcje między natężeniami dopływu do węzłów bilansowych i wyjść system jako całości. Narzuca się przy tym pytanie, na jakiej podstawie należałob określać te proporcje.

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Proponuje się, aby stałe proporcje między natężeniami odpływu z węzłó bilansowych i wejść systemu e_j oraz między natężeniami dopływu do węzłó bilansowych i wyjść systemu s_j obliczyć jako równe stosunkom międz wartościami normatywnymi lub średnimi długookresowymi tych wielkości $\hat{e}_j$, $\hat{s}_j$. Znając te proporcje można już rozwiązać problem agregacji drogą przekształce odpowiednio usztywnionego modelu systemu produkcyjnego. Ponieważ jedna wartości $\hat{e}_j$, $\hat{s}_j$ jednoznacznie określają odpowiednie natężenia przepływu strumieniach zewnętrznych systemu:

$$\hat{r}_i = \sum_{j \in J_i^r} \hat{e}_j, \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^r \tag{25}$$

$$\hat{d}_i = \sum_{j \in J_i^d} \hat{s}_j, \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^d \tag{26}$$

a intersujące są tylko zależności dotyczące strumieni zewnętrznych, problem agregacji można rozwiązać znacznie łatwiej stosując proste wzory:

$$C^{*}_{n,i} = \frac{\hat{r}_i}{\hat{r}_1}, \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^r \tag{27}$$

$$G^{*}_{n,i} = \frac{\hat{d}_1}{\hat{r}_1}, \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,I^d \tag{28}$$

Zadanie komplikuje się, gdy tzw. "normalnych" natężeń przepływu $\hat{r}_i$, $\hat{d}_i$ nie można wyznaczyć korzystając z projektu programu produkcji ani na podstawie długookresowego planu produkcji. Można je wówczas uzyskać rozwiązując zadanie optymalizacji planu produkcji przy założeniu braku zakłóceń ciągłości produkcji. Powszechnie przyjmuje się założenie, że w przypadku braku zakłóceń optymalne plany produkcji są stałe w kolejnych okresach planowania, a stąd wniosek, że zadanie można sprowadzić do modelu optymalizacji statycznej.

Stosując model planowania produkcji przedstawiony w [5] do zadania statycznego, sformułowanego dla systemów produkcyjnych o modelu (5)...(9), (16), (17), (18), otrzymujemy zadanie maksymalizacji funkcji natężenia zysku

$$F = \sum_{i=1}^{I^d} \alpha_i\, d_i - \sum_{i=1}^{I^r} \beta_i\, r_i - \sum_{i=1}^{N} \gamma_n\, w_n \tag{29}$$

przy ograniczeniach (5)...(8), (16), (17), (18), (24) oraz

$$0 \le w_n \le w_n^m, \qquad \text{dla} \quad n = 1,\dots,N \tag{30}$$

przy czym

α_i, β_i - ceny produktów finalnych, $i=1,\dots,I^d$, i materiałów dopływających d systemu produkcyjnego, $i=1,\dots,I^r$,

γ_n - jednostkowe zmienne koszty produkcji w podsystemach, $n = 1,\dots,N$, obliczone z pominięciem kosztów zużycia materiałów, których strumienie są uwzględnione w strukturze systemu produkcyjnego,

w_n^m maksymalne natężenie przepływu w strumieniach wiodących podsystemów produkcyjnych, $n = 1,\dots,N$.

W pewnych przypadkach układ ograniczeń zadania optymalizacji należy uzupełnić ograniczeniami równościowymi na wielkość produkcji wybranych produktów finalnych

$$d_i = d_i^p, \qquad \text{dla określonych } i \in \{1,\dots,I^d\}, \tag{31}$$

lub wielkość przerobu materiałów wejściowych

$$r_i = r_i^p, \qquad \text{dla określonych } i \in \{1,\dots,I^r\}. \tag{32}$$

Oczywiście warunków (31), (32) nie może być zbyt wiele, bo układ ograniczeń mógłby stać się sprzeczny.

5. DYSKUSJA

Jeśli dane do wzorów (27), (28) muszą być wyznaczane na podstawie rozwiązania zadania optymalizacji (29), (5)...(8), (16), (17), (18), (24), (30), (31), (32), to oprócz parametrów struktury systemu produkcyjnego i współczynników modeli matematycznych podsystemów produkcyjnych trzeba znać ceny α_i, β_i, koszty jednostkowe γ_n oraz parametry ograniczeń w_n^m, d_i^p, r_i^p. Ceny są dane dla przedsiębiorstwa jako całości, lecz na ogół nie są znane dla składowych komórek produkcyjnych, np. dla wydziałów. Z kolei modele (16), (17), (18) są początkowo dane tylko dla podsystemów elementarnych, a dla podsystemów produkcyjnych wyższych poziomów mają być obliczone w ramach agregacji i nie można zakładać, że są znane. Wynika stąd, że zadanie optymalizacji musi być rozwiązane dla systemu produkcyjnego całego przedsiębiorstwa, a podsystemami tego systemu mają być podsystemy elementarne, których może być bardzo dużo. Przewidywane w związku z tym trudności obliczeniowe nie są jednak tak groźne jak w przypadku optymalizacji planowania operatywnego, ponieważ zadanie (29), (5)...(8), (16), (17), (18), (24), (30), (31), (32) nie musi być rozwiązane w określonym, krótkim czasie. Ponadto zadanie to jest zadaniem optymalizacji statycznej, podczas gdy planowanie operatywne wykorzystuje bardziej rozbudowany model dynamiczny. Dlatego można się spodziewać, że komputer nadający się do obliczeń operatywnych planów produkcji będzie wystarczający także do rozwiązania zadania optymalizacji dla potrzeb agregacji modeli systemów produkcyjnych.

Zaproponowaną metodę agregacji można uogólnić na systemy produkcyjne z podsystemami o wielu wiodących strumieniach materiałowych, pracującymi okresowo w różnych wariantach produkcyjnych [4]. Nie można jednak wtedy stosować prostych wzorów (27), (28). Procedury obliceniowe, którymi należy zastąpić te wzory będą zapewne dość złożone ze względu na konieczność operowania wieloma dodatkowymi danymi o strukturze systemów produkcyjnych, z których część zmienia się przy zmianach wariantów produkcyjnych. Dane te są nieistotne dla prostych systemów produkcyjnych będących przedmiotem tej pracy.

LITERATURA

[1] Findeisen W.: Wielopoziomowe układy sterowania. PWN, Warszawa 1974.

[2] Niederliński A.: Kompleksowa automatyka procesów przemysłowych. Aspekty funkcjonalne. Skrypt Pol.Śl. nr 900, Gliwice 1980.

[3] Zaborowski M.: Agregacja stanowisk roboczych dla potrzeb sterowania dyskretnymi procesami produkcji. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Automatyka, nr 85, ss.257-268, Gliwice 1988.

[4] Zaborowski M.: Struktura systemów produkcyjnych. Referat na II Konferencję Naukową Programu RP.I.02, Kazimierz n. Wisłą 1988. (Złożono do druku w Archiwum Automatyki i Telemechaniki).

[5] Zaborowski M.: Optymalizacja planów w systemach operatywnego sterowania produkcją. Referat na II Konferencję Naukową Programu RP.I.02, Kazimierz n. Wisłą 1988. (Złożono do druku w Archiwum Automatyki i Telemechaniki).

Recenzent: Doc.dr hab.inż. Mirosław Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji 20.05.1989 r.

АГРЕГАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В иерархически организованном промышленном предприятии все производственные цехи, за исключением предприятия в целом и его элементарных цехов, являются одновременно производственными системами и подсистемами производственной системы вышестоящего уровня. Математическая модель такой подсистемы представляет собой агрегированную математическую модель соответствующей производственной системы.

В статье представлен метод агрегации математических моделей производственных систем с подсистемами, в которых только один ведущий материальный поток и которые могут работать только в одном производственном варианте. Рассмотрена возможность обобщения метода на производственные системы с подсистемами, в которых много ведущих величин переключаемых периодически в работу для разных производственных вариантов.

AGGREGATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR A CLASS OF PRODUCTION SYSTEM

S u m m a r y

In hierarchically organized industrial plants each manufacturing center, except a whole plant and its elementary parts, is simultanously a production system at a certain organizational level and a subsystem of the production system on the higher level. In production control systems a mathematical model of the production subsystem is an aggregated model of the production system of the lower level.

The paper presents an aggregation method for mathematical models of production systems with subsystems which have only one leading material stream and can not process various materials or manufacutre various products in diverse time periods. Possibility of the method generalization for systems whose subsystems have more than one leading material flow rate and can work according to diverse production variants has been discussed in the paper.