ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: AUTOMATYKA z. 103 Nr kol. 1090

Andrzej ŚWIERNIAK
Krzysztof SIMEK

STEROWANIE GWARANTUJĄCE OKREŚLONĄ WARTOŚĆ WSKAŹNIKA JAKOŚCI W STRUKTURACH DWUPOZIOMOWYCH*)

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwie struktury sterowania dwupoziomowego, w których oprócz sterowania nominalnego występuje dodatkowe sterowanie "uodporniające" gwarantujące koszt nie większy od optymalnego dla modelu podstawowego. Pierwsza struktura zakłada, że lokalny decydent realizuje sterowanie nominalne bazując na modelu podstawowym własnego podsystemu. Koordynator spełnia rolę interwencyjną wspomagając z własnych zasobów lokalnego decydenta. W drugiej strukturze role decydentów ulegają zmianie. Koordynator realizuje cel globalny na podstawie modelu podstawowego, zaś lokalny decydent wspomaga jego działanie wypracowując sterowanie "uodparniające" z własnych zasobów.

1. WSTĘP

Sterowanie dużymi systemami wymaga zazwyczaj realizacji tego sterowania w strukturach wielopoziomowych, np.: [3], [6], [7], [12], [13]. Przyczyną tego stanu rzeczy są ograniczenia informacyjne oraz realizacyjne, jakie występują w każdym dużym systemie. Dotyczy to przy tym zarówno struktur scentralizowanych, w których realizowany jest cel globalny i centralny decydent określa strategie służące realizacji tego celu, pozostawiając jedynie pewną dodatkową swobodę lokalnym podsystemom, jak i struktur zdecentralizowanych. W tym przypadku bowiem mimo realizacji celów lokalnych przez decydentów konieczna bywa interwencja koordynatora całego systemu, zabezpieczająca przed skutkiem niepełnej informacji posiadanej przez lokalnych decydentów, np.: dotyczącej sprzężeń między podsystemami w systemie. Decydenci poszczególnych poziomów posiadają najczęściej różną informację, a priori, dotyczącą modeli systemu i podsystemów, jak i bieżącą dotyczącą stanu podsystemu oraz wpływu otoczenia (zakłócenia, zmiany parametrów modelu).

*) Praca finansowana przez MEN w ramach Programu Resortowego RP.I.02. "Teoria Sterowania i Optymalizacji Ciągłych Układów Dynamicznych i Procesów Dyskretnych".

Przesyłanie pełnej informacji o stanie podsystemu przez lokalnego decydenta do koordynatora może być uciążliwe lub wręcz niemożliwe, często wystarczy informacja zagregowana np.: w postaci normy wektora stanu i wartości lokalnego sterowania. Z kolei lokalny decydent nie ma zazwyczaj możliwości realizacji skomplikowanego algorytmu sterowania i dysponuje jedynie modelem własnego podsystemu mającym uproszczoną postać. Realizacja lokalnego celu jakim jest uzyskanie gwarantowanej wartości wskaźnika jakości [4], [14], [16], może być niemożliwa poprzez działanie wyłącznie lokalnego sterowania. Koordynator wykorzystując informację zagregowaną i model rozszerzony systemu [17] zawierający nierównościowy model niepewności [15] wypracowuje dodatkowe sterowanie ze swoich zasobów (nieuwzględnione w kosztach lokalnego decydenta), które umożliwia uzyskanie jakości niegorszej niż optymalna dla modelu podstawowego podsystemu. Taką sytuację przedstawiamy w rozdziale 2. Jest to zatem struktura zdecentralizowana, w której jednak koordynator spełnia rolę opiekuna wspomagającego lokalne podsystemy z własnych zasobów. W rozdziale 3 analizujemy skrajnie odmienną strukturę, którą można nazwać scentralizowaną. Realizowany cel sterowania polega na zapewnieniu odpowiedniej wartości globalnego wskaźnika. Centralny decydent realizuje sterowanie w oparciu o model podstawowy całego systemu posiadając pełną informację o wektorze stanu, korzystając z informacji lokalnych decydentów. Nie posiadając pełnej informacji o zakłóceniach w podsystemach i ewentualnych zmianach lub niedokładnościach parametrów korzysta z pomocy lokalnych decydentów, którzy dysponując modelami rozszerzonymi własnych podsystemów wspomagają centralnego decydenta z własnych zasobów, których koszt nie jest uwzględniany we wskaźniku globalnym. W obu przypadkach uzyskuje się zatem gwarantowany koszt, aczkolwiek cele, struktura informacyjna, rola poszczególnych poziomów oraz sposób realizacji sterowania i rozdział środków potrzebnych do realizacji są skrajnie różne. Omawiane skrajne przypadki mogą stanowić bazę do analizy innych struktur wielopoziomowych w systemach, w których sterowanie ma na celu realizację zadania uzyskania gwarantowanej wartości wskaźnika (wskaźników).

2. STRUKTURA ZDECENTRALIZOWANA

Rozważana jest struktura dwupoziomowa przedstawiona na rys. 1. W jej skład wchodzi koordynator oraz L podsystemów. Każdy podsystem dysponuje własnym, niepełnym modelem liniowym zwanym dalej modelem podstawowym [17] i posiada lokalny wksaźnik jakości. Koordynator dysponuje pełniejszym modelem całego systemu (uwzględniającym, nieznane w podsystemach, sprzężenia skrośne oraz ewentualną dodatkową niepewność), zwanym modelem rozszerzonym [17]. Jego zadaniem jest wypracowanie poprawki sterowania lokalnego podsystemu, zapewniającej uzyskanie określonej wartości lokalnego wskaźnika jakości.

2.1. Struktura informacyjna systemu

2.1.1. Model poziomu lokalnego decydenta

Każdy lokalny i-ty decydent dysponuje podstawowym modelem swojego podsystemu w postaci liniowych równań stanu:

$$\dot{x}_d^i(t) = A^{ii}x_d^i(t) + B^iu^i(t), \quad x_d^i(0) = x_0^i$$
$$t \in [0, T] \tag{1}$$

gdzie:

x_d^i - jest stanem modelu i-tego podsystemu, $x_d^i(t) \in R^{n^i}$,

u^i - jest lokalnym sterowaniem, $u^i(t) \in R^{m^i}$,

A^{ii} i B^i - są macierzami o wymiarach, odpowiednio $n^i \times n^i$, $n^i \times m^i$.

Zakłada się pełną dostępność pomiarową lokalnego i-tego decydenta do rzeczywistego wektora stanu x^i tzn. $x^i(t)$ stanowi informację dostępną dla i-tego lokalnego decydenta w chwili t.

Lokalny wskaźnik jakości jest funkcjonałem kwadratowym:

$$J^i = \int_0^T \left(x^{iT}(t)Q^ix^i(t) + u^{iT}(t)R^iu^i(t)\right) dt \tag{2}$$

gdzie:

Q^i oraz R^i są macierzami wag i-tego lokalnego decydenta dodatnio określonymi o wymiarach, odpowiednio $n^i \times n^i$ oraz $m^i \times m^i$.

Informację przesyłaną do koordynatora w chwili t stanowią: norma stanu w chwili t $\|x^i(t)\|$ oraz sterowanie $u^i(t)$, minimalizujące wskaźnik (2) dla modelu (1).

2.1.2. Model poziomu koordynatora

Koordynator dysponuje rozszerzonym modelem całego systemu uwzględniającym istnienie sprzężeń między podsystemami oraz oddziaływanie otoczenia:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) + Be(t), \quad x(0) = x_0$$
$$t \in [0, T] \tag{3}$$

gdzie:

x jest wektorem stanu, $x(t) \in R^N$, $N = \sum_{i=1}^{L} n^i$, $x_0 = [x_0^{1T}, \dots, x_0^{LT}]^T$;

v jest wektorem sterownaia, $v(t) \in R^M$, $M = \sum_{i=1}^{L} m^i$;

e jest wektorem "zakłóceń działających w torze majoryzowanym przez tor sterowania, $e(t) \in R^M$,

natomiast macierze A i B mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} A^{11}, & A^{12}, & \dots, & A^{1L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{i1}, & A^{i2}, & \dots, & A^{iL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{L1}, & A^{L2}, & \dots, & A^{LL} \end{bmatrix}_{N \times N} \tag{4}$$

$$B = \mathrm{diag}\,(B^1, B^2, \dots, B^L)_{N \times M}$$

Przyjmuje się, że model rozszerzony jest adekwatnym modelem systemu w tym sensie, że stan x jest stanem rzeczywistego systemu.

Model i-tego podsystemu na poziomie koordynatora ma zatem postać:

$$\dot{x}^i(t) = A^{ii}x^i(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{L} A^{ij}x^j(t) + B^i v^i(t) + B^i e^i(t),$$
$$x^i(0) = x_0^i \tag{5}$$

Wektor sterowań v^i będący rzeczywistym sterowaniem realizowanym w systemie jest sumą sterowania u^i wyznaczonego na poziomie niższym oraz poprawki w^i wypracowanej przez koordynatora i realizowanej z jego zasobów: $v^i = u^i + w^i$. Koszt sterowania w^i nie obciąża kosztów i-tego lokalnego decydenta. Koordynator nie zna dokładnych wartości macierzy A^{ij}, lecz posiada informacje o możliwych zakresach ich wartości (lub ewentualnych zmian). Zakłada się mianowicie, że macierze sprzężeń skrośnych pomiędzy podsystemami spełniają warunek dopasowania (tzw. matching condition [2], [5], [9], [10], [11]):

$$A^{ij} = B^i f^{ij} \tag{6}$$

oraz, że znane jest ograniczenie normy macierzy f^{ij}:

$$\| f^{ij} \| \le F^{ij} \tag{5}$$

Informacja o zakłóceniach dotyczy również jedynie ograniczeń normy wielkości $e^i(t)$, tzn.:

$$\| e^i(t) \| \le D^i \tag{8}$$

przy czym D^i może (lecz nie musi) być funkcją czasu t.
Koordynator dysponuje w każdej chwili t informacją o wartościach $u^i(t)$, normie $\| x^i(t) \|$, ograniczeniach D^i (ewentualnie $D^i(t)$) oraz F^{ij}, dla wszystkich podsystemów. Do każdego i-tego podsystemu przekazywane jest sterowanie w^i wyznaczone przez koordynatora dla tego podsystemu.

2.2. Postać praw sterowania

2.2.1. Prawo sterowania lokalnego poziomu

Sterowanie u^i wyznaczone w podsystemach jest sterowaniem minimalizującym wskaźnik (2) dla podstawowego, liniowego modelu podsystemu (1). Ma ono postać (np. [16]):

$$u^i(t) = -R^{i^{-1}} B^{iT} K^{ii}(t)\, x^i(t) \tag{9}$$

gdzie $K^{ii}(t)$ jest symetrycznym, dodatnio określonym rozwiązaniem macierzowego różniczkowego równania Riccatiego:

$$\dot{K}^{ii} = A^{i^T} K^{ii} + K^{ii} A^i - K^{ii} B^i R^{i^{-1}} B^{i^T} K^{ii} + Q^i$$

z zerowym warunkiem końcowym $K^{ii}(T) = 0$.
Wartość optymalna wskaźnika jakości J^i, dla sterowania (9) wyraża się wzorem:

$$J^{io} = x_o^{iT} K^{ii}(0) x_o^i \tag{10}$$

Należy zwrócić uwagę, że sterowanie u^i realizowane jest w torze zamkniętym w oparciu o rzeczywisty stan x^i, a nie stan modelu x_d^i.

2.2.2. Prawo sterowania koordynatora

Poprawka w^i, wyznaczana przez koordynatora wyraża się wzorem:

$$w^i(t) = \begin{cases} \dfrac{B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t)}{\| B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t)\|}\,\rho^i(\| x(t) \|) = \dfrac{R^i u^i(t)}{\| R^i u^i(t) \|}\,\rho^i(\| x(t) \|) & \\ \qquad\qquad x \notin \ker [B^{iT}K^{ii}(t)] & \\ \text{dowolne takie, że } \| w^i(t) \| \le \rho^i \| x(t) \|) & \\ \qquad\qquad x \in \ker [B^{iT}K^{ii}(t)] & \end{cases} \tag{11}$$

gdzie:

$\ker [B^{iT}K^{ii}(t)] = \{x^i(t) : B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t) = 0\}$;

Wielkość $\rho^i(\| x(t)\|)$ jest górnym oszacowaniem całej "niepewności" występującej w równaniu (3):

$$\| e^i(t) + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{L} F^{ij}x^j(t)\| \le \| e^i(t)\| + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{L} F^{ij} \| x^j(t) \| \le$$

$$\le D^i + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{L} F^{ij}\| x^j(t)\| = \rho^i(\| x(t)\|$$

czyli

$$\rho^i(\| x(t)\|) = D^i + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{L} F^{ij}\| x^j(t)\| \tag{12}$$

Łatwo zauważyć, że

$$\| w^i(t)\| \le \rho^i(\| x(t)\|),$$

przy czym:

$$\| w^i(t)\| = \rho^i(\| x(t)\|),$$

wszędzie poza $\ker [B^{iT}K^{ii}]$. Zatem wartość sterowania $w^i(t)$ realizowanego przez koordynatora, którego koszt nie jest uwzględniony w lokalnym wskaźniku i-tego podsystemu, jest ograniczona.

2.3. Podstawowe własności sterowania

Niech I^i będzie wartością wskaźnika (2) dla podsystemu opisanego równaniem (5) przy $u^i(t)$ danym przez (9) oraz $w^i(t)$ określonym przez (11).

Podstawowy wynik dotyczący przedstawionej struktury sterowania można sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1

W strukturze dwupoziomowej (rys. 1), opisanej równaniami (3)-(8), sterowanie $v^i = u^i + w^i$ realizowane w każdym z podsystemów zapewnia wartość lokalnego wskaźnika dla rzeczywistego systemu, nie większą od wartości optymalnej wskaźnika dla modelu podstawowego, tzn.:

$$I^i \le J^{io} \qquad \text{dla każdego } i=1,\dots,L \tag{13}$$

Dowód:

Oznaczając przez S^i funkcję optymalnej jakości dla modelu (1) można, zgodnie z równaniami Bellmana-Hamiltona-Jacobiego np. [1], napisać:

$$-\frac{\partial S^i}{\partial t} = x^{iT}(t)Q^i x^i(t) + u^{iT}(t)R^i u^i(t) + \frac{\partial S^i}{\partial x^i}\left(A^{ii}x^i(t) + B^i u^i(t)\right) \tag{14}$$

gdzie:

$$S^i = S^i(x^i(t),t) = x^{iT}(t)K^{ii}(t)x^i(t) \tag{15}$$

Oszacowując wartość wyrażenia:

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^i} B^i(w^i(t) + e^i(t)) =$$

$$x^{iT}(t)K^{ii}(t)B^i\left(-\frac{B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t)}{\| B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t)\|}\rho^i(\| x(t) \|) + e^i(t)\right) \le$$

$$\le -\| B^{iT}K^i(t)x^i(t)\| \rho^i(\|x(t)\|) + \| B^{iT}K^{ii}(t)x^i(t) \| e^i(t) =$$

$$= \| B^{iT}K^i(t)x^i(t)\| \left(\| e^i(t)\| - \rho^i(\|x(t)\|)\right) \le 0$$

czyli:

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^i} B^i(w^i(t) + e^i(t)) \le 0 \tag{16}$$

otrzymuje się:

$$x^{iT}Q^{i}x^{i} + u^{iT}R^{i}u^{i} + \frac{\partial S^{i}}{\partial x^{i}}(A^{ii}x^{i} + B^{i}u^{i}) +$$

$$+ \frac{\partial S^{i}}{\partial x^{i}} B^{i}(w^{i} + e^{i}) + \frac{\partial S^{i}}{\partial t} = x^{iT}Q^{i}x^{i} + u^{iT}R^{i}u^{i} + \tag{17}$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial x^{i}}(A^{ii}x^{i} + B^{i}(u^{i} + w^{i}) + B^{i}e^{i}) + \frac{\partial S^{i}}{\partial t} \le 0$$

(W równaniu (17) dla wygody opuszczono zależność od t).

Oznacza to, że dla dowolnych $x(t)$ spełniających (3) oraz $u^{i}(t)$ i $w^{i}(t)$ określonych, odpowiednio w (9) i (11) zachodzi:

$$\int_0^T (x^{iT}(t)Q^{i}x^{i}(t) + u^{iT}(t)R^{i}u^{i}(t))\,dt \le -\int_0^T \frac{dS^{i}}{dt} = \tag{18}$$

$$= -S^{i}(x(t),t)\Big|_0^T = x^{iT}K^{ii}(0)x_0^{i},$$

a więc

$$I^{i} \le J^{io} \tag{19}$$

Strukturę układu sterowania dla i-tego podsystemu przedstawia rys. 3.

Uwaga 1.

Równanie (5), stanowiące model koordynatora dla i-tego podsystemu (a więc tym samym model rozszerzony całego systemu), może mieć ogólniejszą postać:

$$\dot{x}^{i}(t) = A^{ii}x^{i}(t) + B^{i}v^{i}(t) + g^{i}(x(t), v^{i}(t)) \tag{5a}$$

W tym przypadku warunek dopasowania oraz informacje o ograniczeniach na "niepewność" przyjmą postać:

$$g^{i} = B^{i}e^{i}(x, u^{i}, w^{i}) \tag{6a}$$

$$\| e^{i}(t) \| \le D^{i} + F^{i}\| x(t)\| + G^{i}\| u^{i}(t)\| + G^{i}\| w^{i}(t)\|$$

$$G^{i} \le 1 \tag{8a}$$

a ograniczenie normy sterowania $w^i(t)$, wyznaczane będzie ze wzoru:

$$\rho^i(\| x(t)\|, \| u^i(t)\|) = \tag{12a}$$
$$= (1-G^i)^{-1}(D^i + F^i\| x(t)\| + G^i\| u^i(t)\|)$$

Wielkości D^i, F^i, G^i mogą być funkcjami t.

Uwaga 2.

Nic nie stoi również na przeszkodzie, aby modele: podstawowy (3) i rozszerzony (5) były niestacjonarne, tzn. by macierze A, B (w tym także A^{ii}, B^i) oraz f^{ij} i ograniczenie F^{ij} były funkcjami czasu t (mierzalnymi).

Uwaga 3.

Warunek dopasowania (6) (ewentualnie (6a)) nie jest wbrew pozorom bardzo ograniczającym założeniem. Przykładowo, jeśli wszystkie podsystemy są jednowejściowe, wówczas przedstawienie równań stanu każdego z podsystemów w postaci fazowej gwarantuje spełnienie tego warunku.

2.4. Przykład

W charakterze przykładu rozpatrzmy system dwupoziomowy składający się z koordynatora i trzech podsystemów, przedstawionych na rys. 5. Podsystemy można opisać następującymi modelami podstawowymi:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1^1 &= x_2^1 \\ \dot{x}_2^1 &= -a_1^1x_1^1 - a_2^1x_2^1 + bu_1^1 \end{aligned}\right\} = A^1x^1 + B^1u^1, \quad b > 0 \qquad n^1 = 2, \quad m^1 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1^2 &= x_2^2 \\ \dot{x}_2^2 &= x_3^2 \\ \dot{x}_3^2 &= -a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2 - a_3^2x_3^2 + u_1^2 \end{aligned}\right\} = A^{22}x^2 + B^2u^2, \qquad n^2 = 3, \quad m^2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1^3 &= x_2^3 \\
\dot{x}_2^3 &= x_3^3 \\
\dot{x}_3^3 &= x_4^3 \\
\dot{x}_4^3 &= x_5^3 \\
\dot{x}_5^3 &= -a_1^3x_1^3 - a_2^3x_2^3 - a_3^3x_3^3 - a_4^3x_4^3 + a_5^3x_5^3 + u_1^3
\end{aligned}\right\} = A^{33}x^3 + B^3u^3,\ n^3=5,\ m^3=1$$

Dla każdego z podsystemów zdefiniowano wskaźnik:

$$J^i = \int_0^T (x^{iT}Q^ix^i + r^iu^{i^2})\,dt \qquad i = 1,2,3.$$

Do koordynacji w każdej chwili czasu t przesyłane są dwie wartości: norma stanu każdego podsystemu $\| x^1(t) \|$ oraz skalarne sterowanie $u^1(t)$ minimalizujące podany wskaźnik.

Modele rozszerzone podsystemów, którymi dysponuje koordynator mają następującą postać.

Podsystem 1

$$\dot{x}_1^1 = x_2^1$$

$$\dot{x}_2^1 = -a_1^1x_1^1 - a_2^1x_2^1 + bv_1^1 + f(x_1^1) + bv_1^1 + a_1^{12}x_1^2 + a_3^{12}x_3^2 + a_3^{13}x_3^3$$

gdzie:

$f(x_1^1)$ może być dowolną funkcją spełniającą warunek Lipschitza przechodzącą przez początek układu współrzędnych, dla której znana jest tylko stała Lipschitza k;

Δb modeluje niepełną znajomość współczynnika wzmocnienia, znane jest tylko oszacowanie modułu tej wielkości;

współczynniki a_j^{1i} określają wpływ sprzężeń skrośnych i znane są tylko z dokładnością do oszacowania normy macierzy a^{12} i a^{13}

lub macierzowo:

$$\dot{x}^1 = A^{11}x^1 + B^1v^1 + g^1$$

gdzie:

$$g^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x^1) + \Delta bv^1 + a^{12}x^2 + a^{13}x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ b(b^{-1}f(x^1) + b^{-1}\Delta bv^1 + b^{-1}a^{12}x^2 + b^{-1}a^{13}x^3) \end{bmatrix} = B^1e^1$$

Łatwo zauważyć, że ze względu na postać równań stanu (postać kanoniczna fazowa) oraz wymiar sterowania warunek dopasowania (ang. matching condition) jest spełniony.

Szacując normę niepewności e^1 mamy:

$$\| e^1 \| \le b^{-1}k \| x^1\| + b^{-1} |\Delta b| \; |v^1| + b^{-1}|a^{12}x^2| + b^{-1}|a^{13}x^3| \le$$

$$\le b^{-1}(k \| x^1\| + G^1|v^1| + F^{12}\| x^2\| + F^{13}\| x^3\|) \le$$

$$\le b^{-1}(k \| x^1\| + G^1|v^1| + G^1|w^1| + F^{12}\| x^2\| + F^{13}\| x^3\|)$$

Pozwala nam to, przy znajomości k, G^1, F^{12} oraz F^{13}, wyznaczyć:

$$\rho^1(\| x(t)\|, |u^1(t)|) = (b-G^1)^{-1}(k \| x^1\| + G^1|u^1| + F^{12}\| x^2\| + F^{13}\| x^3\|)$$

przy oczywistym założeniu $G^1 < b$.

Podsystem 2

$$\dot{x}_1^2 = x_2^2$$

$$\dot{x}_2^2 = x_3^2$$

$$\dot{x}_3^2 = - a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2 - a_3^2x_3^2 + v_1^2 + \Delta a_1^2x_1^2 + \Delta a_3^2x_3^2 + a_1^{21}x_1^1 + a_3^{23}x_3^3 + a_5^{23}x_5^3 + d^2$$

gdzie:

współczynniki Δa_j^2, dla których znane jest tylko oszacowanie normy macierzy Δa^2, modelują niepewność odpowiednich a_j^2;

d^2 jest niepewnością o ograniczonym module;

założenia o a_j^{21} są takie jak w podsystemie pierwszym.

lub macierzowo:

$$\dot{x}^2 = A^{22}x^2 + B^2v^2 + g^2$$

gdzie:

$$g^2 = \begin{bmatrix} 0_{2x1} \\ \Delta a^{22}x^2 + a^{21}x^1 + a^{23}x^3 + d^2 \end{bmatrix} = B^2e^2$$

Znając oszacowania norm wszystkich macierzy można zapisać:

$$\| e^2 \| \le D^2 + F^{22}\| x^2\| + F^{21}\| x^1\| + F^{23}\| x^3\| = \rho^2 (\| x \|)$$

Podsystem 3

$$\dot{x}_1^3 = x_2^3$$

$$\dot{x}_2^3 = x_3^3$$

$$\dot{x}_3^3 = x_4^3$$

$$\dot{x}_4^3 = x_5^3$$

$$\dot{x}_5^3 = - a_1^3x_1^3-a_2^3x_2^3-a_3^3x_3^3-a_4^3x_4^3-a_5^3x_5^3 + v_1^3+cv_1^3\sin v_1^3 + a_1^{31}x_1^1+a_2^{32}x_2^2$$

gdzie założenia odnośnie współczynników a_j^{3i}, modelujących sprzężenia skrośne, są takie jak w pierwszym podsystemie;
lub inaczej:

$$\dot{x}^3 = A^{33}x^3 + B^3v^3 + g^3$$

gdzie:

$$g^2 = \begin{bmatrix} 0_{4x1} \\ cv_1^3\sin v_1^3+a^{31}x^1 + a^{32}x^2 \end{bmatrix} = B^3e^3, \qquad 0 < c < 1$$

Szacując

$$|e^3| \le c|u^3| + c|w^3| + F^{31}\| x^1\| + F^{32}\| x^2\|$$

dostajemy:

$$\rho^3(\| x \|, |u^3|) = (1-c)^{-1} (c|u^3| + F^{31}\| x^1\| + F^{32}\| x^2\|)$$

Koordynator w każdej chwili czasu t przekazuje do wszystkich podsystemów wyznaczone przez siebie skalarne sterowanie uodparniające $w^i(t)$. Pełne sterowanie realizowane w podsystemach przedstawiają wzory:

$$v^1 = u^1 + w^1 = -\frac{K_2^{11}x^1}{r^1} - \frac{K_2^{11}x^1}{|K_2^{11}x^1|}\rho^1(\| x \|, |u^1|) =$$

$$= -\frac{K_2^{11}x^1}{r^1} + \operatorname{sgn}(u^1)\,\rho^1(\| x \|, |u^1|)$$

$$v^2 = u^2 + w^2 = -\frac{K_3^{22}x^2}{r^2} - \frac{K_2^{22}x^2}{|K_3^{22}x^2|}\rho^2(\| x \|) =$$

$$= -\frac{K_3^{22}x^2}{r^2} + \operatorname{sgn}(u^2)\,\rho^2(\| x \|)$$

$$v^3 = u^3 + w^3 = -\frac{K_5^{33}x^3}{r^3} - \frac{K_5^{33}x^3}{|K_3^{33}x^3|}\rho^3(\| x \|), |u^3|) =$$

$$= -\frac{K_5^{33}x^3}{r^3} + \operatorname{sgn}(u^3)\,\rho^3(\| x \|, |u^3|)$$

gdzie K_j^{ii} oznacza j-ty wiersz macierzy K^{ii}, a pozostałe wielkości zostały zdefiniowane wcześniej.

Sterowanie $v^i = u^i + w^i$ w każdym z podsystemów zapewnia, zgodnie z twierdzeniem 1, wartość wskaźnika jakości nie większą od jego wartości dla modelu podstawowego.

3. STRUKTURA SCENTRALIZOWANA

Schemat tej struktury przedstawiono na rys. 2. Składa się ona, podobnie jak struktura z p.2, z koordynatora oraz L podsystemów. Koordynator dysponuje podstawowym, liniowym modelem całego systemu. Jego zadaniem jest wyznaczenie dla tego modelu sterowania minimalizującego globalny wskaźnik jakości. Model na poziomie podsystemu jest modelem rozszerzonym dla danego podsystemu, uwzględniającym niepewność. Zadaniem lokalnego decydenta jest wyznaczenie lokalnego sterowania uodparniającego, realizowanego z jego zasobów, zapewniającego w systemie rzeczywistym wartość globalnego wksaźnika jakości niewiększą niż wartość dla modelu podstawowego. Koszt lokalnego sterowania uodporniającego nie wchodzi w skład kosztów sterowania występujących we wskaźniku globalnym.

3.1. Struktura informacyjna systemu

3.1.1. Model systemu na poziomie koordynatora

Model podstawowy, którym dysponuje koordynator ma postać liniowych równań stanu:

$$\dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + Bu(t), \qquad x_k(0) = x_0$$
$$t \in [0,T] \tag{20}$$

gdzie:

wektor stanu modelu podstawowego x_k przyjmuje wartości $x_k(t) \in R^N$;

macierze A, B są zdefiniowane podobnie jak w p. 2.1.2;

wektor sterowania $u(t) \in R^M$.

Globalny wskaźnik jakości jest funkcjonałem:

$$J = \int_0^T (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))\,dt \tag{21}$$

gdzie:

$$R = \mathrm{diag}\,(R^1, R^2, \ldots, R^L)$$
$$Q = \mathrm{diag}\,(Q^1, Q^2, \ldots, Q^L) \tag{22}$$

są dodatnio określonymi macierzami wag.

Do każdego i-tego podsystemu przekazywana jest w chwili t wartość sterowania $u^i(t)$, będącego częścią wektora sterowania $u(t)$, minimalizującego (21) dla modelu (20), oddziaływującą na i-ty podsystem.

3.1.2. Model poziomu lokalnego decydenta

Model i-tego podsystemu, jakim dysponuje lokalny decydent ma następującą postać:

$$\dot{x}^i(t) = A^i x(t) + B^i v^i(t) + B^i e^i(t)$$
$$t \in [0,T] \tag{23}$$

lub inaczej:

$$\dot{x}^i(t) = A^{ii}x^i(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{L} A^{ij}x^j(t) + B^i(u^i(t) + w^i(t)) + B^i e(t) \tag{23a}$$

gdzie:

$w^i(t) \in R^{m_i}$ – lokalne sterowanie gwarantujące zadaną jakość;

$e^i(t) \in R^{m_i}$ – wektor zmiennych niepewnych działających w torze majoryzowanym przez tor sterowania, wektor $e^i(t)$ nie jest znany, lecz lokalny decydent posiada informacje o ograniczeniach norm poszczególnych składowych niepewności.

Zakłada się następującą ogólną strukturę niepewności:

$$B^i e^i(t) = \Delta A^{ii}(x^i(t),t)x^i(t) + \Delta B^i(x^i(t),t)v^i(t) + d^i(x^i(t),t) \tag{24}$$

gdzie:

macierze ΔA^{ii} oraz ΔB^{ii} uwzględniają niedokładną znajomość, odpowiednio, A^{ii} oraz B^i (ewentualnie ich nieliniowości bądź niestacjonarności);

$d^i(x^i(t),t)$ opisują zakłócenia.

Znane jest oszacowanie normy niepewności $e^i(t)$:

$$\| e^i(t)\| \le F^i\| x^i(t)\| + G^i\| v^i(t) \| + D^i \le$$
$$\le F^i\| x^i(t)\| + G^i\| u^i(t)\| + G^i\| w^i(t)\| + D^i, \quad G^i < 1 \tag{25}$$

Wektor stanu i-tego podsystemu $x^i(t)$ jest dostępny pomiarowo lokalnemu decydentowi, a wartości F^i, G^i, D^i, mogące być funkcjami czasu t, są lokalnemu decydentowi znane. Na poziom koordynatora z każdego podsystemu przekazywany jest w każdej chwili t cały wektor stanu $x^i(t)$.

3.2. Postać praw sterowania

3.2.1. Prawo sterowania koordynatora

Sterowanie wyznaczane przez koordynatora jest sterowaniem optymalnym minimalizującym (21) dla liniowego modelu systemu (20) w oparciu o uzyskaną z podsystemów informację o $x(t)$:

$$u(t) = - R^{-1}B^{T}K(t)x(t) \tag{26}$$

gdzie:

$$K = \begin{bmatrix} K^{1} \\ \cdot\cdot \\ K^{i} \\ \cdot\cdot \\ K^{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{11}, & K^{12}, & \ldots & K^{1L} \\ & \ldots\ldots & & \\ K^{i1}, & K^{i2}, & \ldots & K^{iL} \\ & \ldots\ldots & & \\ K^{L1}, & K^{L2}, & \ldots & K^{LL} \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określonym rozwiązaniem równania Riccatiego:

$$-\dot{K} = A^{T}K + KA - KBR^{-1}B^{T}K + Q$$

z zerowym warunkiem końcowym $K(T) = 0$.

Ze względu na strukturę R oraz B (wzory (22), (4)) mamy:

$$R^{-1} = \mathrm{diag}\,(R^{1^{-1}}, \ldots, R^{L^{-1}})$$

$$B^{T} = \mathrm{diag}\,(B^{1T}, \ldots, B^{LT}),$$

a więc część sterowania koordynatora przekazywana do i-tego podsystemu ma postać:

$$u^{i}(t) = - R^{i^{-1}} B^{iT}K^{i}(t)x(t) \tag{26a}$$

Sterowanie to zapewnia wartość wskaźnika (21) dla modelu (20) równą:

$$J^{0} = x_{0}^{T}K(0)x_{0} \tag{27}$$

3.2.2. Prawo sterowania lokalnego poziomu

Sterowanie uodparniające jest wyznaczane w podsystemach w oparciu o własne informacje o $\| x^{i}(t)\|$, F^{i}, G^{i}, D^{i} oraz uzyskiwaną od koordynatora informację o $u^{i}(t)$, według następującego prawa:

$$w^i(t) = \begin{cases} -\dfrac{B^{iT}K^i(t)x(t)}{\| B^{iT}K^i(t)x(t)\|}\rho^i = \dfrac{R^iu^i(t)}{\| R^iu^i(t)\|}\rho^i\ (\| x^i(t)\|, \| u^i(t)\|) \\ \qquad\qquad x \notin \ker [B^{iT}K^i(t)] \\ \text{dowolne, takie że}\ \| w^i(t)\| \le \rho^i(\| x^i(t)\|, \| u^i(t)\|) \\ \qquad\qquad x \notin \ker [B^{iT}K^i(t)] \end{cases} \tag{28}$$

gdzie:
wielkość $\rho^i(*,*)$, stanowiąca ograniczenie normy sterownaia $w^i(t)$ jest podobnie jak w (11), górnym oszacowaniem niepewności $e^i(t)$. Jego wartość wzynacza się z zależności (25):

$$\| e^i(t)\| \le F^i\| x^i(t)\| + G^i(\| u^i(t)\| + \rho^i) + D^i = \rho^i$$

A więc mamy:

$$\rho^i(\| x^i(t)\|, \| u^i(t)\|) = \\ = (1-G^i)^{-1}(F^i\| x^i(t)\| + G^i\| u^i(t)\| + D^i \tag{29}$$

3.3. Zasadnicze własności sterowania

Niech I będzie wartością wskaźnika (21) dla podsystemów opisanych równaniem (23a) przy $u^i(t)$ danym przez (26a) oraz $w^i(t)$ określonym przez (28).

Podstawową własność sterowania w przedstawionej strukturze można sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2

W strukturze dwupoziomowej (rys. 2) opisanej równaniami (20) - (25), sterowanie $v^i = u^i + w^i$ realizowane w każdym z podsystemów zapewnia wartość globanego wskaźnika jakości I dla rzeczywistego systemu niewiększą od wartości optymalnej wskaźnika J^o (21) dla modelu podstawowego (20), tzn.:

$$I \le J^o$$

Dowód:

Niech:

$$S = S(x(t), t) = x^T(t)K(t)x(t)$$

oznacza funkcję optymalnej jakości. Dla modelu koordynatora, zgodnie z równaniem Bellmana-Hamiltona-Jacobiego, zachodzi:

$$-\frac{\partial S}{dt} = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \frac{\partial S}{\partial x}(Ax(t) + Bu(t)) \tag{30}$$

Oznaczając przez $w(t)$ pełny wektor sterowań lokalnych:

$$w(t) = \begin{bmatrix} w^1 \\ \dots \\ w^i \\ \dots \\ w^L \end{bmatrix} \tag{31}$$

gdzie w^i przyjmują wartości dane wzorem (28), można oszacować wyrażenia:

$$\frac{\partial S}{\partial x} B\,(w(t) + e(t)) = x^T(t)K(t)B(w(t) + e(t)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{L} \frac{x^T(t)K^i(t)B^iB^{iT}K^i(t)x(t)}{\| B^{iT}K^i(t)x(t) \|}\rho^i + \sum_{i=1}^{L} x^T(t)K^i(t)B^ie^i(t) \le$$

$$= -\sum_{i=1}^{L} \| B^{iT}K^i(t)x(t) \| \rho^i + \sum_{i=1}^{L} x^T(t)K^i(t)B^ie^i(t) \le$$

$$\le -\sum_{i=1}^{L} \| B^{iT}K^i(t)x(t) \| \rho^i + \sum_{i=1}^{L} \| x^T(t)K^i(t)B^ie^i(t) \| \le$$

$$\le -\sum_{i=1}^{L} \| B^{iT}K^i(t)x(t) \| \rho^i + \sum_{i=1}^{L} \| x^T(t)K^i(t)B^i \| \, \| e^i(t) \| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{L} \| B^{iT}K^i(t)x(t) \| (-\rho^i + \| e^i(t) \|) \le 0$$

czyli:

$$\frac{\partial S}{\partial x} B(w(t) + e(t)) \le 0 \tag{32}$$

A więc z (30) oraz (32) otrzymuje się:

$$x^TQx + u^TRu + \frac{\partial S}{\partial x}(Ax + B(u + w) + Be) + \frac{\partial S}{\partial t} \le 0 \tag{33}$$

Oznacza to, że dla dowlnych $x(t)$ spełniających (23) oraz sterowań $u(t)$, $w(t)$ określonych w równaniach (26), (28) i (31) mamy:

$$I = \int_0^T (x(t)^TQx(t) + u(t)^TRu(t))\,dt \le x_0^T K(0)x_0 = J^o$$

Strukturę układu sterowania dla i-tego podsystemu przedstawia rys. 4.

Uwaga 4

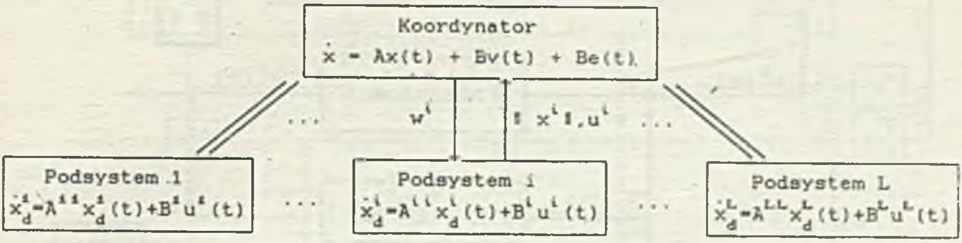
W celu realizacji prawa sterowania lokalnego decydenta wystarczająca jest informacja o normie wektora stanu danego podsystemu. Jeżeli koordynator ma możliwości centralnego pomiaru całego wektora stanu $x(t)$, a możliwości pomiarowe lokalnego decydenta są ograniczone, wówczas informacja o $x^i(t)$ jest uzyskiwana centralnie, zaś informację lokalną stanowi jedynie $\| x^i(t) \|$.

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono syntezę praw sterowania gwarantującego zadaną wartość wskaźnika jakości w dwóch strukturach dwupoziomowych. W pierwszej strukturze zdecentralizowanej lokalny decydent, dysponując liniowym modelem podstawowym swojego podsystemu wyznacza sterowanie minimalizujące kwadratowy lokalny wskaźnik jakości. Koordynator dysponując rozszerzonym modelem całego systemu zabezpiecza odporność sterowania lokalnego decydenta na niepewność w jego modelu podstawowym. Realizuje to zadanie w oparciu o zagregowaną informację o stanie i lokalnym sterowaniu oraz ograniczenia nierównościowe w modelu rozszerzonym. W strukturze scentralizowanej koordynator, bazując na liniowym modelu podstawowym całego systemu i posiadając pełną informację o stanie systemu, wypracowuje sterowanie minimalizujące globalny wskaźnik jakości. Odporność centralnego sterowania na niepewność w modelu gwarantowana jest poprzez lokalnego decydenta, który dysponując modelem rozszerzonym swojego podsystemu zawierającym nierównościowy model niepewności wykorzystuje własne dodatkowe (nieuwzględniane w kosztach globalnych) zasoby i wypracowuje lokalną poprawkę sterowania. Lokalny decydent wykorzystuje do tego celu informację o normie stanu swojego podsystemu, części globalnego sterowania przeznaczonej dla tego podsystemu oraz ograniczeniach lokalnych zmiennych niepewnych.

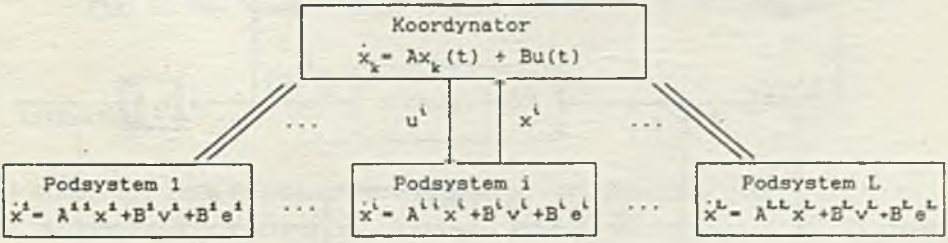
W przypadku obu struktur dodatkowe sterowania uodporniające są ograniczone co do normy, przy czym ograniczenie to pokrywa się z ograniczeniem normy niepewności sprowadzonej do toru sterowania. Zakłada się zatem możliwość majoryzacji niepewności przez sterowanie zarówno, jeśli chodzi o ich wartości, jak i kanały, w których oddziaływują. To ostatnie założenie, znane w literaturze jako matching condition, nie jest zresztą wcale tak ograniczające, jak by mogło się to wydawać, niezależnie od tego czy niepełna informacja dotyczy sprzężeń skrośnych (nieuwzględnionych w modelu podstawowym lokalnego decydenta) zakłóceń, czy też niedokładnie znanych lub zmieniających się parametrów. W przypadku gdy każdy z lokalnych decydentów dysponuje jedynie skalarnym sterowaniem do jego spełnienia wystarczy przyjąć model w postaci formy fazowej równań stanu.

Znacznie większym uproszczeniem jest nieuwzględnienie w rozważanych modelach opóźnień informacyjnych, wynikających z przesyłania danych od koordynatora do podsystemów i odwrotnie oraz opóźnień wyznaczania wartości sterowań. Uwzględnienie tych opóźnień wymaga jednak bardziej skomplikowanego aparatu (patrz np. [8]) i będzie przedmiotem dalszych badań. Należy jednak podkreślić, że wybierając konkretną strukturę trzeba zwrócić uwagę na wykorzystanie możliwości koordynatora i lokalnych decydentów, biorąc pod uwagę m.in. minimalizację tych opóźnień. Służy temu zróżnicowanie modeli poszczególnych poziomów, agregacja informacji i rozdzielenie zadań w sterowaniu. W strukturze scentralizowanej koordynator musi dysponować środkami obliczeniowymi dużej mocy i nie mieć problemów z zebraniem i przetworzeniem dużej ilości informacji bieżącej. Lokalny decydent wyznacza sterowanie według bardzo prostej reguły, ma jednak w swojej dyspozycji "nie kosztujące" zasoby. W przypadku struktury zdecentralizowanej lokalni decydenci muszą być wyposażeni w środki umożliwiające przetworzenie lokalnej informacji. Koordynator w swoich interwencjach przetwarza stosunkowo niewielką informację, musi jednak przeznaczyć na nie własne "nie kosztujące"



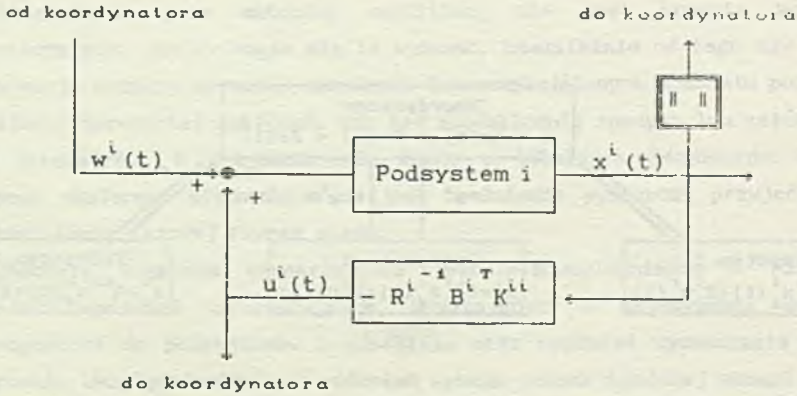
Rys. 1. Struktura informacyjna w zdecentralizowanym systemie dwupoziomowym

Fig. 1. Information structure for decentralized two-level system



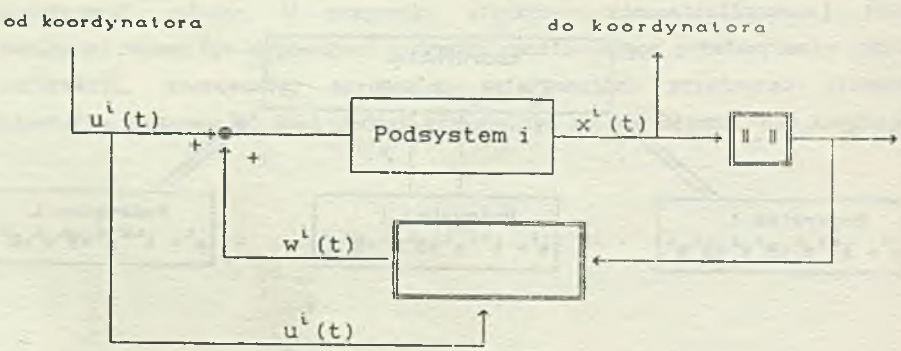
Rys. 2. Struktura informacyjna w scentralizowanym systemie dwupoziomowym

Fig. 1. Information structure for centralized two-level system



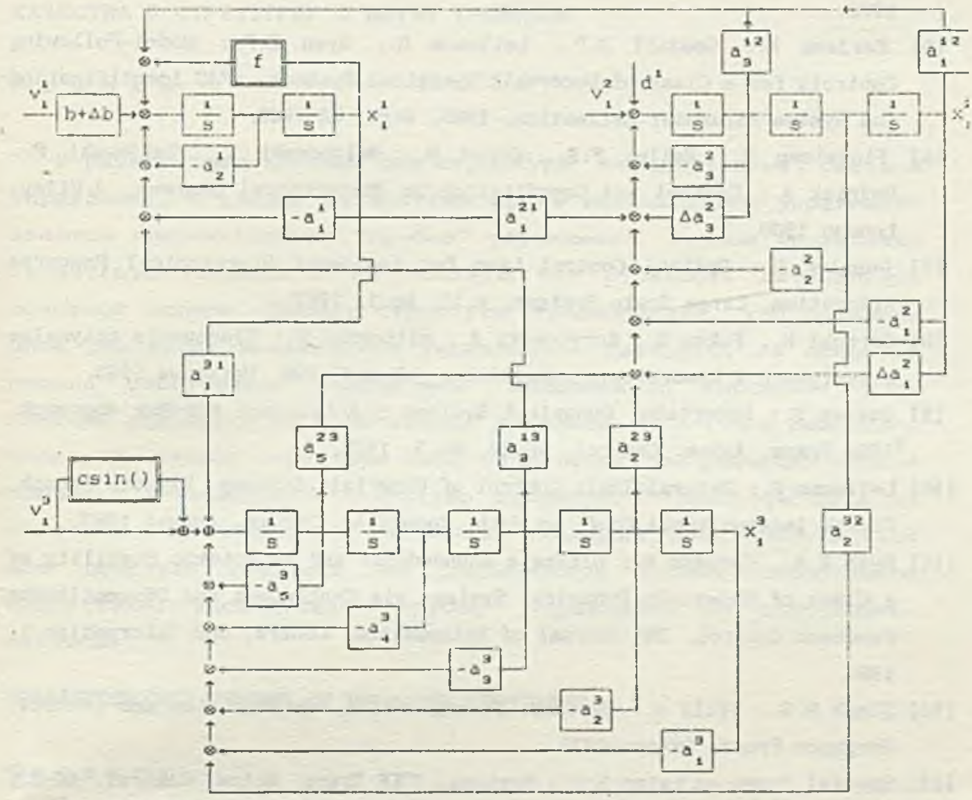
Rys. 3. Sterowanie w i-tym podsystemie w strukturze zdecentralizowanej

Fig. 3. Control structure for decentralized system



Rys. 4. Sterowanie w i-tym podsystemie w strukturze scentralizowanej

Fig. 3. Control structure for centralized system



Rys. 5. Przykładowy "wielki" system

Fig. 5. The "large - scale system" considered in the example

LITERATURA

[1] Athans M., Falb P.: Sterowanie optymalne, WNT, Warszawa 1969.

[2] Barmish B.R., Corless M., Leitmann G.: A New Class of Stabilizing Controlleras for Uncertain Dynamical Systems, SIAM J.Control and Optimization, v.21, No.2, 1983.

[3] Chong C.Y., Athans M.: On the Stochastic Control of Linear Systems with Different Informationm Sets, IEEE Trans. Autom. Control AC-16, 1971.

[4] Chang S.S.L., Peng T.K.C.: Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters, IEEE Trans. Autom. Control, AC-17, No.4, 1972.

[5] Corless M., Goodall D.P., Leitmann G., Ryan E.P.: Model-Following Controls for a Class of Uncertain Dynamical Systems, IFAC Identification and System Parameter Estimation, 1985, York, UK 1985.

[6] Findeisen W., Bailey F.N., Brdyś M., Malinowski k., Tatjewski P., Woźniak A.: Control and Coordination in Hierarchical Systems, J.Wiley, London 1980.

[7] Gessing R.: Optimal Control Laws for two-level Hierarchical Resource Allocation, Large Scale Systems, v.12, No.1, 1987.

[8] Górecki M., Fuksa S., Korytowski A., Mitkowski W.: Sterowanie optymalne w systemach z kwadratowym wskaźnikiem jakości, PWN, Warszawa 1983.

[9] Gutman S.: Uncertain Dynamical Systems - A Lyapunov Min-Max Approach, IEEE Trans. Autom. Control, AC-24, No.3, 1979.

[10] Leitmann G.: Deterministic Control of Uncertain Systems, Keynote speach, Fourth International Conf. on Math. Modelling, Zurich, August 1983.

[11] Ryan E.P., Corless M.: Ultimate Boundedness and Asymptotic Stability of a Class of Uncertain Dynamical Systems via Continuous and Discontinuous Feedback Control, IMA Journal of Mathematical Control and Information 1, 1984.

[12] Singh M.G., Titli A.: Systems: Decomposition, optimisation and control, Pergamon Press, Oxford 1978.

[13] Special Issue on Large Scale Systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-23, No.1, 1978.

[14] Świerniak A.: O pewnym sterowaniu dla układu z nierównościowym modelem niepewności, ZN Pol. Śl., z.81, Gliwice 1987.

[15] Świerniak A.: Sterowanie w warunkach niepewności - modele nierównościowe ZN Pol.Śl., z.90, Gliwice 1988.

[16] Vinkler A., Wood L.J.: Multistep Guaranteed Cost Control of Linear Systems with Unknown Parameters, Journal of Guidance and Control, v.2, No.6, 1979.

[17] Wierzbicki A.: Modele i wrażliwość układów sterowania, WNT, Warszawa 1977.

Recenzent: Doc.dr hab.inż. Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji 15.03.1990 r.

УПРАВЛЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕННУЮ ВЕЛИЧИНУ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА В СТРУКТУРАХ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ

Р е з ю м е

В работе представлены две структуры иерархической системы управления, в каждой из которых кроме номинального управления имеется дополнительное "грубое" управление. Грубое управление гарантирует стоимость не большую чем стоимость оптимальной основной модели. Первая структура предполагает, что решающий блок реализует номинальное управление, базируясь на основной модели собственной подсистемы. Координатор выполняет роль внешней поддержки из собственных резервов локального решающего блока. Во второй структуре цель управления для решающих блоков подлежит изменению. Координатор реализует глобальную цель на базе основной модели, а локальный решающий блок поддерживает его действия опираясь на расширенную модель собственной подсистемы, выработывая "грубое" управление из собственных ресурсов.

GUARANTEED COST CONTROL IN TWO-LAVEL STRUCTURES

S u m m a r y

Two hierarchical structures are proposed in the paper. Two types of control exist in the structures, the first one "nominal" ensures the optimal solution for a basic model, the second "robust" guarantees the cost not greather then the nominal one. In the first structure a local decision maker finds the nominal control law basing on the basic model of the own subsystem. A coordinator ensures robustness using his own resorces to aid the local decision maker. In the second structure the roles of the decison makers are changed. The global objective is realized by the coordinator while the local decision makers help him to assure robustness using their own resources and the extended model of their subsystems.