ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: AUTOMATYKA z. 103 Nr kol. 1090

Andrzej POLAŃSKI

STOCHASTYCZNY PROBLEM LQ Z OGRANICZENIAMI NA WARIANCJĘ[x)]

Streszczenie. Rozpatrzono przykładowe problemy sterowania statystycznie optymalnego, w układach linowych, z kwadratem wskaźnikiem jakości oraz ograniczeniem na wariancje sterowań. W przypadku statycznym otrzymano rozwiązania analityczne. Udowodniono, że problem dynamiczny sprowadza się do rozwiązania zagadnienia dwugranicznego. Wykazano, że uwzględnienie ograniczeń na wariancje odpowiada wprowadzaniu dodatkowych składników do wskaźnika jakości.

1. WSTĘP

Problemowi sterowania statystycznie optymalnego, w układach liniowych, z kwadratowym wskaźnikiem jakości, poświęcona jest obszerna literatura np. [1], [2]. Podawane algorytmy rozwiązania tego problemu znajdują zastosowanie w bardzo wielu praktycznych zagadnieniach. Często jednak zdarza się sytuacja, gdy na występujące w układach sygnały nałożone są dodatkowo, ograniczenia. Uwzględnienie najczęściej występujących ograniczeń "sztywnych" prowadzi, w ogólnym przypadku, do nieliniowych zagadnień stochastycznego sterowania i filtracji, których efektywne rozwiązanie jest bardzo trudne [3], [6].

W niniejszej pracy podaje się przykłady rozwiązywania stochastycznych problemów LQ w przypadku występowania ograniczeń "elastycznych" - na wariancje sygnałów. Przykłady podzielono na dwie grupy - problemów statycznych i dynamicznych.

x) Praca finansowana z Programu Badawczego RP.I.02: Teoria optymalizacji i sterowania układami ciągłymi i procesami dyskretnymi.

2. PROBLEMY STATYCZNE

Przy rozwiązywaniu przedstawionych przykładowych problemów statycznych korzysta się z następującego uogólnienia twierdzenia Kuhna-Tuckera podanego w [4], [5].

2.1. Uogólnione twierdzenie Kuhna-Tuckera

Załóżmy, że:

- X jest przestrzenią wektorową, Z jest przestrzenią unormowaną zawierającą stożek dodatni o niepustym wnętrzu,
- f jest funkcjonałem o wartościach rzeczywistych, różniczkowalnym w sensie Gateaux na X,
- różniczki Gateaux są liniowe względem przyrostów.

Przy powyższych założeniach zachodzi następujące twierdzenie:
Jeżeli funkcja $f(u)$, $u \in X$ przyjmuje w punkcie $u_o \in X$ wartość minimalną, przy warunku

$$G(u) \leq \theta, \tag{1}$$

oraz u_o jest regularnym punktem nierówności (1), to istnieje element $z_o^* \in Z^*$, $z_o \geq \theta$, dla którego lagrangian

$$L = f(u) + \langle G(u), \quad z_o^* \rangle \tag{2}$$

jest stacjonarny w punkcie u_o. Ponadto

$$\langle G(u_o), \quad z_o^* \rangle = 0 \tag{3}$$

<u>Uwagi</u>: Symbol θ oznacza element zerowy przestrzeni Z (Z^*), Z^* jest przestrzenią sprzężoną do Z, symbol nierówności oznacza relację częściowego porządku wprowadzaną w przestrzeni przez (wypukły) stożek dodatni. Symbol $\langle v, z^* \rangle$ oznacza wartość (liniowego) funkcjonału $z^* \in Z^*$ przyjmowaną dla elementu $v \in Z$. Funkcjonał L jest stacjonarny w punkcie u jeżeli jego różniczka Gateaux $\delta L(x,h) = 0$, dla dowolnego h. W przypadku, gdy lagrangian jest różniczkowalny w sensie Frecheta warunek stacjonarności odpowiada warunkowi zerowania się pochodnej Frecheta.

2.2. Przykład 1

Niech x będzie n-wymiarowym wektorem losowym

$$x = \left[x_1, x_2 \dots x_n \right]^T \tag{4}$$

którego składowe $x_1, x_2 \dots x_n$ są zmiennymi losowymi drugiego rzędu. Macierz wariancji elementów wektora x oznacza się przez P

$$E\, x\, x^T = P \tag{5}$$

Zadanie polega na minimalizacji funkcjonału (wskaźnika jakości),

$$f\,(u) = I = E\; 2\, x^T A\, u \tag{6}$$

Argumentem minimalizacji - sterowaniem jest m-wymiarowy $(m \le n)$ wektor losowy u

$$u = \left[u_1, u_2, \dots u_m \right] \tag{7}$$

Zakłada się, że dopuszczalnymi sterowaniami są mierzalne funkcje składowych wektora x (tzn. $u \in X$, X przestrzeń m-wymiarowych zmiennych losowych generowana przez mierzalne funkcje składowych wektora x). Dodatkowo na wektor u nakłada się ograniczenie wariancji

$$E\, uu^T \le U_o \tag{8}$$

tzn. macierz

$$G(u) = Euu^T - U_o \le 0 \tag{9}$$

ma być niedodatnio określona. U_o jest zadaną macierzą symetryczną dodatnio określoną. Przyjmuje się jeszcze jedno założenie, że macierz $A^T PA$ jest nieosobliwa.

Do rozwiązywania postawionego problemu można zastosować twierdzenie podane w punkcie 2.1. Użyte symbole u, X, f, G są zgodne z oznaczeniami z punktu 2.1 W rozpatrywanym przypadku przestrzenie Z i Z^* są przestrzeniami m-wymiarowych macierzy symetrycznych oraz

$$< U, \Omega > = \mathrm{tr}\, U\, \Omega \tag{10}$$

$U \in Z$, $\Omega \in Z^*$. Łatwo też sprawdzić różniczkowalność w sensie Frecheta funkcjonału f i odwzorowania G.

Lagrangian dla problemu minimalizacji funkcjonału $f(u)$ z ograniczeniem (8) ma zatem postać:

$$L\,(u, \Omega) = E\; 2x^T Au + \mathrm{tr}\; \Omega\; (Euu^T - U_o) \tag{11}$$

gdzie $\Omega \in Z^*$ jest symetryczną macierzą mnożników Lagrange'a. Z twierdzenia z pktu 2.1 wynika następujący układ warunków koniecznych osiągania minimum w punkcie u_o, dla $\Omega = \Omega_o$.

1. Nieujemna określoność macierzy Ω_o:

$$\Omega_o \geq 0 \tag{12}$$

2. Spełnienie ograniczenia (8)

$$E\; u_o\; u_o^T - U_o \leq 0 \tag{13}$$

3. Zerowanie się pochodnej Frecheta lagrangianu dla u_o, Ω_o

$$L'_u \Big|_{u=u_o,\; \Omega = \Omega_o} = 2A^T x + 2\; \Omega_o u_o = 0 \tag{14}$$

4. Ortogonalność $G\,(u_o)$ i Ω_o:

$$\mathrm{tr}\; \Omega_o\; (Eu_o u_o^T - U_o) = 0 \tag{15}$$

Korzystając z powyższych czterech warunków otrzymamy rozwiązanie. Przede wszystkim, należy zauważyć, że korzystając z (12) i (13) można wzmocnić warunek (15) - jest on równoważny warunkowi

$$\Omega_o\; (Eu_o\; u_o^T - U_o) = 0 \tag{16}$$

(Wynika to z faktu, że ślad iloczynu dwóch, symetrycznych macierzy nieujemnie określonych jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest równy zero).

Załóżmy, że macierz Ω_o jest nieosobliwa. Wtedy z (14) otrzymuje się

$$u_o = -\Omega_o^{-1} A^T x, \tag{17}$$

natomiast warunek (16) sprowadza się do

$$E\, u_o u_o^T - U_o = 0 \tag{18}$$

Podstawiając (17) do (18) dostaje się

$$\Omega_o^{-1} A^T P A\, \Omega_o^{-1} = U_o \tag{19}$$

Równanie (19) jest algebraicznym równaniem Riccatiego, wszystkie jego rozwiązania są nieosobliwe (co potwierdza przyjęte założenie). Istnieje dokładnie jedno dodatnio określone symetryczne rozwiązanie Ω_o tego równania [8]; określa ono poszukiwane prawo sterowania (17). Otrzymane rozwiązanie jest jedynym rozwiązaniem układu warunków (12) - (15). Można sprawdzić, że spełnia ono także warunek wystarczający na minimum globalne funkcjonału [4] str. 301.

2.3. Przykład 2

Rozpatrzmy, podobny do opisanego w poprzednim punkcie problem minimalizacji funkcjonału (6) z warunkiem (8). Obecnie dysponuje się jednak tylko częściową informacją, tzn. dopuszczalne są sterowania należące do pewnej podprzestrzeni $Y \subset X$, np. podprzestrzeni generowanej przez mierzalne funkcje pewnego wektora losowego y. Przypadek taki można sprowadzić do poprzedniego korzystając z twierdzenia o rzucie ortogonalnym [4], tzn. rozkładając wektor x na sumę

$$x = \hat{x} + \tilde{x} \tag{20}$$

gdzie $\hat{x}$ jest rzutem ortogonalnym wektora x na podprzestrzeni Y, $\tilde{x}$ jest ortogonalny do wszystkich elementów podprzestrzeni Y. Podstawiając (20) do wzoru (6) dostaje się

$$f^{\bullet}(u) = E\, 2\, (\hat{x} + \tilde{x})^T Au = E\, 2\hat{x}^T Au \tag{21}$$

Dalej można postępować tak samo jak w punkcie 2.2.

2.4. Przykład 3

Symbole x, u, X, P mają takie samo znaczenie jak w przykładzie 1 z punktu 2.2. Rozpatruje się problem wyznaczenia sterowania u, $u \in X$, minimalizującego funkcjonał (wskaźnik jakości)

$$f(u) = I = E(2x^T Au + u^T u) \tag{22}$$

przy ograniczeniu

$$E\, uu^T \le U_o \tag{23}$$

Podobnie jak w punkcie 2.2 zakłada się, że macierze U_o i $A^T PA$ są nieosobliwe. Analogicznie w punkcie 2.2 stosuje się do rozwiązania uogólnione twierdzenie Kuhna-Tuckera. Lagrangian ma postać:

$$L(u, \Omega) = E(2x^T Au + u^T u) + \operatorname{tr} \Omega (Euu^T - U_o) \tag{24}$$

Ω jest symetryczną macierzą mnożników Lagrange'a. Warunkiem koniecznym osiągania minimum w punkcie u_o, dla $\Omega = \Omega_o$ jest następujący układ zależności:

$$\Omega_o \ge 0 \tag{25}$$

$$Eu_o u_o^T - U_o \le 0 \tag{26}$$

$$L'_u \Big|_{u=u_o,\ \Omega = \Omega_o} = 2A^T x + 2u_o + 2_o \Omega_o u = 0 \tag{27}$$

$$\operatorname{tr} \Omega_o (Eu_o u_o^T - U_o) = 0 \tag{28}$$

Podobnie jak w punkcie 2.2 można stwierdzić, że z (25) i (26) wynika równoważność warunku (28) z warunkiem

$$\Omega_o (Eu_o u_o^T - U_o) = 0 \tag{29}$$

Z (27) dostaje się

$$u_o = -(I + \Omega_o)^{-1} A^T x \tag{30}$$

Podstawiając (30) do (29) mamy:

$$\Omega_o \left[(I + \Omega_o)^{-1} A^T PA (I + \Omega_o)^{-1} - u_o \right] = 0 \tag{31}$$

Na podstawie (26) zachodzi też

$$(I - \Omega_o)^{-1} A^T PA (I - \Omega_o)^{-1} - U_o \leq 0 \tag{32}$$

Aby znaleźć prawo sterowania (30) należy wyznaczyć macierz $\Omega_o \geq 0$ spełniającą (31) i (32). Rozpatrzmy najpierw dwa przypadki szczególne:

1. $A^T PA - U_o \leq 0$. W tym przypadku, jak łatwo się przekonać, rozwiązaniem (31), (32) jest $\Omega_o = 0$, tzn. żadne z ograniczeń nie jest aktywne.
2. $A^T PA - U_o > 0$. W tym przypadku rozwiązanie Ω_o jest macierzą nieosobliwą. Jest ona (jedynym [8]) dodatnio określonym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$(I + \Omega_o)^{-1} G^T PG (I + \Omega_o)^{-1} - U_o = 0 \tag{33}$$

W ogólnym przypadku macierz $A^T PA - U_o$ jest nieokreślona. W takiej sytuacji poszukuje się rozwiązania w postaci

$$\Omega_o = C \Sigma_o C^T \tag{34}$$

gdzie: Σ_o jest k-wymiarową, $k < m$ macierzą symetryczną, dodatnio określoną, C jest macierzą $k \times m$ wymiarową, taką że

$$C^T C = I \tag{35}$$

Podstawiając (34) i (35) do wzorów (32), (33) można, po przekształceniach, otrzymać wzory na Σ_o i C^T.

Macierz Σ_o oblicza się jako rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego

$$(I + \Sigma_o)^{-1} C^T A^T PA C (I + \Sigma_o)^{-1} - C^T U_o C = 0 \tag{36}$$

Macierz C można wybrać jako macierz zbudowaną z wektorów własnych macierzy $A^T PA - U_o$ odpowiadających jej dodatnim wartościom własnym, k jest liczbą dodatnich wartości własnych macierzy $A^T PA - U_o$. Podobnie jak w przykładzie 1 można sprawdzić, że znalezione rozwiązanie spełnia warunek wystarczający [4] str. 301.

2.5. Uwagi

W rozpatrywanych przypadkach możliwe było uzyskanie analitycznych wzorów określających prawa sterowania. Uzyskane prawa sterowania są liniowymi funkcjami składowych wektora x (który można uważać za wektor stanu rozpatrywanego układu). Macierze wzmocnień w prawach sterowania zależą w dość złożony sposób od macierzy wariancji P oraz ograniczeń U_o.

W przypadku dysponowania niepełną informacją, obowiązuje, jak to wynika z (20), (21), zadada stochastycznej równoważności [1].

Na podstawie wzorów (11) i (24) można zauważyć, że uwzględnianie ograniczeń wariancyjnych jest równoważne wprowadzeniu dodatkowych składników we wzorze na wskaźnik jakości. Problem z punktu 2.2 jest równoważny problemowi bez ograniczeń, ze wskaźnikiem jakości danym przez

$$I = E\,(2x^T A u + u^T \Omega_o u) \tag{37}$$

Podobnie problem z punktu 2.4 jest równoważny problemowi bez ograniczeń, ze wskaźnikiem

$$I = E\,(2x^T A u + u^T (I + \Omega_o)\, u) \tag{38}$$

3. PROBLEM DYNAMICZNY

Wykorzystując podane w punkcie 2.4 rozwiązanie problemu statycznego, można stosując metodę programowania dynamicznego, podać algorytm rozwiązania przykładowego problemu dynamicznego. Istotne znaczenie, przy rozwiązywaniu ma liniowość otrzymanego prawa sterowania (30).

Rozpatruje się przykładowy problem minimalizacji wariancji wyjścia w jednowejściowym, jednowyjściowym dyskretnym, liniowym układzie dynamicznym opisanym równaniami:

$$x_{n+1} = Ax_n + bu_n + g_n e_n \tag{39}$$

$$z_n = d^T x_n + e_n \tag{40}$$

W równaniach (39), (40) x_n jest n-wymiarowym wektorem stanu, u_n - skalarnym sterowaniem, z_n - skalarnym sygnałem wejściowym, e_n - skalarnym zakłóceniem. Macierz A oraz wektory b, g_n, d mają wymiary odpowiadające wymiarom sygnałów. Zakłada się, że e_n jest białym szumem

$$E\, e_n\, e_k = \delta_{nk}\, \varepsilon_n, \tag{41}$$

ponadto

$$E\, x_o\, e_k = 0 \tag{42}$$

Macierz wariancji stanu x_o wynosi

$$E x_o x_o^T = P_o \tag{43}$$

Przyjmuje się także, dla uproszczenia, że obiekt nie wprowadza opóźnienia, tzn. [9]

$$d^T b \neq 0 \tag{44}$$

Wskaźnik jakości, który ma być minimalizowany, dany jest przez

$$I = E \sum_{n=0}^{N-1} z_n^2 \tag{45}$$

Dopuszczalne sterowania są funkcjami poprzednich wektorów stanu oraz zakłóceń tzn.

$$u_n = u_n\,(x_o, e_o, e_1 \ldots x_n, e_n) \tag{46}$$

Dodatkowo nakłada się ograniczenie na wariancję sterowania w każdej chwili:

$$E u_n^2 \leq \kappa_n \tag{47}$$

Rozwiązanie postawionego problemu można przeprowadzić metodą programowania dynamicznego. Oznaczmy:

$$I_k = E \sum_{n=k}^{N-1} z_n^2 \tag{48}$$

$$I_N = E\, x_N^T\, dd^T x_N + \varepsilon_N \tag{49}$$

Załóżmy, że dla strategii optymalnej

$$I_{n+1} = E\, x_{n+1}^T S_{n+1} x_{n+1} + \gamma_{n+1}, \qquad \text{dla } n=0 \ldots N-1 \tag{50}$$

gdzie S_{n+1} jest macierzą n x m wymiarową, a γ_{n+1} wielkością skalarną. Rozwiązując równanie Bellmana

$$I_n = \min_{u_n, Eu_n^2 \le \kappa_n} (E\, z_n^2 + I_{n+1}) \tag{51}$$

sprawdza się prawdziwość założenia (50) i wyznacza się ciąg macierzy $\{S_n\}$. Podstawiając (39) i (40) do równania (51) oraz korzystając z rozważań z punktu 2 dostaje się

$$I_n = \min_{u_n, Eu_n^2 \le \kappa_n} E\left[(d^T x_n + e_n)^2 + (Ax_n + bu_n + g_n e_n)^T S_{n+1} (Ax_n + bu_n + g_n e_n)\right] \tag{52}$$

$$= \min_{u_n} E\left[(d^T x_n + e_n)^2 + (Ax_n + bu_n + g_n e_n)^T S_{n+1} (Ax_n + bu_n + g_n e_n) + \lambda_n (u_n^2 - \kappa_n)\right]$$

gdzie $\lambda_n \ge 0$ jest mnożnikiem Lagrange'a. Aby rozwiązać powyższy problem minimalizacji (wyznaczyć U_n^o i λ_n^o) musimy założyć znajomość macierzy wariancji wektora x_n:

$$P_n = Ex_n x_n^T \tag{53}$$

Korzystając z wyniku z punktu 2.4 - dla skalarnego przypadku, można po przekształceniach otrzymać następujące wzory:

$$u_n^o = -\, k_n^T (Ax_n + g_n e_n) \tag{54}$$

$$k_n^T = \frac{b^T S_{n+1}}{b^T S_{n+1} + \lambda_n^o} \tag{55}$$

$$\lambda_n^o = \max\left(\sqrt{\frac{b^T S_{n+1} Q_n S_{n+1} b}{\kappa_n}} - b^T S_{n+1} b, 0\right) \tag{56}$$

$$Q_n = E\,(Ax_n+g_ne_n)(Ax_n+g_ne_n)^T = AP_nA^T + \varepsilon_n g_n g_n^T \tag{57}$$

$$S_n = dd^T + A^TS_{n+1}A - \frac{A^TS_{n+1}bb^TS_{n+1}A}{b^TS_{n+1}b + \lambda_n^o} \tag{58}$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1} + \varepsilon_n \left[1 + g_n^T(I-bk_n^T)^TS_{n+1}(I-bk_n^T)g_n\right] \tag{59}$$

Macierze S_n powinny być wyliczane przez iteracje równania Riccatiego (58), dla $n = N-1, N-2, \ldots 0$, przy

$$S_N = dd^T \tag{60}$$

Dla wyliczania kolejnych iteracji konieczna jest jednak znajomość wartości mnożników λ_n^o, do obliczenia których potrzebne są macierze Q_n, P_n.
Macierze te wzynacza się przez iteracje równania Lapunowa:

$$Q_n = AP_nA^T + g_ng_n^T\,\varepsilon_n \tag{61}$$

$$P_{n+1} = (I - bk_n^T)\,Q_n(I - bk_n^T)^T \tag{62}$$

dla $n = 0,1 \ldots N-1$

Zależności (54) - (62) tworzą problem dwugraniczny. Warunki początkowe dla równania Riccatiego (58) są dane przy $n = N$, natomiast dla równania Lapunowa (61), (62) - przy $n = 0$.
A zatem dla rozwiązania postawionego problemu konieczne jest rozwiązanie problemu dwugranicznego (54) - (62).

3.1. Uwagi

Otrzymane prawa sterowania są liniowe względem sygnałów x_n i e_n. Do wyznaczania wektorów wzmocnień k_o, $k_1 \ldots k_{N-1}$, konieczne jest rozwiązanie dość złożonego problemu dwugranicznego.

Problem sterowania z ograniczeniami na wariancje (47) jest równoważny problemowi bez ograniczeń, ze wskaźnikiem jakości

$$I_1 = E\sum_{n=0}^{N-1} (z_n^2 + \lambda_n^o u_o^2) \tag{63}$$

4. PODSUMOWANIE

Wydaje się, że w niektórych przypadkach, ograniczenia na wariancje mogą być traktowane jako przybliżenie trudniejszych do uwzględnienia ograniczeń "sztywnych" - na wartości sygnałów. Rozpatrywanie ograniczeń na wariancje daje interpretację dla często stosowanych wskaźników jakości z wagami na sterowania. Ograniczenia takie mogą też występować w praktycznych sytuacjach [7].

LITERATURA

[1] J.S. Meditch: Estymacja i sterowanie stochastycznie optymalne w układach liniowych, WNT, Warszawa 1975.

[2] H. Kushner: Wprowadzenie do teorii sterowania stochastycznego, PWN, Warszawa 1983.

[3] R.E. Elliot: Stochastic Calculus and Applications, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1982.

[4] D.C. Luenberger: Teoria Optymalizacji, PWN, Warszawa 1974.

[5] A.V. Balakrishnan: Optimal control problems in Banach Spaces, J.SIAM Control, Ser.A, vol.3, 1965, pp. 152-180.

[6] J.M. Bismut: An example of optimal stochastic control with constraints, SIAM J.Control, vol.12, 1974, pp. 401-418.

[7] M. Pontier and J. Szirglas: Linear stochastic control with constraints, IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-29, 1984, pp. 1100-1102.

[8] J.C. Willems: Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation, IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-16, 1971 pp. 621-634.

[9] M. Błachuta, A. Ordys: Związek algorytmów Astroma i Kalmana dla problemu sterowania minimalno-wariancyjnego, ZN. Politechniki Śląskiej, z.74, 1983, pp. 25-37.

Recenzent: Prof. dr inż. Henryk Górecki

Wpłynęło do Redakcji 16.01.1989 r.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА LQ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДИСПЕРСИЮ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена проблема стохастической оптимализации в линейных системах с квадратным показателем качества, в случае наложения на дисперсию управлений. Проблемы разделены на статические и динамические. В первую очередь рассмотрены примеры статических проблем с матричным ограничением на дисперсии управлений. Доказано, что оптимальные законы управления являются линейными. Проблема определения матрицы усилений сводится к решению матричного алгебраического уравнения Риккатти. Динамическая проблема рассмотрен для случая одновходного и одновыходного объекта (SISO). Установлено, что оптимальные законы управления являются также линейными. Однако, чтобы получить векторы усилений необходимо решение /численн довольно сложной двухграничной проблемы.

STOCHASTIC LQ PROBLEM WITH CONSTRAINTS IMPOSED ON VARIATION

S u m m a r y

Optimization problems for stochastic linear systems with quadratic performance index are considered in the case of constraints imposed on the control variance. The problems are divided into static and dynamic tasks. The static problems with the matrix constraints for the control variance are discussed first. Optimal control laws are found to be linear and the gain matrix must be obtained by solving a Riccatti equation. The dynamic problem has been solved for a SISO plant. In this case however the gain vector could be found by the numerical solution of a complex TPBVP.