ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: BUDOWNICTWO z.89 Nr kol. 1482

Tomasz KRYKOWSKI

KOMPUTEROWE METODY ANALIZY PRĘTÓW ZAKRZYWIONYCH - ORTOTROPOWYCH

Streszczenie. W pracy zaprezentowano analizę przestrzennie zakrzywionych prętów o strukturze ortotropowej. W szczególności przedstawiony został opis geometrii, sformułowano funkcję energii wewnętrznej oraz związki konstytutywne. W opisie kinematyki została uwzględniona deplanacja przekroju pręta spowodowana skręcaniem. Przykładowe zadanie zostało rozwiązane za pomocą programu napisanego w środowisku MATLAB oraz porównane z obliczeniami otrzymanymi w programie ANSYS.

COMPUTER METHODS OF ANALYSIS OF SPACE CURVED BEAMS WITH ORTHOTROPIC STRUCTURE

Summary. In this work the analysis of the space-curved beams with the orthotropic structure has bean presented. In particular the description of the geometry, formulation of the inner energy and constitutive relations has been considered. In the formulation of the kinematics the warping function has bean introduced. The sample exercise has been solved in program written in MATLAB language and compared with the solutions obtained in the ANSYS program.

1. Geometria pręta zakrzywionego

Rozważamy pręt zakrzywiony przestrzennie (ciało materialne B) zanurzony w przestrzeni fizycznej E^3. Będziemy przyjmować, że zbiór wszystkich środków ciężkości przekrojów pręta $S_M(X^3)$ dla $X^3 \in (S_0, S_*)$ wyznacza oś pręta L rozumianą jako zbiór punktów $l \subset E^3$ takich, że dowolnemu punkowi $\mathrm{X} \in L$ przyporządkowane będzie otoczenie $\mathrm{U}(\mathbf{X}) \subset l$ homeomorficzne z przedziałem otwartym $(a,b) \subset R$. Zdefiniujmy w dowolnym punkcie $M \in L$, figury $H_1 = (M, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$, $H^2 = (M, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$, w których przez $\mathbf{A}_I$, $(\mathbf{A}^J)$ oznaczono wektory bazy podstawowej (dualnej) oraz tensory metryczne w bazie podstawowej (dualnej) $A_{IJ} = \mathbf{A}_I \cdot \mathbf{A}_J$, $(A^{IJ} = \mathbf{A}^I \cdot \mathbf{A}^J)$. W innym punkcie $N \in S_M$ określamy figury $Q^{(1)} = (N, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3)$ i $Q^{(2)} = (N, \mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$ złożone z punktu N, a także wektorów bazy podstawowej (dualnej) $\mathbf{G}_I, (\mathbf{G}^J)$ oraz zdefiniujemy tensory metryczne bazy podstawowej

(dualnej), $G_{IJ} = \mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}_J$, $\left(G^{IJ} = \mathbf{G}^I \cdot \mathbf{G}^J\right)$ por. [1], [7], gdzie wektory bazowe w punktach N i M zdefiniowane są w postaci:

$$\mathbf{A}_\Gamma = \mathbf{R}\left(X^\Delta, X^3\right)_{,\Gamma}\Big|_{X^\Delta=0}, \quad \mathbf{A}_3 = \overline{\mathbf{R}}\left(X^3\right)_{,3}, \quad \mathbf{A}^I \cdot \mathbf{A}_J = \delta^I_J \tag{1}$$

$$\mathbf{G}_I = \mathbf{G}_I\left(X^\Delta, X^3\right) = \mathbf{R}_{,I}, \quad I = 1,2,3 . \tag{2}$$

Wektor $\mathbf{R}$ zdefiniowany w (1), (2) jest wektorem pozycyjnym dowolnego punktu N (należącego do obszaru S_M), określony jest sumą promienia wodzącego $\overline{\mathbf{R}} = \overline{R}^I \mathbf{i}_I = \overline{\mathbf{R}}\left(X^3 = s\right)$ oraz kombinacją liniową wektorów bazowych $\mathbf{A}_\Delta$ zdefiniowanych w przestrzeni osi pręta L (rozmaitości jednowymiarowej).

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\left(X^\Gamma, X^3\right) = \overline{\mathbf{R}}\left(X^3\right) + X^\Gamma \mathbf{A}_\Gamma, \Gamma = 1,2 . \tag{3}$$

Możemy wykazać por. (Suchubi [7]), że pomiędzy wektorami bazowymi zachodzą zależności w postaci:

$$\mathbf{G}_I = \Theta^J_I \mathbf{A}_J, \quad \left(\mathbf{A}_I = \left(\Theta^{-1}\right)^J_I \mathbf{G}_J\right), \tag{4}$$

gdzie

$$\begin{gathered} \Theta^J_I = \delta^J_I - (1-\Theta)\delta^3_I \delta^J_3 + \delta^3_I \delta^J_\Gamma \Theta^\Gamma , \\ \left(\Theta^{-1}\right)^J_I = \frac{1}{\Theta}\left[\Theta\delta^J_I + (1-\Theta)\delta^3_I\delta^J_3 - \delta^3_I\delta^J_\Gamma\Theta^\Gamma\right], \\ \Theta^J_I\left(\Theta^{-1}\right)^K_J = \delta^K_I , \quad \Theta = \det\left[\Theta^I_I\right]. \end{gathered} \tag{5}$$

w równaniu (5) przyjęto oznaczenia $\Theta = 1 - B_\Gamma X^\Gamma$, $\Theta^\Gamma = B^\Gamma_\Delta X^\Delta$, gdzie tensory B^Γ_Δ oraz B_Γ określone są zależnościami:

$$B^\Gamma_\Delta = \begin{Bmatrix} \Gamma \\ \Delta 3 \end{Bmatrix}, \quad B_\Gamma = -\begin{Bmatrix} 3 \\ \Gamma 3 \end{Bmatrix} . \tag{6}$$

Przyjmijmy teraz, że dowolnemu punktowi osi pręta $M \in L$, przyporządkujemy figurę $F_1 = \left(M, \mathbf{A}_{1'}, \mathbf{A}_{2'}, \mathbf{A}_{3'}\right)$, gdzie wektory bazy $\mathbf{A}_{I'}, I = 1,2,3$ tworzą trójścian Fréneta - Serreta. Ta nowa baza jest zorientowana w przestrzeni w taki sposób, że wektory bazowe figur $H_1 : \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ oraz $F_1 : \mathbf{A}_{1'}, \mathbf{A}_{2'}$ leżą w płaszczyźnie przekroju pręta $S_M\left(X^3\right)$ i są obrócone względem siebie o dodatni kąt φ, tzn. pomiędzy bazami zachodzą zależności:

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_I = A^{J'}_I \mathbf{A}_{J'} , \\ \mathbf{A}^I = A^I_{J'} \mathbf{A}^{J'} . \end{gathered} \tag{7}$$

Na podstawie wzoru (7) możemy zapisać zależności określające formy B^Γ_Δ i B_Γ w bazie Fréneta – Serreta:

$$B^{\Gamma} = \mathbf{A}^{\Gamma} \cdot \mathbf{A}_{3,3} = A^{\Gamma}_{\Delta'} \nu^{\Delta'} \ , \quad B_{\Gamma} = \mathbf{A}_{\Gamma} \cdot \mathbf{A}_{3,3} = A^{\Delta'}_{\Gamma} \nu_{\Delta'} \ ,$$
$$B^{\Gamma}_{\Delta} = \mathbf{A}^{\Gamma} \cdot \mathbf{A}_{\Delta,3} = A^{\Gamma}_{\Phi'} A^{\Phi'}_{\Delta,3} + A^{\Gamma}_{\Phi'} A^{\Theta'}_{\Delta} \nu^{\Phi'}_{\Theta'} \ , \tag{8}$$
$$B_{\Gamma\Delta} = \mathbf{A}_{\Gamma} \cdot \mathbf{A}_{\Delta,3} = A^{\Delta'}_{\Gamma} A^{\Phi'}_{\Delta} \nu_{\Delta'\Phi'} + A^{\Delta'}_{\Gamma} A^{\Phi'}_{\Delta,3} A_{\Delta'\Phi'} \ .$$

2. Podstawowe zależności pomiędzy tensorami dwupunktowymi

Można wykazać, por. (E. S. ŞUCHUBI [8]), że dla pól wektorowych (tensory pierwszego rzędu), tensorów drugiego rzędu oraz pochodnych kowariantnych odpowiednio tensorów pierwszego i drugiego rzędu zachodzą następujące zależności:

$$T_I = \Theta^J_I \overline{T}_J \ , \quad T^I = \left(\Theta^{-1}\right)^I_J \overline{T}^J \ , T^I_J = \left(\Theta^{-1}\right)^I_K \Theta^L_J \overline{T}^K_L \ , \quad \overline{T}^I_J = \Theta^I_K \left(\Theta^{-1}\right)^L_J T^K_L \ ;$$
$$\overline{T}_I = \left(\Theta^{-1}\right)^J_I T_J \ , \quad \overline{T}^I = \Theta^I_J T^J \ . \ T^{IJ} = \left(\Theta^{-1}\right)^I_K \left(\Theta^{-1}\right)^J_L \overline{T}^{KL} \ , \quad \overline{T}^{IJ} = \Theta^I_K \Theta^J_L T^{KL}$$

$$T_{I;J} = \Theta^K_I \overline{T}_{K;J} \ , \quad T^I_{;J} = \left(\Theta^{-1}\right)^I_K \overline{T}^K_{;J} \ ,$$

$$T^I_{J;K} = \left(\Theta^{-1}\right)^I_M \Theta^N_J \overline{T}^M_{N;K} \ , \ T_{IJ;K} = \Theta^M_I \Theta^N_J \overline{T}_{MN;K} \ , \ T^{IJ}_{;K} = \left(\Theta^{-1}\right)^I_M \left(\Theta^{-1}\right)^J_N \overline{T}^{MN}_{;K} \tag{9}$$

3. Tensor odkształcenia

Wykorzystując zależności (9), możemy tensor odkształcenia w dowolnym punkcie obszaru pręta w bazie $\mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J$, $2 \cdot E_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K}$ zapisać w bazie $\mathbf{A}^I \otimes \mathbf{A}^J$. Współrzędne tensora $\overline{\mathbf{E}} = \overline{E}_{IJ} \mathbf{A}^I \otimes \mathbf{A}^J$ w tej nowej bazie mogą być zapisane w postaci:

$$2 \cdot \overline{E}_{\Gamma 3} = \overline{U}_{3,\Gamma} + \Theta^{-1}\left(\overline{U}_{\Gamma;3} + \Theta^{\Delta} \overline{U}_{\Gamma,\Delta}\right),$$
$$\overline{E}_{33} = \Theta^{-1}\left(\overline{U}_{3;3} + \Theta^{\Gamma} \overline{U}_{3,\Gamma}\right). \tag{10}$$

4. Hipoteza kinematyczna

Analizując deformację pręta, przyjmiemy, że przemieszczenie dowolnego punktu przekroju jest traktowane jako superpozycja przemieszczenia w osi pręta, obrotu względem środka ciężkości oraz spaczenia przekroju pręta wywołanego działaniem momentu skręcającego.

$$\mathbf{U}\left(X^{\Delta}, X^3\right) = \overline{\mathbf{u}}\left(X^3\right) + X^{\Delta} \mathbf{\Phi}_{\Delta}\left(X^3\right) + \mathbf{\Psi}\left(X^{\Delta}, X^3\right), \tag{11}$$

gdzie

$$\mathbf{\Phi}_1 = \sqrt{A}\theta^3 \mathbf{A}^2 - \sqrt{A}\theta^2 \mathbf{A}^3 \ , \quad \mathbf{\Phi}_2 = -\sqrt{A}\theta^3 \mathbf{A}^1 + \sqrt{A}\theta^1 \mathbf{A}^3 \ , . \tag{12}$$

Pochodne wektorowego pola przemieszczeń mogą być przedstawione w postaci:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_{,\Gamma} = \Phi_{\Gamma\Phi}\mathbf{A}^{\Phi} + \Phi_{\Gamma 3}\mathbf{A}^{3} + \Psi_{3}\left(X^{I}\right)_{,\Gamma}\mathbf{A}^{3}, \\
&\mathbf{U}_{,3} = \bar{u}_{\Gamma;3}\mathbf{A}^{\Gamma} + \bar{u}_{3;3}\mathbf{A}^{3} + \Psi_{3}\left(X^{I}\right)_{,3}\mathbf{A}^{3} + \Psi_{3}\left(X^{I}\right)B_{\Delta}\mathbf{A}^{\Delta} \\
&\quad + X^{\Delta}\Phi_{\Delta\Phi;3}\mathbf{A}^{\Phi} + X^{\Delta}\Phi_{\Delta 3;3}\mathbf{A}^{3}.
\end{aligned} \tag{13}$$

5. Energia wewnętrzna pręta

Analizując składowe stanu odkształcenia oraz przyjmując zerowanie się (w teorii liniowej geometrycznie) składowych stanu odkształcenia $E_{\Delta\Gamma} = 0$, $(\Phi_{\Delta\Gamma} \equiv 0)$, otrzymamy po uwzględnieniu hipotezy Bernoulliego $(\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0)$, oraz hipotezy Wegnera (zakładającej, że przekrój pręta może zostać spaczony tylko w kierunku osi pręta $(\Gamma_{TS} = \tilde{K}_3 + \Psi = 0)$), energię sprężystą dla prętów zwartych w postaci:

$$EW = \int_{L}\left(\delta\tilde{\Gamma}_3 \cdot N^3 + \delta\tilde{K}^1 \cdot M_1 + \delta\tilde{K}^2 \cdot M_2 + \delta\tilde{K}^3 \cdot M_3\right) \cdot dX^3 \quad , \tag{14}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}_3 = \bar{u}_{3,3} - B^1\bar{u}_1 - B^2\bar{u}_2 \ , \\
&\tilde{K}^1 = \frac{1}{\sqrt{A}}\Big\{-\bar{u}_{2,33} + 2B_2^1\bar{u}_{1,3} + 2B_2^2\bar{u}_{2,3} - B_2\bar{u}_{3,3} + \left(-B_2^1B_1^1 - B_2^1B_2^2\right)\bar{u}_1 \\
&\qquad + \left(-B_2^2B_2^2 - B_1^2B_2^1\right)\bar{u}_2 + \left(B_2B_2^2 + B_1B_2^1\right)\bar{u}_3 + \sqrt{A}B_1\theta^3\Big\} \ , \\
&\tilde{K}^2 = \frac{1}{\sqrt{A}}\Big\{\bar{u}_{1,33} - 2B_1^1\bar{u}_{1,3} - 2B_1^2\bar{u}_{2,3} + B_1\bar{u}_{3,3} + \left(-B_1^1B_1^1 - B_1^2B_2^1\right)\bar{u}_1 \\
&\qquad + \left(-B_1^2B_1^1 - B_1^2B_2^2\right)\bar{u}_2 + \left(-B_1B_1^1 - B_2B_1^2\right)\bar{u}_3 + \sqrt{A}B_2\theta^3\Big\} \ , \\
&\tilde{K}^3 = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(-B_2\bar{u}_{1,3} + B_1\bar{u}_{2,3} + \left(B_2B_1^1 - B_1B_2^1\right)\bar{u}_1 + \left(B_2B_1^2 - B_1B_2^2\right)\bar{u}_2 + \sqrt{A}\theta_{,3}^3\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

natomiast funkcje sił wewnętrznych mogą być zapisane w postaci:

$$\begin{aligned}
&N^3 = \int_{F}\bar{t}^{33} \cdot dS \ , \\
&M_{\Delta} = \int_{F}\bar{\epsilon}_{\Delta\Gamma}\, X^{\Gamma} \cdot \bar{t}^{33} \cdot dS \ , \\
&M_3 = \int_{F}\left(\epsilon_{\Delta\Gamma}\, X^{\Delta} - \omega_{\Gamma}\right) \cdot \bar{t}^{3\Gamma} \cdot dF \ .
\end{aligned} \tag{16}$$

6. Związki konstytutywne

W pracy analizowany będzie pręt ortotropowy, dla którego związki konstytutywne zapiszemy w bazie $\mathbf{A}_I \otimes \mathbf{A}_J$ w postaci $\bar{t}^{IJ} = \bar{C}^{IJKL}\bar{E}_{KL}$. W przypadku pręta związki konstytutywne mogą być zapisane por. [2], [4], [6], [7],[9] w postaci macierzowej:

$$\left[\tilde{t}^{13}\right]=\begin{Bmatrix}\tilde{t}^{13}\\ \tilde{t}^{23}\\ \tilde{t}^{33}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}S^{1313} & 0 & 0\\ \cdot & S^{2323} & 0\\ \cdot & \cdot & S^{3333}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2\cdot E_{13}\\ 2\cdot E_{23}\\ E_{33}\end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Uwzględniając w równaniach (16) związki konstytutywne o postaci (17), pomijając człony związane z funkcją deplanacji (pręt zwarty) oraz wprowadzając oznaczenia określające pewne charakterystyczne wielkości występujące w związkach pomiędzy funkcjami sił wewnętrznych a funkcjami przemieszczeń o postaci:

$$I^{MN}=\int_F \left(X^1\right)^M\left(X^2\right)^N\Theta^{-1}dS\ , \tag{18}$$

możemy zapisać funkcje sił wewnętrznych w postaci:

a) siła osiowa

$$N^3=S^{3333}\cdot\int_F\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{\Gamma}_3+S^{3333}\cdot\sqrt{A}\int_F X^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}^1-S^{3333}\cdot\sqrt{A}\int_F X^1\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}_2\ ; \tag{19}$$

b) dla zginania w płaszczyźnie OX^2X^3

$$M_1=S^{3333}\sqrt{A}\int_F X^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{\Gamma}_3+S^{3333}A\int_F\left(X^2\right)^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}^1-S^{3333}A\int_F X^1X^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}^2\ ; \tag{20}$$

c) dla zginania w płaszczyźnie OX^1X^3

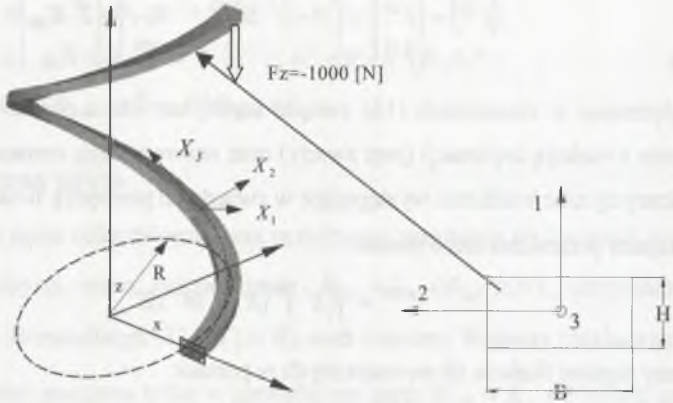
$$M_2=-S^{3333}\sqrt{A}\int_F X^1\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{\Gamma}_3-S^{3333}A\int_F X^1X^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}^1+S^{3333}A\int_F\left(x^1\right)^2\Theta^{-1}dS\cdot\tilde{K}^2\ ; \tag{21}$$

d) moment skręcający

$$M_3=G\int_F\left[\frac{S^{2323}}{G}\left(\frac{1}{\Theta}\sqrt{A}X^1-\omega_{,2}\right)^2-\frac{S^{1313}}{G}\left(\frac{1}{\Theta}\sqrt{A}X^2-\omega_{,1}\right)^2\right]dS\cdot\tilde{K}^3=GI^3\cdot\tilde{K}^3\ ; \tag{22}$$

7. Analiza przykładu

W pracy poddano analizie przypadek pręta zakrzywionego przestrzennie o osi scharakteryzowanej krzywą śrubową - por. rys. 1. Przyjęto, że pręt wykonanny jest z materiału Szkło S/Epoksyd. Przyjęto, że pręt jest obciążony siłą $F1=-1000\,[N]$ w punkcie $S=S_*$, oraz utwierdzony w punkcie $S=S_0$. Analizowany przypadek linii śrubowej (por. rys. 1) rozwiązano za pomocą standardowych elementów skończonych ramy przestrzennej, w których uwzględniono związki konstytutywne w postaci (19-29). Wskaźnik skręcania I_* obliczono rozwiązując problem de Saint Venanta, por. [3], [5], stosując do aproksymacji funkcji naprężeń 10- węzłowe trójkątne elementy skończone.



Rys.1. Przypadek krzywej śrubowej obciążonej w punkcie $S = S_*$, siłą F1=-1000 [N] i utwierdzonej w punkcie $S = S_0$

Fig.1. A subject of helicoidal line subject to the force F1=-1000 [N] in $S = S_*$ and clamped at the end in the point $S = S_0$

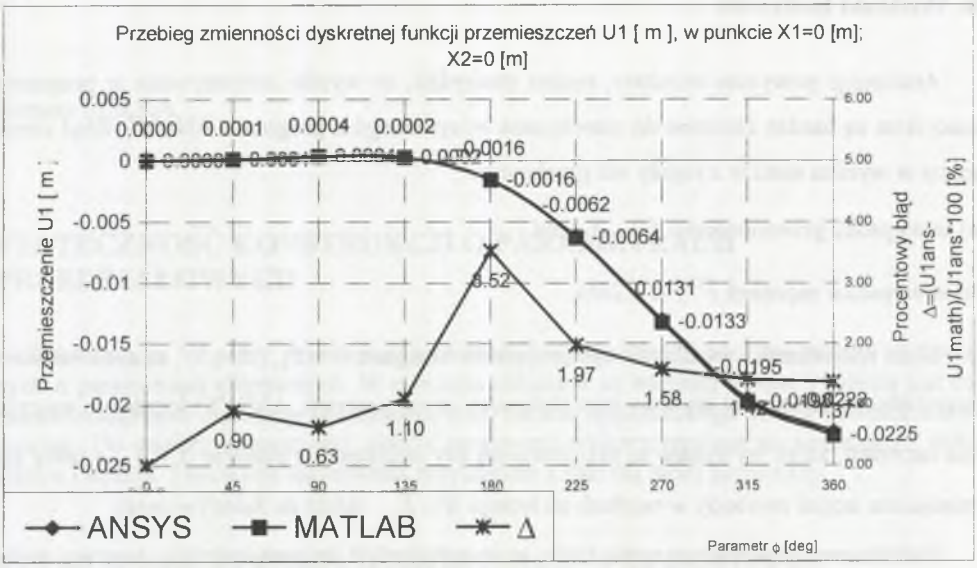
Tablica 1

Tablice stałych materiałowych i parametrów modelu krzywej śrubowej analizowanej w pracy

Stałe materiałowe wprowadzone w programie MATLAB	
E1	55E9 $[N/m^2]$
E2	16E9 $[N/m^2]$
E3	16E9 $[N/m^2]$
$\nu 12$	0.28 [1]
$\nu 13$	0.28 [1]
$\nu 23$	0.28 [1]
G12	7.6E9 $[N/m^2]$
G13	7.6E9 $[N/m^2]$
G23	7.6E9 $[N/m^2]$

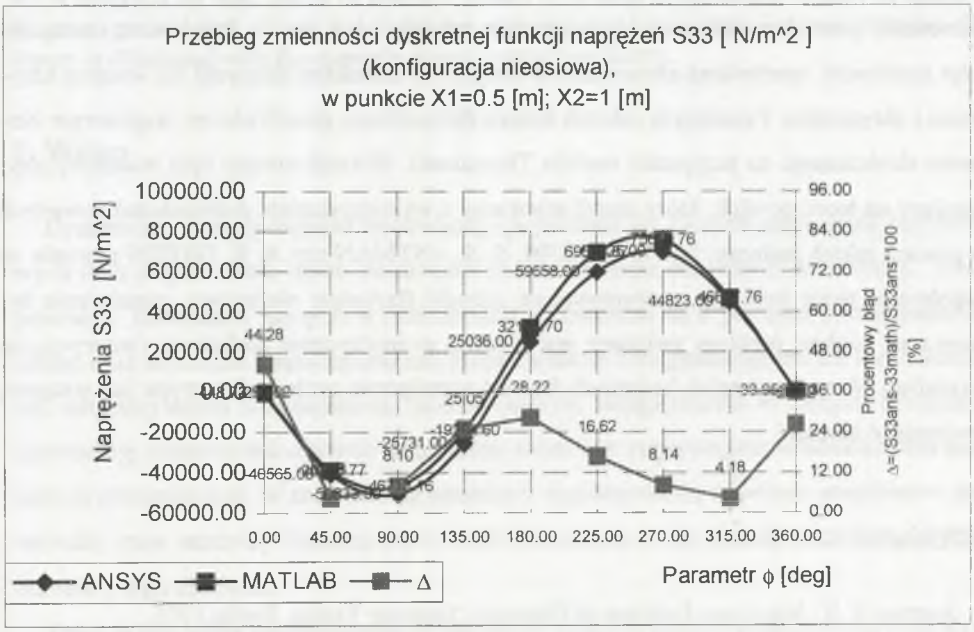
Parametry modelu	
R	20 [m]
H	1 [m]
B	2 [m]
Kąt nachyl. krzyw. α	$\pi/6$
Liczba warstw	1

Wyniki weryfikowane były z danymi otrzymanymi z analizy modelu przestrzennego programem ANSYS. Przyjęto podział krzywej w płaszczyźnie przekroju na 64 elementy (po 8 dla każdego boku). Model całkowity w programie ANSYS składał się z 40960 elementów, 51921 węzłów oraz 155520 stopni swobody.



Rys.2. Przebieg zmienności funkcji przemieszczeń $U^1\left(X^1=0,\ X^2=0\right)$

Fig.2. The grid of the deflection function $U^1\left(X^1=0,\ X^2=0\right)$



Rys.3. Przebieg zmienności funkcji naprężeń $S33 \equiv \bar{t}^{33}\left(X^1=0.5,\ X^2=1\right)$

Fig.3. The grid of the stress function $S33 \equiv \bar{t}^{33}\left(X^1=0.5,\ X^2=1\right)$

8. Wnioski końcowe

Analizując powyższe rezultaty, można stwierdzić, że wyniki otrzymywane w programie autorskim są bardzo zbliżone do rozwiązania otrzymanego z programu ANSYS. Błąd otrzymany w wyniku analizy z reguły nie przekracza:

a) w wypadku przemieszczeń $U1$, $\Delta < 5\%$,

b) w wypadku naprężeń $\bar{t}^{33}$, $\Delta < 20\%$.

Duże rozbieżności wyników, występujące na brzegach $S = S_0$, $S = S_*$, są spowodowane uwzględnianiem (model bryłowy zamodelowany przez program, ANSYS) lokalnego spiętrzenia naprężeń, które wywołane są przyłożeniem siły skupionej w punkcie $S = S_*$, a także pominięciem stopni swobody w węzłach na brzegu $S = S_0$, (efekt de SaintVenanta).

Podsumowując powyższe rozważania, można stwierdzić, że przedstawiony w pracy model w sposób zadowalający opisuje zachowania się anizotropowych liniowo sprężystych, zakrzywionych prętów kompozytowych. Wprowadzony w analizie numerycznej model elementu skończonego jest prosty, daje prawidłowe wyniki i pozwala na łatwe łączenie elementu z elementami powłokowymi; po zmianie sposobu aproksymacji, np. na trygonometryczną, istnieje możliwość operowania elementami skończonymi charakteryzującymi się wstępną krzywizną i skręceniem. Pominięcie założeń Eulera-Bernoulliego umożliwia też uogólnienie elementu skończonego na przypadek modelu Timoshenki. Sformalizowany opis matematyczny, bazujący na teorii powłok, który został stworzony z wykorzystaniem doświadczeń zawartych w pracach takich badaczy, jak: E. ŞUHUBI, S. S. ANTMAN czy A. E. GREEN pozwala na uogólnienie teorii liniowej, ortotropowej na: ośrodki fizykalnie nieliniowe, zagadnienia dynamiczne; osobny problem związany jest z teorią geometrycznie nieliniową (superpozycja wyników). W tych ostatnich badaniach liniowe rozwiązanie może być przyjęte jak wstępne, otwierające iteracje.

LITERATURA

1. Antman S. S.: Nonlinear Problem of Elasticity. Springer Verlag, Berlin 1995.

2. Argyris J.; Tenek L.; Mattson A.: A 2 – node fast converging shear – deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid – body and 6 straining modes, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 152 (1998) 281 – 336.