ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: AUTOMATYKA Z. 103 Nr kol. 1090

Jerzy KLAMKA
Ryszard LENIOWSKI

MODEL MATEMATYCZNY ROBOTA DWURAMIENNEGO UWZGLĘDNIAJĄCY ODKSZTAŁCALNOŚĆ RAMION

Streszczenie. Zaproponowano kolejne etapy tworzenia modelu matematycznego ugięcia i drgań konstrukcji mechanicznej robota przemysłowego przenoszącego ładunek. Opis zjawiska z warunkami brzegowymi dotyczy manipulatora dwuramiennego o dwóch przegubach obrotowych. Kolejno w pracy prezentowane są: kinematyka robota, równanie różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego oraz związany z nim liniowy operator A, warunki brzegowe, wartości własne i funkcje własne operatora A. Przedstawiono także propozycje wykorzystania zjawiska w celu korekcji sterowania.

1. WPROWADZENIE

Dotychczasowy opis dynamiki robotów przemysłowych zakładał sztywność konstrukcji. Jednakże w układach rzeczywistych, zwłaszcza gdy robot przenosi znaczną masę z maksymalną możliwą prędkością, w fazie hamowania mogą wystąpić drgania, pogarszające dokoładność pozycjonowania. Są one wynikiem odkształceń konstrukcji mechanicznej ramion robota. Układ nie może być wtedy opisywany układem równań różniczkowych zwyczajnych lecz cząstkowych. W najnowszej pracy dotyczącej tego zjawiska [3] przperowadzono analizę dynamiki robota typu "pantografowego" uwzględniając elastyczność jednego ramienia. Podano w niej również koncepcję pomiaru odkształceń. Głównym celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie opisu tego zjawiska dla innego rodzaju robota, o dwóch stopniach swobody. Rozważana konstrukcja to manipulator dwuramienny o dwóch przegubach obrotowych, układ mechaniczny często stosowany w robotach przemysłowych i maszynach przenoszących ładunki. W podrozdziale 2 prezentowana jest kinematyka robota względem bazowego układu odniesienia, którym jest mocowanie pierwszego przegubu. Podrozdział 3 opisuje kolejne etapy tworzenia modelu robota w formie równania różniczkowego typu parabolicznego. Ponadto zakłada się, że materiał z którego wykonana jest konstrukcja mechaniczna spełnia dostatecznie dokładnie model reologiczny

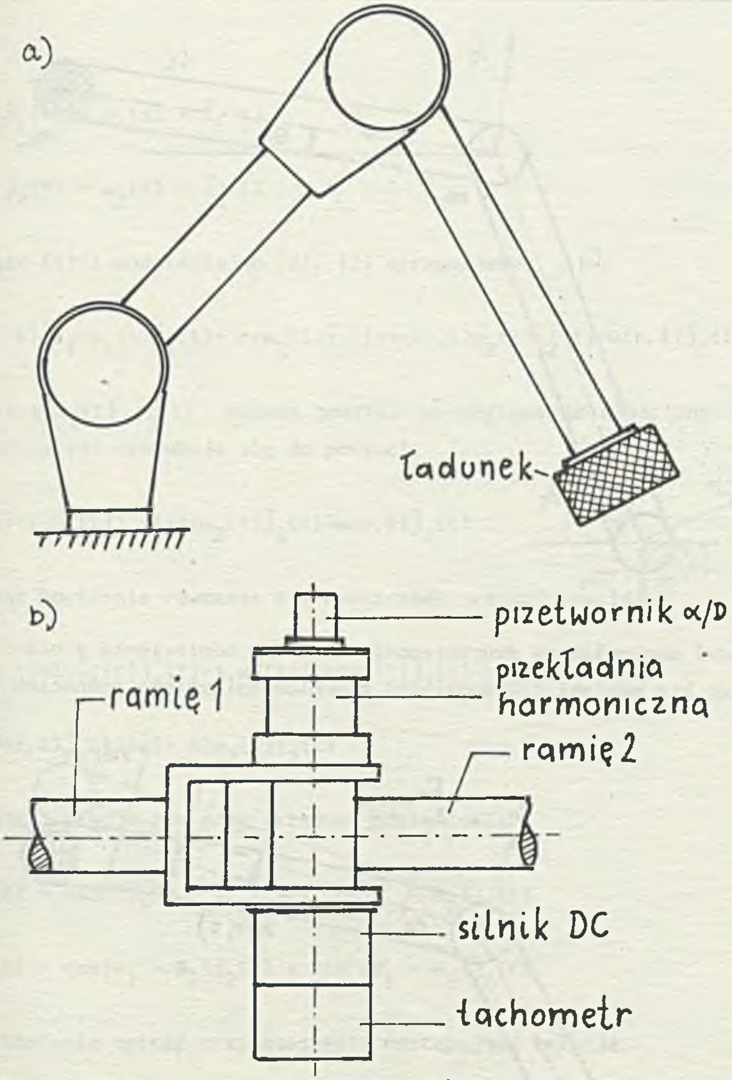
Kelvina-Voigta. W kolejnych podrozdziałach prezentowane są etapy wyznaczania rozwiązania r.r.cz. dla podanych warunków brzegowych. W zakończeniu zaprezentowano wykorzystanie mierzonego sygnału występującego odkształcenia dla celów korekcji sterowania i diagnostyki robotów przemysłowych. Przedstawione w pracy rezultaty są modyfikacją wyników przedstawionych w publikacji [2] oraz [3].

2. OPIS MANIPULATORA, UKŁADU ODNIESIENIA I KINEMATYKI

Rozważmy prosty manipulator dwuramienny, o dwóch przegubach obrotowych, wyposażony w silniki prądu stałego i przekładnie harmoniczne o przełożeniu 1:84 (rys. 1). Ramiona mają odpowiednio długości l_1 i l_2, przy czym są to odległości pomiędzy osiami obrotu oraz osią obrotu i końcem ramienia ($l_2 > l_1$). Rzeczywista długość belki ramienia pierwszego jest jeszcze krótsza, bo składa się na nią mocowanie ramienia drugiego.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że odkształceniu podlega ramię drugie, pierwsze traktujemy jako konstrukcję sztywną. Proponujemy również pewne uproszczenia w rozkładzie masy, polegające na tym, że masę przegubu (silnik, przekładnia, tachometr, przetwornik) traktujemy jako skupioną w osi obrotu (m_1, m_2). Podobnie traktujemy obciążenie (ładunek) przymocowane do końca ramienia drugiego (m_o). Układy odniesienia związane z manipulatorem (rys. 2) są zaczepione w osiach obrotu przegubów manipulatora. Wielkości θ_1 i θ_2 oznaczają kąty obrotu a $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{j}_2$ wektory jednostkowe układów odniesienia. Oznaczamy przez $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$, $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$ prędkości kątowe ramion, pierwszego i drugiego. Rozważmy obecnie kinetykę mechanizmu przy uwzględnieniu odkształceń drugiego ramienia. Wprowadźmy zmienną przestrzenną r oznaczającą położenie dowolnego punktu drugiego ramienia ($0 \le r \le l_2$) oraz $w(r,t)$ opisującą ugięcie konstrukcji spowodowane działającym na elementarny fragment ramienia momentem zginającym $M(r,t)$. Przez $S(r,t)$ i $Q(r,t)$ oznaczać będziemy odpowiednio siłę ścinającą oraz siłę wzdłużną (rys. 3), (rys. 4). Na ramię drugie oddziałuje (w przegubie) siła pochodząca od ramienia pierwszego, oznaczmy ją przez F_o a jej składowe przez η_o i ζ_o. Wyznaczmy położenie dowolnego punktu położeniowego na ramieniu drugim względem punktu 0 traktowanego jako początek bazowego układu współrzędnych. W zapisie wektorowym:

$$\bar{x}(r,t) = l_1 \cdot \bar{i}_1(t) + r \cdot \bar{i}_2(t) - w(r,t) \cdot \bar{j}_2(t). \tag{1}$$

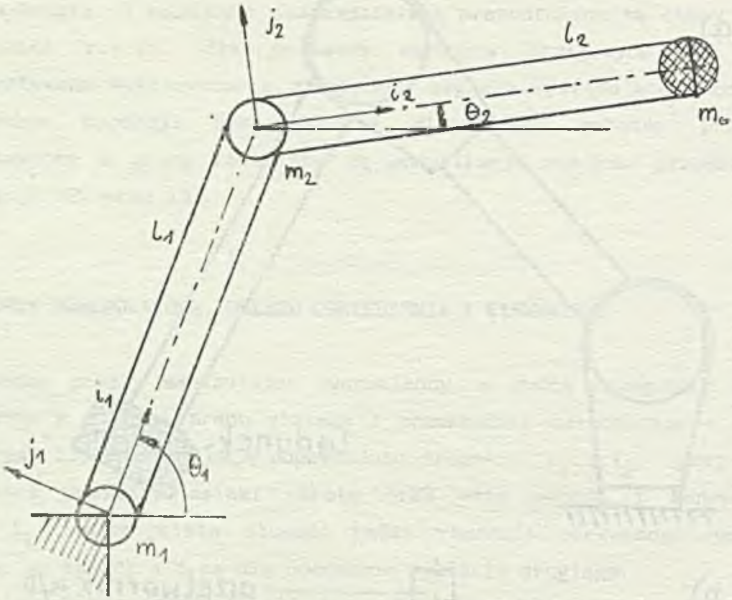


Rys. 1.a) Manipulator dwuramienny, b) przegub manipulatora

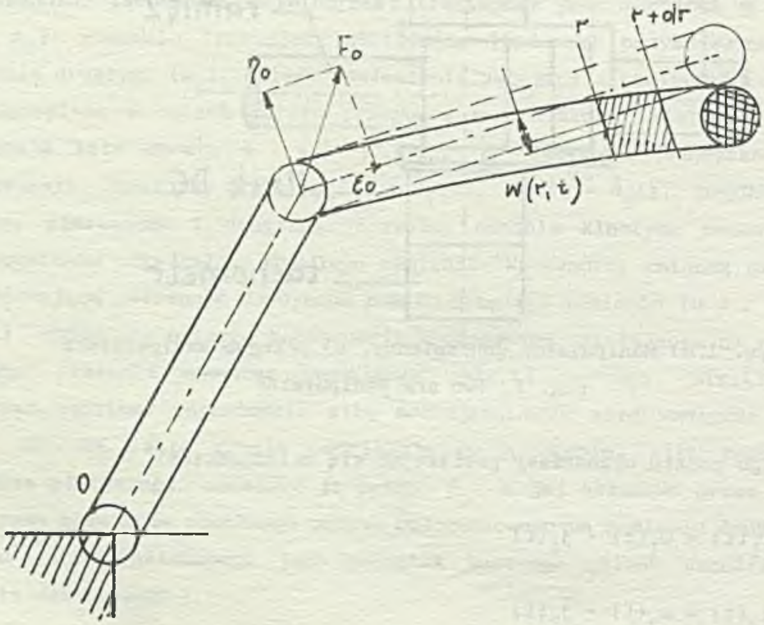
Fig. 1. Two arm manipulator

Prędkość tego punktu wyznaczamy posiłkując się zależnościami

$$\frac{d}{dt}\,\bar{i}_1(t) = \omega_1(t)\cdot\bar{j}_1(t)$$
$$\frac{d}{dt}\,\bar{i}_2(t) = \omega_2(t)\cdot\bar{j}_2(t) \qquad (2)$$



Rys. 2. Model manipulatora dwuramiennego i układy odniesienia z nim związane
Fig. 2. Two arm manipulator model and coordinates systems connected with it



Rys. 3. Ugięcie elastycznego ramienia manipulatora
Fig. 3. Elastic bending of the manipulator arm

oraz

$$\frac{d}{dt}\bar{j}_1(t) = \omega_1(t)\cdot\bar{i}_1(t)$$
$$\frac{d}{dt}\bar{j}_2(t) = \omega_2(t)\cdot\bar{i}_2(t) \qquad (3)$$

Różniczkując (1) i podstawiając (2), (3) otrzymujemy:

$$\dot{\bar{x}}(r,t)=l_1\cdot\omega_1(t)\bar{j}_1(t)+ r\cdot\omega_2(t)\bar{j}_2(t)+ (r,t)\omega_2(t)\bar{i}_2(t)-\dot{w}(r,t)\bar{j}_2(t) \qquad (4)$$

Iloczyn $w(r,t)\omega_2(t)\ \bar{i}_2(t)$ możemy pominąć ze względu na małą jego wartość. Zatem równanie (4) zredukuje się do postaci:

$$\dot{\bar{x}}(r,t)= l_1\omega_1(t)\bar{j}_1(t)+r\omega_2(t)\bar{j}_2(t)-\dot{w}(r,t)\bar{j}_2(t) \qquad (5)$$

Różniczkując powtórnie równanie (5) wyznaczamy przyspieszenie

$$\ddot{\bar{x}}(r,t)=l_1\dot{\omega}_1(t)\bar{j}_1(t)-l_1\omega_1^2(t)i_1+r\omega_2(t)\bar{j}_2(t)-r\omega_2^2(t)\bar{i}_2(t) -$$
$$- \ddot{w}(r,t)\bar{j}_2(t)+\dot{w}(r,t)\omega_2(t)\bar{i}_2(t) \qquad (6)$$

Wykorzystując relacje pomiędzy układami odniesienia:

$$\bar{j}_1(t) = -\sin(\theta_1 - \theta_2)i_2(t) + \cos(\theta_1 - \theta_2)\bar{j}_2(t) \qquad (7a)$$

$$\bar{i}_1(t) = \cos(\theta_1 - \theta_2)i_2(t) + \sin(\theta_1 - \theta_2)\bar{j}_2(t) \qquad (7b)$$

możemy ostatecznie opisać przyspieszenie następującą relacją:

$$\ddot{\bar{x}}(r,t) = \Big[-l_1\omega_1^2(t)\cos(\theta_1 - \theta_2)-l_1\dot{\omega}_1(t)\sin(\theta_1-\theta_2)-r\omega_2^2(t) +$$
$$+ \dot{w}(r,t)\omega_2(t)\Big]i_2(t) +$$
$$+ \Big[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\dot{\omega}_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2) + r\dot{\omega}_2(t) - \ddot{w}(r,t)\Big]\bar{j}_2(t) \qquad (8)$$

Równania (5) oraz (8) opisują, przy pewnych uproszczeniach, kinematykę badanego robota.

3. MODEL DYNAMIKI ODKSZTAŁCONEGO RAMIENIA

Zajmiemy się obecnie dynamiką elementarnego fragmentu drugiego ramienia. Zgodnie z założeniami poczynionymi w p. 2 masę jednostkową oznaczoną przez $\rho(r)$ możemy zapisać jako:

$$\rho(r) = \bar{\rho} + m_2\,\delta(r) + m_o\,\delta(r-l_2) \tag{9}$$

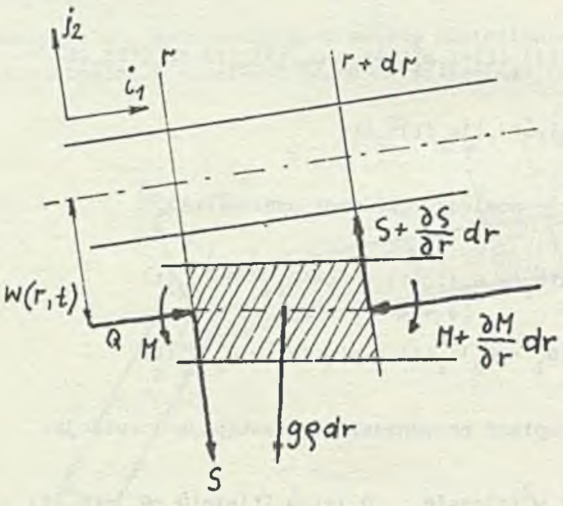
gdzie:

$\bar{\rho}$ - średnia jednostkowa masa ramienia,

m_2 - masa "przegubu" drugiego,

m_o - masa ładunku na końcu ramienia,

$\delta(\cdot)$ - delta Diraca, wektorowe równanie sił liczone względem bazowego układu odniesienia jest następujące (patrz rys. 4):



Rys. 4. Układ sił i momentów działających na elementarny fragment ramienia drugiego

Fig. 4. The system of forces and moments acting onto the elementary piece of the second arm

$$\rho(r)\ddot{\bar{x}}(r,t)dr = \left[-\frac{\delta Q}{\delta r} + \varepsilon_o\delta(r) - \rho(r)g\sin(\theta_2)\right]dr\bar{i}_2(t) + \left[\frac{\delta S}{\delta r} + \eta_o\delta(r) - \rho(r)g\cos(\theta_2)\right]dr\bar{j}_2(t) \tag{10}$$

Wykorzystajmy równanie kinematyki (8) do otrzymania równania opisującego zachowanie się elementarnego fragmentu układu kinematycznego w kierunkach $\bar{i}_2$ oraz $\bar{j}_2$.

Podstawiamy (8) do (10) otrzymując:

$$\rho(r)dr\left[-l_1\omega_1^2(t)\cos(\theta_1-\theta_2)-l_1\dot{\omega}_1(t)\sin(\theta_1-\theta_2)-\right.$$
$$\left.- r\omega_2^2(t)+\dot{w}(r,t)\omega_2(t)\right]\bar{i}_2(t)+\rho(r)dr\left[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+\right.$$
$$\left.+ l_1\omega_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+r\omega_2(t)-\ddot{w}(r,t)\right]\bar{j}_2(t) = \tag{11}$$
$$= dr\left[-\frac{\delta Q}{\delta r}+\varepsilon_o\delta(r)-\rho(r)g\sin(\theta_2)\right]\bar{i}_2(t)+$$
$$+ dr\left[\frac{\delta S}{\delta r}+\eta_o\delta(r)+\rho(r)g\cos(\theta_2)\right]\bar{j}_2(t)$$

co po rozdzieleniu składowych wektora oraz przeniesieniu wyrazów tworzy układ równań (12)

$$\begin{cases} \frac{\delta S}{\delta r} = \rho(t)\cdot\left[l_1\cdot\omega_1^2(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+l_1\cdot\dot{\omega}_1(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+\right. \\ \quad \left.+ r\cdot\omega_2^2(t)-\dot{w}(r,t)\omega_2(t)-g\sin(\theta_2)\right] + \varepsilon_o\cdot\delta(r) & (12a) \\ \frac{\delta S}{\delta r} = \rho(r)\cdot\left[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+l_1\dot{\omega}_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+\right. \\ \quad \left.+ r\omega_2(t)+w(r,t)+g\cdot\cos(\theta_2)\right] - \eta_o\cdot\delta(r) & (12b) \end{cases}$$

Równanie momentów działających na rozważany elementarny fragment ramienia (rys.4) ma postać:

$$S(r,t) = \frac{\delta}{\delta r}M(r,t) + Q(r,t)\frac{\delta}{\delta r}w(r,t) \tag{13}$$

Moment $M(r,t)$ może być przedstawiony w formie [1] następującej:

$$M(r,t) = E\cdot I\cdot \ddot{w}(r,t) \tag{14}$$

gdzie iloczyn EI nazywany jest w mechanice "współczynnikiem sztywności zginania", E - modułu Younga, I - poprzeczny moment inercji a symbol ' oznacza różniczkowanie względem zmiennej r.

Podstawiając (14) do (13) otrzymujemy:

$$S(r,t) = (EI\,\ddot{w}(r,t)' + Q(r,t) \cdot w'(r,t) \qquad (15)$$

Zróżniczkowanie względem zmiennej r równości (15) prowadzi do wyznaczenia (12b) w formie:

$$\frac{\delta S(r,t)}{\delta r} = EI\,\overset{''''}{w}(r,t) + (Q)r,t)\cdot\dot{w}(r,t))', \quad I,\bar{\rho} = \mathrm{const} \qquad (16)$$

Przyrównując (12b) i (16) oraz grupując wyrazy otrzymujemy równanie różniczkowe cząstkowe opisujące dynamikę elastycznego ramienia.

$$EI\,\overset{''''}{w}(r,t)+(Q(r,t)\cdot\dot{w}(r,t))' + \bar{\rho}\ddot{w}(r,t) = \bar{\rho}\cdot\Big[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\omega_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+r\dot{\omega}_2(t)+g\cos(\theta_2)\Big] - \eta_0\delta(r) \qquad (17)$$

dla $t > 0$ w przedziale $0 < r < l_2$.

Składnik $(Q(r,t)\cdot\dot{w}(r,t))'$ możemy zaniedbać ze względu na jego małą wagę w porównaniu do innych elementów równania (17).

Rozważmy obecnie zachowanie się układu wuzględniającego tarcie wiskotyczne występujące w układach rzeczywistych.

Do dalszej analizy przyjmujemy model reologiczny Kelvina-Voigta dokładnie przedstawiony w [4].

Jest to często stosowany model ciała liniowego lepkosprężystego. Model tworzy równoległe połączenie sprężystości i tłumienia wiskotycznego. Dla tego modelu związek pomiędzy odkształceniem a naprężeniem jest następujący:

$$\sigma(r,t) = E\,w(r,t) + 2\,\mu\,\dot{w}(r,t) \qquad (18)$$

gdzie:

$\sigma(r,t)$ - naprężenie,

$w(r,t)$ - odkształcenie,

2μ - wsp. lepkości.

Uwzględniajac tarcie wiskotyczne, równanie opisujące układ mechaniczny (17) poszerzy się o składnik $2\,EI\cdot\mu\cdot\dot{\overset{''''}{w}}(r,t)$ dając:

$$EI\,\overset{''''}{w}(r,t)+2EI\cdot\mu\,\dot{\overset{''''}{w}}(r,t) + \bar{\rho}\,\ddot{w}(r,t) = \bar{\rho}\Big[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\cdot\dot{\omega}_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2) + r\omega_2(t)+g\cos(\theta_2)\Big] - \eta_0\delta(r) \qquad (19)$$

Podstawiając $\alpha^{*} = \frac{EI}{\bar{\rho}}$ oraz $z(r,t)=g\cos(\theta_2)+l_1\dot{\omega}_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+$ $-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+r\dot{\omega}_2(t)-\frac{\eta_o}{\bar{\rho}}\delta(r)$ dochodzimy do końcowej postaci:

$$\alpha^{*} w''''(r,t)+\ddot{w}(r,t)+2\mu\alpha^{*}\dot{w}''''(r,t)=z(r,t) \tag{20}$$

Równanie (20) jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu, opisującego dynamikę odkształconego ramienia robota przemysłowego.

Wyznaczanie warunków brzegowych i wartości własnych

Warunki brzegowe dla równania (20) wyznaczamy kolejno dla punktu zamocowania ramienia a następnie dla jego swobodnego końca. Ponieważ ramię jest zamocowane przegubowo więc dla $r=0$ mamy:

$$w(0,t) = 0, \quad \text{a także} \quad w'(0,t) = 0 \tag{21}$$

Drugi koniec jest swobodny, nie działa na niego żaden zewnętrzny moment zginający, tj. $S(l_2+0,t) = 0$, stąd

$$w''(l_2,t) = 0 \tag{22}$$

Kolejne warunki brzegowe wyznaczamy całkując równanie (11a) i (11b) względem zmiennej r w otoczeniu punktu (l_2-0, l_2+0)

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}-Q(l_2-0)=m_o&\Big[l_1\omega_1^2(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+l_1\dot{\omega}_1(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+\\&-\dot{w}(l_2,t)\omega_2(t)-g\sin(\theta_2)\Big]=\left(\frac{m_o}{\bar{\rho}}\right)\dot{Q}(l_2-0)\end{aligned} \tag{23}$$

oraz

$$\begin{aligned}-S(l_2-0)=m_o&\Big[-l_1\omega_1^2(t)\sin(\theta_1-\theta_2)+l_1\dot{\omega}_1(t)\cos(\theta_1-\theta_2)+\\&-\ddot{w}(l_2,t)+g\cos(\theta_2)\Big]=\left(\frac{m_o}{\bar{\rho}}\right)\dot{S}(l_2-0)\end{aligned} \tag{24}$$

Przepisując równania (23), (24) w formie

$$Q(l_2-0)+\left(\frac{m_o}{\bar{\rho}}\right)\dot{Q}(l_2-0) = 0 \tag{25}$$

$$S(l_2-0) + \left(\frac{m_o}{\rho}\right) \acute{S}\,(l_2-0) = 0 \tag{26}$$

dochodzimy do końcowej zależności:

$$\begin{aligned} &EI\overset{''''}{W}(l_2-0,t)+\underline{Q\cdot\overset{'}{W}(l_2-0,t)}+\left(\frac{m_o}{\rho}\right)\cdot\Big[EIW(l_2-0,t)+\\ &\underline{+Q\overset{'}{\dot{W}}(l_2-0,t)+Q\overset{''}{W}(l_2-0,t)}\Big] = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Z równań (25) oraz (22) wynika, że suma składników podkreślonych jest równa zero, dlatego (27) zredukuje się do postaci:

$$\overset{''''}{W}(l_2-0,t) + \left(\frac{m_o}{\rho}\right) \overset{''''}{W}(l_2-0,t) = 0 \tag{28}$$

Ze względu na występowanie pochodnych względem zmiennej r rozwiązanie równania (20) jest zadaniem dość skomplikowanym. Posłużymy się tutaj metodą przedstawioną w pracach [2] i [3]. W celu rozwiązania równania (20) wprowadzimy za Sakawą [2] i [3] liniowy nieograniczony operator A zdefiniowany następująco:

$$A \cdot \phi\,(r) = \alpha\,\overset{''''}{\phi}\,(r), \tag{29}$$

którego dziedzina: $D(A) = \Big\{\phi(\cdot) \in L^2(0,l_2):$

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_2} \phi^2(r)dr+\gamma_1\phi^2(0)+\gamma_2\phi^2(l_2)< \ ,\ \phi(0)+0,\ \phi'(0)=0 \\ &\phi''(l_2)=0,\quad \phi''''(l_2)+\left(\frac{m_o}{\rho}\right)\phi''''(l_2) = 0\Big\} \end{aligned} \tag{30}$$

Rozważmy problem wartości własnych operatora A

$$A\,\phi\,(r) = \lambda\,\phi\,(r) \qquad 0 < r < l_2 \tag{31}$$

W tym celu zdefiniujemy pomocniczy parametr β taki, że

$$\lambda = \alpha \cdot \beta^4 \tag{32}$$

oraz

$$\overset{''''}{u}\,(r) = \beta^4\,u\,(r) \tag{33}$$

Łatwo zauważyć, że funkcje sin(β r), cos(β r), sh(β r), ch(β r) będą szczególnymi rozwiązaniami równania różniczkowego (33), a równanie ogólne otrzymamy w formie sumy:

$$u(r) = a^{*} \sin(\beta r) + b^{*} \cos(\beta r) + c^{*} \operatorname{sh}(\beta r) + d^{*} \operatorname{ch}(\beta r), \tag{34}$$

którą możemy przekształcić do wygodniejszej postaci

$$u(r) = a(\cos(\beta r) + \operatorname{ch}(\beta r)) + b(\cos(\beta r) - \operatorname{ch}(\beta r)) +$$

$$+ c(\sin(\beta r) + \operatorname{sh}(\beta r)) + d(\sin(\beta r) - \operatorname{sh}(\beta r))$$

Współczynniki a, b, c, d oszacujemy z równań opisujących warunki brzegowe. Dla końca ramienia mocowanego przegubowo $u(o) = \dot{u}(o) = 0$, stąd

$$u(0) = b\,\beta\,(-\sin(\beta\,0) - \operatorname{sh}(\beta\,0)) + c\,\beta(\cos(\beta\,0) + \operatorname{ch}(\beta\,0)) +$$

$$d\,\beta(\cos(\beta\,0) - \operatorname{ch}(\beta\,0)) = 0, \text{ stąd} \tag{35}$$

$0 = c\,\beta\,(1+1)$. Ponieważ $\beta > 0$, więc $c = 0$.

Dla swobodnego końca ramienia $(r=l_2)$ rozpatrzymy dwa przypadki, pierwszy - ramię jest nieobciążone na końcu, czyli $m_o = 0$, wtedy $\ddot{u}(l_2) = 0$, $\dddot{u}(l_2)=0$, oraz drugi przypadek - ramię jest obciążone masą m_o, wtedy $\ddot{u}(t_2) = 0$ i $\dddot{u}(l_2) + \left(\frac{m_o}{\rho}\right) \cdot \ddddot{u}(l_2) = 0$

Dla warunków $\ddot{u}(l_2) = 0$, $\dddot{u}(l_2) = 0$ otrzymujemy następujące związki:

$$0 = b\,\beta^2(-\cos(\beta\,l_2) - \operatorname{ch}(\beta\,l_2)) + d\,\beta^2(-\sin(\beta\,l_2) - \operatorname{sh}(\beta\,l_2)) \tag{36a}$$

$$0 = b\,\beta^3(\sin(\beta\,l_2) - \operatorname{sh}(\beta\,l_2)) + d\,\beta^2(-\cos(\beta\,l_2) - \operatorname{sh}(\beta\,l_2)) \tag{36b}$$

czyli

$$b = -d\,\frac{\sin(\beta\,l_2 + \operatorname{sh}(\beta\,l_2)}{\cos(\beta\,l_2 + \operatorname{sh}(\beta\,l_2)} \tag{37}$$

dla pierwszego warunku oraz

$$b = -d\,\frac{\cos(\beta\ l_2 + \mathrm{ch}(\beta\ l_2)}{\sin(\beta\ l_2 + \mathrm{ch}(\beta\ l_2)} \qquad (38)$$

dla drugiego.

Porównując zależności (37) i (38) otrzymujemy wyrażenie, z którego wyliczamy kolejne wartości β_i, i=1,2,3,...

$$\cos(\beta\ l_2)\mathrm{ch}(\beta\ l_2) + 1 = 0 \qquad (39)$$

$\beta_1 l_2$	$\beta_2 l_2$	$\beta_3 l_2$	$\beta_4 l_2$	$\beta_5 l_2$	...
1.875	4.694	7.855	10.996	14.137	...

Stąd wartości własne $\lambda_i = (\beta_i)^4$, i=1,2,3,... a odpowiadające im funkcje własne $\phi_i(r)$ (przyjmując b=-1) określa wzór

$$\phi_i(r) = \left[\mathrm{ch}\left(\frac{\beta_i r}{l_2}\right) - \cos\left(\frac{\beta_i r}{l_2}\right)\right] - d\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta_i r}{l_2}\right) - \sin\left(\frac{\beta_i r}{l_2}\right)\right] \qquad (40)$$

dla i = 1,2,3,... gdzie

$$d = \frac{\cos(\beta_i l_2) + \mathrm{ch}(\beta_i l_2)}{\sin(\beta_i l_2) + \mathrm{sh}(\beta_i l_2)}$$

Gdy ramię jest obciążone, wartości własne wyznaczamy wychodząc z zależności $u''(l_2)=0$ i $u'''(l_2) + \psi \cdot u''''(l_2)=0$, gdzie $\psi = \frac{m_o}{\bar{\rho}}$. Dla pierwszego warunku przepisujemy (37)

$$b = -d\,\frac{\sin(\beta\ l_2) + \mathrm{sh}(\beta\ l_2)}{\cos(\beta\ l_2) + \mathrm{ch}(\beta\ l_2)} \qquad (41)$$

zaś drugiego warunku otrzymujemy

$$b = d\,\frac{(\cos(\beta\ l_2) + \mathrm{ch}(\beta\ l_2)) + \psi \cdot \beta(-\sin(\beta\ l_2) + \mathrm{sh}(\beta\ l_2))}{(\sin(\beta\ l_2) - \mathrm{sh}(\beta\ l_2)) + \psi \cdot \beta(\cos(\beta\ l_2) - \mathrm{ch}(\beta\ l_2))} \qquad (42)$$

Podstawiając analogicznie jak poprzednio proponujemy (41) i (42). Wynikiem jest bardziej złożona jak (39) następująca reakcja,

$$\psi\beta(\cos(\beta\cdot l_2)\cdot sh(\beta\cdot l_2)-\sin(\beta\cdot l_2)ch(\beta\cdot l_2))+\cos(\beta\cdot l_2)ch(\beta\cdot l_2)+1=0, \qquad (43)$$

z której wyznaczamy kolejne β_i, i+1,2,3,... oraz $\lambda_i = (\beta_i)^4$. Funkcje własne $\phi_i(r)$ określa wzór (40).

Położenie dowolnego punktu w chwili $t \geq 0$ będzie opisane zależnością [2], [3]:

$$w(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle Aw(\cdot,t),\phi_i(\cdot)\right\rangle \cdot \frac{\phi_i(\cdot)}{\lambda_i}, \qquad (44)$$

gdzie symbol <.,.> oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta $l^2(0,l_2)$. Wielkość $w(r,t)$ można mierzyć pośrednio za pomocą czujników naprężenia (naklejanych na ramieniu w punktach r_o). Pomiar ten można wykorzystać do poprawy pozycjonowania robota poprzez kompensację sterowania, wykorzystując na bieżąco sprzężenie zwrotne od mierzonego napięcia na mostku tensometrycznym [2], [3], bądź tworząc rozkład odkształceń w pewnych obszarach trajektorii roboczej, dla kilku ładunków.

Na podstawie powstałej "mapy" naprężeń korygujemy nastawy regulatora dla fazy pozycjonowania. W celu weryfikacji podanej powyżej koncepcji opisu modelu przewiduje się wykonanie eksperymentów dla manipulatora dwuramiennego opisanego w p. 2 konstruowanego obecnie w ramach ZAiI PRz.

LITERATURA

[1] Osiński Z. - Tłumienie drgań mechanicznych PWN, Warszawa 1986.

[2] Sakawa Y. - Feedback control of second order evaluation equations with unbounded observation, International Journal of control, vol. 41, no 3, 1985, p. 717-731.

[3] Sakawa Y., Matsuno F. - Modeling and control of a flexible manipulator with a parallel drive mechanism, Int. J. Control, 1986, vol. 44, no 2, p. 299-313.

[4] Timoshenko S. - Vibration Problem in Engineering, D.Van Nostrand Company, INC, 1955.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Bogdan Skalmierski

Wpłynęło do Redakcji 16.09.1988 r.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХПЛЕЧНОГО РОБОТА,
УЧИТЫВАЮЩАЯ ДЕФОРМАЦИЮ ПЛЕЧ

Р е з ю м е

В статье предложены поочередные этапы создания математической деформации и вибрации механической конструкции промышленного робота, переносящего груз. Описание этого явления в граничных условиях касается двухплечного манипулятора с двумя вращательными шарнирами. Последовательно в работе представлена кинематика робота, дифференциальное уравнение параболлического типа, взаимосвязанный с этим уравнением - линейный оператор A, граничные условия и функции оператора A. Использование этого явления предложено в целях корректировки управления.

MATHEMATICAL MODEL OF TWO LINK MANIPULATOR
WITH REGARD TO FLEXIBLE ARMS

S u m m a r y

In this paper there were presented succesive stages of generation methematical model of bunding and vibration for mechanical construction of industrial robot carrying a heavy end - efector.
Description of this phenomenon with boundury conditions refers to the two - link manipulator with the revolute joint. There were described robot kinematics, partial differential equation of parabolic type with boundary conditions, linear operator A connected with the PDE, eigenvalues and eigenfunction of A operator.
In the final part of this paper there was proposed application of this phenomenon to correct systems control.