ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: BUDOWNICTWO z.89 Nr kol. 1482

Marek BARTOSZEK

WSPÓŁCZYNNIKOWE ZAGADNIENIE ODWROTNE PRZEWODNICTWA CIEPŁA

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki analizy algorytmu wyznaczania własności materiałowych na podstawie rozwiązania odpowiedniego odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła. Parametrami decyzyjnymi w opisywanym algorytmie są dwa współczynniki zależne od temperatury: współczynnik przewodzenia ciepła λ oraz ciepło właściwe c_p. Analizowane jest dwuwymiarowe ($2D$), niestacjonarne zagadnienie przewodnictwa ciepła, w którym dodatkowym źródłem informacji jest temperatura w kilkudziesięciu punktach brzegowych. Wyniki pracy mają stanowić podstawę do przeprowadzenia badań laboratoryjnych mających na celu zbadanie możliwości wykorzystania analizy odwrotnej i pomiarów termowizyjnych do wyznaczania stałych termofizycznych materiałów budowlanych.

PARAMETERS ESTIMATION INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

Abstract. The present paper contains the results of analysis of the numerical algorithm of searching thermo-physical parameters of material by solving inverse heat conduction problem. Design parameters are (unknown value) two coefficients, which depends on temperature: heat conduction coefficient λ and specific heat c_p. Two-dimensional ($2D$), transient, heat conduction problem is analysed. The surface temperature (measured in tens points) is a source of additional required information. The results of that paper will be a base for investigation the possibility of application proposed inverse methods and thermovision measurements for describing thermal coefficients of building materials.

1. Wstęp

W celu poprawnego sformułowania zagadnienia przewodzenia ciepła niezbędna jest znajomość geometrii (wymiarów) analizowanego obszaru (obiektu), jego cech fizycznych oraz warunków brzegowych (warunków wymiany ciepła z otoczeniem). Z rozwiązania odpowiedniego problemu brzegowego (początkowo-brzegowego) można wówczas wyznaczyć rozkład temperatury wewnątrz i na brzegu obszaru. Jednakże w wielu zagadnieniach inżynierskich nie jest możliwe określenie wszystkich parametrów opisujących zadanie (np. nieznane są niektóre dane opisujące geometrię obszaru lub jego własności), ale w zamian za to możliwe jest wy-

znaczenie innych wielkości, np. poprzez pomiar temperatury w niektórych punktach wewnątrz lub na brzegu obszaru (por. [1], [3], [5]). W takim przypadku nieznane wielkości wyznacza się poprzez rozwiązanie tzw. odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła. Gdy poszukiwanymi parametrami są wymiary obszaru lub współczynniki termiczne, to mówimy odpowiednio o geometrycznym (np. [3], [4], [5]) lub współczynnikowym zadaniu odwrotnym ([1], [2]).

W pracy wykorzystano współczynnikowe zagadnienie odwrotne do poszukiwania współczynnika przewodzenia ciepła λ i ciepła właściwego c_p badanego ośrodka, przy czym źródłem dodatkowych informacji, niezbędnych do rozwiązania postawionego problemu, były wyniki symulowanego numerycznie pomiaru temperatury na części brzegu. Założono, że symulowane pomiary powinny być zbliżone w charakterze do danych uzyskiwanych za pomocą kamery termowizyjnej (por. [3], [5]).

Pomiary termowizyjne dostarczają dużą liczbę danych (zależną tylko od rozdzielczości kamery) i charakteryzują się dużą dokładnością – z inżynierskiego i obliczeniowego punktu widzenia (<0.2°C – por. [4], [5]). Symulowano je rozwiązując zagadnienie wprost dla zadanych parametrów i wyznaczając temperaturę w tzw. punktach pomiarowych. Ponieważ każdemu pomiarowi towarzyszy błąd pomiarowy, otrzymane temperatury zaburzano poprzez narzucenie losowego błędu nie przekraczającego zadanej maksymalnej wartości.

Poszukiwanie parametrów materiałowych zależnych od temperatury prowadzi do zagadnień nieliniowych i niestacjonarnych.

2. Sformułowanie zadania odwrotnego

Przedmiotem analizy jest zadanie osiowosymetryczne określone w obszarze walcowym Ω. Wielkością poszukiwaną w problemie „wprost" jest temperatura spełniająca wewnątrz obszaru równanie o postaci

$$\nabla_r\left[\lambda(T)\nabla_r T(\mathbf{x},t)\right] = \rho c_p(T)\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} \quad \text{dla } \mathbf{x}\in\Omega \text{ i } t\in(0,\infty), \tag{1}$$

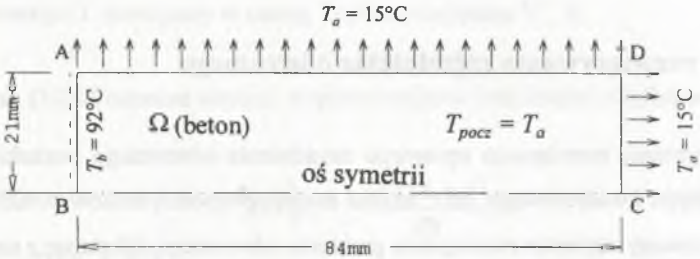
gdzie przez $T = T(\mathbf{x},t)$ oznaczono temperaturę w punkcie $\mathbf{x} = (x,y)\in\Omega$, $\lambda(T), c_p(T)$ - odpowiednio: (zależne od temperatury) współczynnik przewodzenia ciepła [W/m K] oraz ciepło właściwe [J/kg K], charakteryzujące wraz z masą właściwą ρ [kg/m^3] materiał wypełniający obszar Ω.

Brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω dzielimy na trzy rozłączne części $\partial\Omega_1 = \mathrm{AB}, \partial\Omega_2 = \mathrm{BC}$ i $\partial\Omega_3 = \mathrm{CDA}$ (por. rys. 1) takie, że $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$. Na brzegu $\partial\Omega_1 = \mathrm{AB}$ (lewa podstawa walca – rys. 1) zadano warunek brzegowy pierwszego rodzaju, czyli w każdej chwili czasu znana jest temperatura T_b

$$T(\mathbf{x},t) = T_b \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \text{ i } t \in (0,\infty). \tag{2}$$

Brzeg $\partial\Omega_2$ jest osią symetrii walca, stąd spełniony musi być warunek symetrii

$$\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial n} = 0 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \text{ i } t \in (0,\infty). \tag{3}$$



Rys.1. Analizowany obszar Ω (połowa przekroju podłużnego)
Fig.1. Analysed domain Ω (half of its longitudinal section)

Na części brzegu $\partial\Omega_3$ założono warunek trzeciego rodzaju (prawo Newtona) o postaci:

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial n} = \alpha\left(T(\mathbf{x},t) - T_z\right) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega_3 \text{ i } t \in (0,\infty), \tag{4}$$

gdzie: T_z jest temperaturą otoczenia, a α - współczynnikiem przejmowania ciepła [W/m^2 K]. Znany jest również rozkład temperatury w chwili początkowej – tutaj przyjęto stałą temperaturę w całym obszarze i równą temperaturze otoczenia, tj.

$$T(\mathbf{x},0) = T_{pocz} = T_z \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega \ . \tag{5}$$

Założono, że zarówno współczynnik przewodności cieplnej λ, jak i pojemność cieplna c_p są wielkościami przedziałami liniowo zależnymi od temperatury.

Jeśli wszystkie wielkości opisujące obszar Ω (rys. 1.) będą określone, znane będą wartości współczynników $\lambda, c_p, \rho, \alpha$ oraz temperatury T_b, T_z, T_{pocz}, to rozwiązując równania (1)÷(5) (zadanie wprost), wyznaczymy rozkład temperatury w walcu ogrzewanym na jednej z podstaw źródłem ciepła o stałej temperaturze. Ze względu na symetrię zagadnienia rozpatrujemy jedynie połowę przekroju podłużnego obszaru walcowego (rys. 1). Rozwiązanie zadania

wprost nie jest możliwe, gdy choć jeden z wyżej wymienionych parametrów jest nieznany. Wyznaczenie takiego parametru (lub kilku) możliwe jest w niektórych przypadkach, gdy dysponujemy dodatkowymi informacjami o analizowanym zjawisku, np. pomiarem temperatury na brzegu lub wewnątrz obszaru.

Załóżmy, że w równaniu (1) nie są znane współczynniki λ, c_p, ale znana jest, np. z pomiarów, zmieniająca się w czasie temperatura w N_{pom} punktach rozłożonych wzdłuż tworzącej walca (część AD brzegu analizowanego obszaru – rys. 1). Pomiarów dokonujemy w N_{czas} momentach czasu. Proces wyznaczania nieznanych współczynników – zmiennych decyzyjnych – nosi nazwę rozwiązania współczynnikowego zagadnienia odwrotnego przewodnictwa ciepła (por. np. [1]).

3. Algorytm rozwiązywania zagadnienia odwrotnego

W celu otrzymania rozwiązania opisanego zagadnienia odwrotnego poszukiwano minimum funkcji błędu kwadratowego przy użyciu metody współczynników wrażliwości (por. [1], [2]). Zastosowany algorytm rozwiązania problemu odwrotnego składa się z następujących etapów:

a) Określenia rodzaju i liczby N_d parametrów decyzyjnych (np. λ, c_p) tworzących wektor $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_{Nd}]$.

b) Wyznaczenia temperatury w N_{pom} przyjętych wcześniej punktach pomiarowych $\mathbf{x}_{pom} = (x_{1pom}, x_{2pom}, \ldots, x_{Npom})$. Na obecnym etapie badań pomiary są symulowane numerycznie przez rozwiązanie niestacjonarnego zadania wprost dla docelowych (założonych) wartości parametrów decyzyjnych. Na wyliczone w punktach pomiarowych dokładne wartości temperatury narzucane jest losowe zakłócenie o założonym maksymalnym błędzie bezwzględnym lub procentowym. Temperatura we wszystkich punktach pomiarowych i w zadanych N_{czas} chwilach czasu - $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_{Nczas})$ - zapamiętywana jest w wektorze

$$\mathbf{U} = \left(U_1^{t1}, U_2^{t1}, \ldots, U_{Npom}^{t1}, U_1^{t2}, U_2^{t2}, \ldots, U_{Npom}^{t2}, \ldots, U_1^{tNczas}, U_2^{tNczas}, \ldots, U_{Npom}^{tNczas}\right). \tag{6}$$

c) Przyjęcia wyjściowych wartości zmiennych decyzyjnych (współczynnika przewodności i/lub ciepła właściwego) – wektor $\mathbf{Y}^*$ – i rozwiązania zadania wprost w celu określenia odpowiadających im temperatur w punktach pomiarowych i wybranych chwilach czasu, czyli wektora

$$\mathbf{T}^{*} = \left(T_1^{*t1}, T_2^{*t1}, \ldots, T_{Npom}^{*t1}, T_1^{*t2}, T_2^{*t2}, \ldots, T_{Npom}^{*t2}, \ldots, T_1^{*tNczas}, T_2^{*tNczas}, \ldots, T_{Npom}^{*tNczas}\right). \tag{7}$$

d) Poszukiwania takiej nowej wartości wektora **Y** i odpowiadającego mu wektora **T**, aby różnica pomiędzy temperaturami **U** i **T** była możliwie najmniejsza. Jako kryterium, z którego wyznaczany jest wektor **Y**, przyjęto minimum funkcji błędu kwadratowego (funkcji celu) w postaci wektorowej

$$\Delta(\mathbf{Y}) = [\mathbf{U} - \mathbf{T}]^T [\mathbf{U} - \mathbf{T}] \rightarrow \min. \tag{8}$$

Na tym etapie badań poszukiwane jest minimum funkcji (8) w całym przedziale czasu trwania analizowanego niestacjonarnego procesu (analiza globalna), stąd wzór (8) możemy zapisać jako

$$\Delta(Y_1, \ldots, Y_{Nd}) = \sum_{k=1}^{Nczas} \sum_{i=1}^{Npom} \left(U_i^k - T_i^k\right)^2, \tag{9}$$

przy czym wektor **T** rozwijamy w szereg Taylora względem $\mathbf{Y}^{*}$, tj.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{*} + \mathbf{Z}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{*}\right). \tag{10}$$

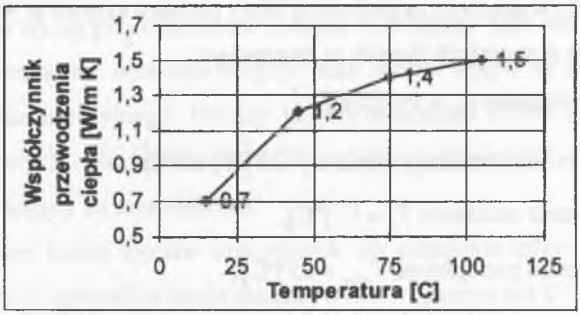
We wzorze (10) **Z** oznacza macierz współczynników wrażliwości zdefiniowanych następująco

$$\mathbf{Z} = \left[Z_i^{j,tk}\right] = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{Y}}, \tag{11}$$

gdzie $Z_i^{j,tk} = \dfrac{\partial T(\mathbf{Y}, x_i, t_k)}{\partial Y_j}$ w punkcie brzegowym $x = x_i$ i w chwili $t = t_k$.

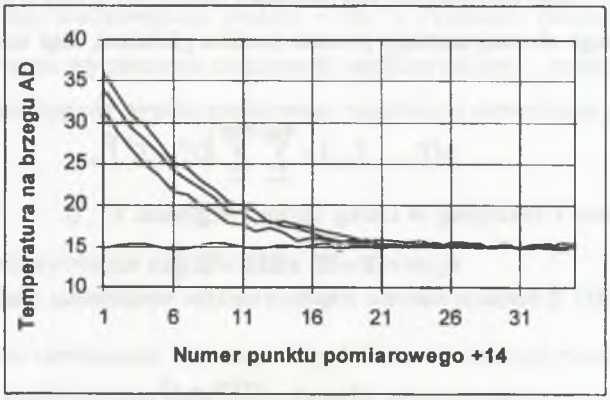
Z warunku minimum funkcji (9) przy uwzględnieniu związku (10) znajdujemy wektor **Y**. Jeśli nie jest spełniony warunek zakończenia obliczeń, np. $\|\mathbf{U} - \mathbf{T}\| < \varepsilon$, powtarzamy punkty c) i d) algorytmu przyjmując nową wartość wektora $\mathbf{Y}^{*} = \mathbf{Y}$.

4. Przykład realizacji algorytmu



Rys.2. Odtwarzany przebieg współczynnika przewodzenia ciepła
Fig.2. Reconstructed course of heat transfer coefficient

Niech w opisanym równaniami (1)÷(5) problemie poszukiwana będzie funkcja pokazująca zmieniający się z temperaturą współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = \lambda(T)$. Zakładamy, że odtwarzaną funkcję $\lambda = \lambda(T)$ można aproksymować za pomocą łamanej jak na rys. 2. Temperaturom 15, 45, 75, 105 °C odpowiadają wartości współczynnika 0.7, 1.2, 1.4, 1.5 [W/m K]. Tak więc zadanie odwrotne będzie zawierało cztery parametry decyzyjne ($N_d = 4$).



$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \tag{12}$$

Rys.3. Rozkład temperatury na brzegu w różnych chwilach czasu
Fig.3. Surface temperature for different moments

Wymiary analizowanego obszaru przedstawione są rys.1. Zakładamy, że na brzegu AD dokonywany jest pomiar w pięćdziesięciu ($N_{pom} = 50$) równo oddalonych punktach. Założono, że losowo generowany błąd pomiaru nie jest większy niż ±0.5°C, czyli ponad 3-krotnie większy niż dokładność pomiaru kamerą termowizyjną. Przykładowe rozkłady temperatury na części brzegu, w różnych chwilach czasu, wynikające z symulowanych pomiarów przedstawiono na rys. 3. Ze względu na symulowane błędy pomiaru krzywe te nie są gładkie.

Wartości liczbowe pozostałych danych są następujące:

- ciepło właściwe $c_p = 998\,[\mathrm{J/kg\,K}]$,
- współczynnik wnikania ciepła $\alpha = 30\,[\mathrm{W/m^2\,K}]$,
- temperatura otoczenia $T_a = 15\,[°\mathrm{C}]$,
- temperatura początkowa $T_{pocz} = 15\,[°\mathrm{C}]$,
- temperatura źródła ciepła (elementu grzejnego) $T_h = 92\,[°\mathrm{C}]$.

Jako wartości wyjściowe zmiennych decyzyjnych w procesie iteracyjnym przyjęto odpowiednio

$$\mathbf{Y}^* = \left[Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*\right] = [0.5; 1{,}0; 1{,}6; 1{,}0] \tag{13}$$

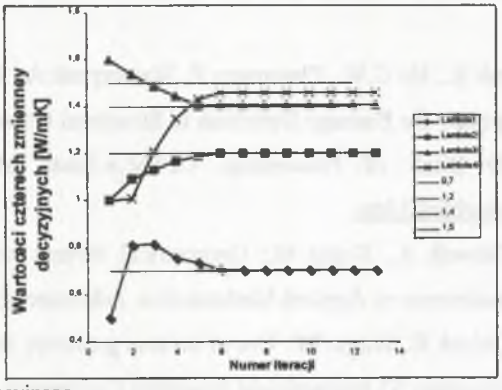
Współczynniki wrażliwości wyznaczono numerycznie zastępując pochodne cząstkowe centralnymi ilorazami różnicowymi

$$Z_i^{j,tk} = \frac{\partial T(\mathbf{Y}, x_i, t_k)}{\partial Y_j} \approx \frac{T_i\left(Y_i^j + \varepsilon, x_i, t_k\right) - T_i\left(Y_i^j - \varepsilon, x_i, t_k\right)}{\varepsilon} \tag{14}$$

Jako rozwiązanie uzyskano już w szóstej iteracji (choć obliczenia prowadzone były do 12 iteracji) wektor

$$\mathbf{Y} = \left[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\right] = [0{,}7050; 1{,}1988; 1{,}4055; 1{,}4582] \tag{15}$$

Przebieg procesu iteracyjnego dla wszystkich czterech parametrów decyzyjnych ilustruje rys.4., na którym poziome linie oznaczają ich dokładne wartości.



Rys.4. Przebieg procesu iteracyjnego
Fig.4. Iteration process

5. Podsumowanie

Oprócz opisanego wyżej przykładowego zadania, rozwiązano cały szereg innych, w których zmieniano poszczególne wielkości mogące mieć istotny wpływ na przebieg (czas i dokładność) rozwiązania iteracyjnego. Między innymi zmieniano liczbę kroków czasowych. Wyniki dotychczasowych obliczeń nie pozwoliły ustalić optymalnej ich liczby, a jest to parametr istotnie wpływający na czas obliczeń.

Zmieniano również liczbę kroków iteracyjnych. Na podstawie kilkunastu rozwiązanych zadań zauważono, że w przypadku błędu pomiarów nie większego niż 0.5 stopnia zadowalające wyniki uzyskuje się dla 6 iteracji. Należy zaznaczyć, że nie we wszystkich przypadkach zakłóceń pomiaru rozwiązanie jest aż tak bliskie dokładnych wartości parametrów decyzyj-

nych (rys. 4.). Jednakże błąd w rozwiązaniach nie przekraczał nigdy kilkunastu procent. Zagadnienie wpływu błędu pomiaru na istnienie rozwiązania i jego dokładność wymaga jeszcze dłuższej analizy.

Praca została wykona w ramach projektu badawczego nr 7 T07E 040 19 finansowanego przez KBN.

LITERATURA

1. Kurpisz, A., Nowak, A. J.: Inverse Thermal Problems, International Series on Computational Engineering, Comp. Mech. Publications, 1995.
2. Kurpisz, A., Nowak, A. J.: Applying BEM and the Sensitivity Coefficient Concept to Inverse Heat Conduction Problems, Int. J. for Num. Methods in Eng., vol. 32, 363-383, 1991.
3. Shih J.K.C., Delpak R., Hu C.W., Plassmann P, Wawrzynek A., Kogut M.: Application of Infrared Thermograhpy for Damage Detection in Structural Concrete – A Preliminary Report, NDTISS'99 Book of Proceeding, UFSM, Santa Maria, RS, Brazil,1999, http://www.ndt.net/v05n02.htm
4. Wawrzynek A., Nowak A., Kogut M.: Geometrical inverse heat conduction problems, XXVIII Polish Conference of Applied Mathematics, Zakopane, 1999.
5. Wawrzynek A., Delpak R., Kogut M.: Use of inverse geometry thermal solution technique for damage identification, XI International Scientific Conference, Brno, 1999.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Janusz Skorek

Abstract

The paper presents description of an algorithm of solution of the transient, non-linear inverse problems where material thermal coefficients are design parameters. The sensitivity coefficient method and the least square error objective function are used. The results of simulated infrared camera measurement are a source of additional information in the inverse problem. Analysed simple problem has four design parameters: different values of thermal conductivity. It is assumed that this parameter is linear function (in three intervals) of temperature.

Results of calculation shows that the transient inverse algorithm is useful to evaluate thermal properties of materials that depend on temperature. Obtained solutions are convergent and have accuracy less than 15% for 0.5°C measurement errors.