ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: BUDOWNICTWO z.89 Nr kol. 1482

Tomasz LISZKA

STATECZNOŚĆ KONSTRUKCJI O PARAMETRACH PRZEDZIAŁOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę badania stateczności konstrukcji budowlanych o parametrach niepewnych. W tym celu obliczane są wartości własne i badana jest dodatnia określoność macierzy opisujących ruch układu dynamicznego wokół położenia równowagi. Do analizy stateczności układu ramowego wykorzystywane są twierdzenia Soha, Hertza i Rohna. Teoria jest ilustrowana przykładem z zakresu teorii konstrukcji.

STABILITY OF SYSTEMS WITH INTERVAL PARAMETERS

Summary. In the paper the advanced method of analysis of loss stability for systems with interval parameters is presented. The method uses interval arithmetic and technology. Stability is analysed by calculation of extreme values of system eigenvalues. Theory is based on theorems proved Soh, Hertz and Rohn for eigenvalues of symmetric interval matrices. The theory is illustrated with the example from construction theory.

1. Wstęp

Dynamiczny rozwój techniki budowlanej i pojawianie się nowych programów obliczeniowych dają projektantom nowe możliwości tworzenia coraz śmielszych konstrukcji. Jednak parametry materiałów użytych w obliczeniach wyznaczone są z pewnym prawdopodobieństwem oraz obarczane współczynnikami bezpieczeństwa uwzględniającymi ich niedoskonałości. Alternatywnym rozwiązaniem, umożliwiającym uwzględnienie w danych opisujących konstrukcję niepewności użytych materiałów, może być zastosowanie w obliczeniach matematyki przedziałowej. W metodzie tej parametry przedstawia się w postaci przedziałów [min wartość, max wartość]. Oznacza to, że wielkość opisana w ten sposób może przyjąć każdą wartość z tego interwału.

Praca ta jest próbą wprowadzenia do mechaniki budowli algebry przedziałowej oraz metod analizy stateczności konstrukcji budowlanych. Na podstawie prostych konstrukcji prętowych zostaną przedstawione algorytmy wyznaczania obciążeń krytycznych, a także problemy numeryczne i obliczeniowe związane z wprowadzeniem liczb przedziałowych.

2. Liczby przedziałowe. Podstawowe oznaczenia i własności

Liczbę interwałową definiujemy jako uporządkowaną parę liczb rzeczywistych [a, b], gdzie $a \leq b$. Oznacza to, że liczba interwałowa x może przyjmować z jednakowym prawdopodobieństwem wszystkie wartości z przedziału [a, b], co możemy zapisać :

$$[a,b] = \{\ x : a \leq x \leq b\ \} \tag{1}$$

Do przedstawienia liczb interwałowych zostaną wprowadzone następujące oznaczenia:

$$\bar{x} = [a,b], \quad \bar{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$$

Dla tak zdefiniowanych liczb konieczne jest również zdefiniowanie działań algebraicznych :

$$\begin{array}{ll} & [a,b]\cdot[c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)] \\ [a,b]+[c,d] = [a+c, b+d] & \\ [a,b]-[c,d] = [a-d, b-c] & \text{gdy } 0 \notin [c,d], \text{to} \quad [a,b]/[c,d] = [a,b]\cdot[1/d, 1/c] \\ & |[a,b]| = \max(|a|,|b|) \end{array} \tag{2}$$

Niestety, zasady wykonywania operacji algebraicznych, które dokładnie są opisane w pracy [3], powodują wiele problemów obliczeniowych wynikających z nowych definicji działań, uwzględniających przedziałowość składników. Najwięcej jednak problemów w operacjach na liczbach przedziałowych powoduje to, że nie są spełnione warunki:

$$[a,a]-[a,a] \neq 0, \quad [a,a]/[a,a] \neq 1, \tag{3}$$

a to zmusza nas do poszukiwania nowych metod, które najczęściej bazują na własnościach liczb interwałowych i analogiach do twierdzeń tradycyjnej algebry.

3. Stateczność ustrojów prętowych o parametrach przedziałowych

3.1. Kryterium stateczności konstrukcji o parametrach przedziałowych

Pojęcie „stateczność ustroju" można rozumieć najbardziej ogólnie jako zdolność ustroju do zachowania niezmiennego położenia (i kształtu) pod działaniem danego obciążenia. Pojęcie to można tłumaczyć również jako zdolność powracania ustroju do położenia równowagi, z którego został wyprowadzony przez działanie dowolnej, lecz niewielkiej przyczyny. Przed ustrojem, który nazywać będziemy statecznym, stawiamy zatem wymaganie małej wrażliwości na niewielkie zmiany danego obciążenia lub danego położenia. Będziemy więc analizować stateczność, a inaczej mówiąc trwałość położenia równowagi układu: ustrój statyczny – obciążenie. Jako podstawę oceny stateczności przyjmować będziemy tzw. kryterium energetyczne [1].

Po tym wprowadzeniu możemy rozpocząć analizę stateczności ustroju prętowego przedstawionego za pomocą równania:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K - K_G)q = Q\,. \tag{4}$$

Równanie macierzowe (4) opisuje ruch układu. Ruch ten określony jest przez funkcję $q = q(t)$, która musi spełniać równanie różniczkowe (4) oraz odpowiednie warunki początkowe :

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \tag{5}$$

Dokonując pewnych uproszczeń wynikających z analizy stateczności przez pominięcie wpływu tłumienia i sił zewnętrznych, otrzymujemy:

$$M\ddot{q} + (K - K_G)q = 0 \tag{6}$$

Uwzględniając w równaniu (6) niepewności parametrów ustroju, otrzymujemy równanie (7), w którym macierze bezwładności, sztywności i sztywności geometrycznej są interwałowe:

$$\overline{M}\ddot{q} + (\overline{K} - \overline{K}_G)q = 0\,. \tag{7}$$

Dokonując w równaniu (7), opisującym ruch układu drgającego obciążonego dużymi siłami osiowymi, podstawienia wykorzystywanego przy wyznaczaniu częstości drgań własnych, oraz uwzględniając, że obciążenia są kombinacją liniową parametru intensywności obciążenia S, otrzymujemy parametryczne równanie ruchu :

$$(\overline{K} - S\overline{K}_G - \omega^2\overline{M})q = 0 \tag{8}$$

lub w uproszczonej postaci $\overline{A}(S,\omega)q = 0$, gdzie $\overline{A}(S,\omega) = (\overline{K} - S\overline{K}_G - \omega^2\overline{M})$.

Zakładamy, że wektor q określa położenie, a wektor δq o współrzędnych dowolnych (lecz małych) równowagę tę zaburza i powoduje zmianę energii potencjalnej $E_p(q,S) \Rightarrow E_p(q+\delta q,S)$.

Powyższy związek wyraża przyrost energii potencjalnej układu związany z zaburzeniem położenia równowagi. Jeśli przyrost ten jest dodatni, wówczas badanemu położeniu równowagi odpowiada minimum energii potencjalnej i jest to położenie równowagi statecznej. W przypadku gdy przyrost energii jest ujemny, równowaga osiąga maksimum lokalne, a rozważane położenie jest położeniem niestatecznym. Przejście od jednego do drugiego stanu równowagi następuje wówczas, gdy przyrost energii jest zerowy, a stan równowagi określany jest jako krytyczny. Na podstawie powyższego kryterium [1] układ opisany równaniem (8) będzie stateczny, jeżeli macierz :

$$\overline{A}(S,\omega) = (\overline{K} - S\overline{K}_G - \omega^2\overline{M}) \tag{9}$$

będzie dodatnio określona. Jednym z warunków dodatniej określoności macierzy $A(S,\omega)$ jest, aby jej najmniejsza wartość własna $\lambda_{min}(\overline{A}(S,\omega)) \geq 0$ [4]. Tak więc analiza stateczności polega na znalezieniu takiego parametru obciążenia krytycznego S_{kryt} układu drgającego z częstością ω, przy którym $\lambda_{min}(\overline{A}(S,\omega)) \geq 0$.

Równanie (8) pozwala na wyznaczenie i określenie zależności dynamicznego współczynnika obciążenia granicznego $S(\omega)$ układu od częstości ω, z jaką drga analizowany układ. Przy założeniu ω=0 możemy wyznaczyć statyczny współczynnik obciążenia krytycznego; przyjmując S=0, możemy wyznaczyć częstość drgań własnych.

W matematyce interwałowej wyznaczenie wartości własnych jest bardzo trudnym zadaniem, praktycznie polega ono na oszacowaniu skrajnych wartości własnych: najmniejszej i największej $[\underline{\lambda}, \ \overline{\lambda}]$. Są to jednak wystarczające informacje do sprawdzenia dodatniej określoności symetrycznej macierzy przedziałowej.

3.2. Wyznaczanie obciążenia krytycznego układu o parametrach przedziałowych

Przy wyznaczeniu obciążenia krytycznego wykorzystywana jest znajomość przedziału $[\underline{\lambda}, \ \overline{\lambda}]$, w którym zawarte są wszystkie wartości własne macierzy interwałowej. Obliczanie wartości własnych macierzy przedziałowych jest zadaniem bardzo trudnym. Stosując algorytmy tradycyjnej algebry, otrzymujemy wyniki obarczone dużymi błędami wynikającymi z własności liczb interwałowych. W 1990 r. C. B. Soh [5] udowodnił twierdzenie, które pozwala na dokładne obliczenie najmniejszej i największej wartości własnej macierzy przedziałowej. Twierdzenie to wymaga wyznaczenia minimalnych i maksymalnych wartości własnych dla 2^{n^2} macierzy utworzonych z kombinacji wszystkich skrajnych wartości przedziałowych elementów macierzy. Ze względu na dużą złożoność obliczeniową konieczne było poszukiwanie nowych metod sprawdzania dodatniej określoności macierzy interwałowych.

W 1992 r. D. Hertz [6] podał twierdzenia, które wymagają do wyznaczenia przedziału $[\underline{\lambda}, \ \overline{\lambda}]$ wykonania jedynie 2^n operacji. Tak znaczne ograniczenie toku obliczeń umożliwia zastosowanie tej metody do badania stateczności układów składających się z wielu elementów skończonych. Skrajne wartości własne macierzy przedziałowej $\overline{A} = [a_{ij}], \quad b_{ij} \leq a_{ij} \leq c_{ij}$ obliczamy w następujący sposób:

$$\overline{\lambda} = \max_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \overline{\lambda}^i \qquad \text{gdzie :} \ \overline{\lambda}^i = \max_{x \in B^n} x^T \overline{A}^i x \tag{10}$$

$$\underline{\lambda} = \min_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \underline{\lambda}^i \qquad \underline{\lambda}^i = \min_{x \in B^n} x^T \underline{A}^i x$$

$$\overline{A}^{i} = [\overline{a}_{kl}^{i}] = \begin{cases} c_{kk} \text{ gdy } k = l \\ c_{kl} \text{ gdy } x_k x_l \geq 0 \wedge k \neq l \\ b_{kl} \text{ gdy } x_k x_l < 0 \wedge k \neq l \end{cases}, \quad \underline{A}^{i} = [\underline{a}_{kl}^{i}] = \begin{cases} b_{kk} \text{ gdy } k = l \\ b_{kl} \text{ gdy } x_k x_l \geq 0 \wedge k \neq l \\ c_{kl} \text{ gdy } x_k x_l < 0 \wedge k \neq l \end{cases} \tag{11}$$

$$B^{n} = \{ x : x \in R^{n}, \|x\| = 1 \} \tag{12}$$

Wyznaczenie przedziału, w którym zawierają się wszystkie wartości własne macierzy przedziałowej, pozwala nam na ocenę stateczności układów prętowych. Układ opisany równaniem (8) będzie stateczny, jeżeli :

$$\underline{\lambda}(\overline{A}(S)) \geq 0 \tag{13}$$

Następną z metod badania stabilności symetrycznych macierzy przedziałowych jest algorytm wymagający sprawdzenia stabilności tylko 2^n macierzy nieinterwałowych, przedstawił i potwierdził dowodami matematycznymi w [7] J. Rohn.

Przedstawione kryterium mówi, że koniecznym i wystarczającym warunkiem stabilności symetrycznej przedziałowej macierzy $\overline{A}(S)$ jest, aby każda z macierzy :

$$(A_z)_{ij} = \begin{cases} \overline{A}(S)_{ij} & \text{kiedy} \quad z_i z_j = 1 \\ \underline{A}(S)_{ij} & \text{kiedy} \quad z_i z_j = -1 \end{cases} \tag{14}$$

była stabilna dla każdego $z \in Z$, gdzie:

$$Z = \{ z \in R^{n}; z_j \in \{-1, 1\} \quad \text{dla każdego } j \}, \qquad i, j = 1,2,...,n \tag{15}$$

Reasumując, konstrukcja prętowa opisana równaniem (8) będzie stateczna, jeżeli wszystkie minimalne wartości własne λ_z obliczone dla każdej macierzy A_z są większe lub równe zero:

$$\min(\lambda_{z\min}(A_z(S)) \geq 0 \tag{16}$$

W pracy [8] przedstawione zostało twierdzenie redukujące analizę dodatniej określoności symetrycznej macierzy o elementach przedziałowych do sprawdzenia dwóch warunków. Symetryczna macierz przedziałowa, którą możemy zapisać $\overline{A} = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$, jest dodatnio określona, jeżeli spełnione są następujące warunki:

i) Dodatnio określona jest macierz A_c,

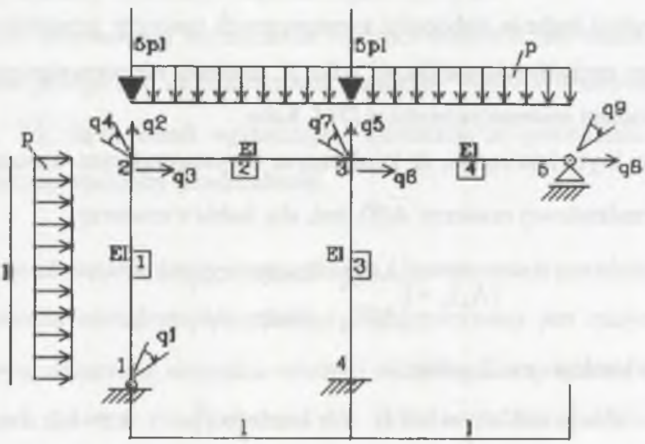
ii) $\rho(|A_c^{-1}|\Delta) < 1$ (17)

gdzie: $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A})$, $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $\rho(A)$-spektrum macierzy A.

Przedstawione twierdzenia nie podają nam wartości obciążenia krytycznego, dają nam jedynie informacje o tym, czy układ dla zadanych parametrów i przyjętego obciążenia jest stateczny czy niestateczny. Możemy je jednak wykorzystać do wyznaczania obciążenia krytycznego S_{kryt} metodą przyrostową. Należy w każdym kroku obliczeń zwiększać parametr S do momentu utraty przez macierz $\overline{A}(\omega,S)$ dodatniej określoności; osiągnięta w poprzednim kroku wartość parametru intensywności obciążenia S jest poszukiwaną wartością S_{kryt}. Praktyczne zastosowanie opisanych metod zostanie zilustrowane na przykładzie konstrukcji prętowej.

4. Analiza przykładów

Rozważać będziemy układ ramowy, którego schemat statyczny przedstawia rys.1.



Rys.1. Schemat statyczny konstrukcji
Fig.1. Static scheme of the structure

Przyjęto przedziałowe parametry opisujące tę konstrukcję :

$$\overline{E} = [\,2.0\cdot10^{11} \quad 2.1\cdot10^{11}\,]\,\mathrm{Pa}$$

$$\overline{A} = [\,0.002863 \quad 0.002963\,]\,\mathrm{m}^2$$

$$\overline{I} = [\,4.0677\cdot10^{-6} \quad 4.0877^{-6}\,]\,\mathrm{m}^4$$

$$\overline{\mu} = [\,22.37 \quad 23.27\,]\,\mathrm{kg/mb}$$

$$\overline{l} = [\,4.99 \quad 5.01\,]\,\mathrm{m}$$

Dla takich danych budujemy przedziałowe macierze sztywności, sztywności geometrycznej i bezwładności, a następnie parametryczną przedziałową macierz $\overline{A}(\omega, S(p))$ wg (8).

Po podstawieniu wartości przedziałowych parametrów i zbudowaniu macierzy interwałowych możemy metodą przyrostową poszukiwać obciążenia krytycznego.

Obliczenia rozpoczynamy przy $\omega=0$ od wartości obciążenia $p=0$ i zwiększamy je w każdym kroku o $\Delta p = 100$ N, do momentu kiedy warunki stateczności (13), (16) i (17) zostaną niespełnione, czyli macierz $\overline{A}(\omega = 0, S(p))$ przestaje być dodatnio określona i następuje utrata stateczności. Uzyskana wartość siły p-Δp jest poszukiwanym obciążeniem krytycznym. Otrzymane wyniki zestawione są w tabeli.

Kryterium	Hertza Warunek stat. (13)	Rohna Warunek stat. (16)	Rohna Warunek stat. (17)
Wartość krytycznego obciążenia p [N/m]	5300	5300	5100
Wartość kryt. obc. p dla parametrów dokładnych [N/m]	7400		

Na podstawie otrzymanych wyników możemy zauważyć, jak znaczny wpływ na wartość obciążenia krytycznego ma uwzględnienie w parametrach opisujących konstrukcję ich niedoskonałości.

W powyższych obliczeniach pominięto wpływ drgań (ω=0), jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że układ drga swobodnie, to wyniki w poniższej tabeli pokażą, że utrata stateczności tej konstrukcji nastąpi już przy częstości ω=0.71ω_0 (ω_0 – częstość drgań własnych konstrukcji o parametrach liczbowych i wynosi 19.748 rad/s). Kiedy układ drga z tą częstością, wartość przyłożonego obciążenia p≅0, a po jej przekroczeniu macierz $\overline{A}(S \cong 0, \omega = 0.71\omega_0)$ traci dodatnią określoność.

Wartości obciążenia krytycznego konstrukcji drgającej swobodnie z różnymi częstościami i opisanej przez powyżej przyjęte przedziałowe parametry zestawiono w poniższej tabeli :

Częstość drgań układu	p_{kryt} wg Hertza (13)	p_{kryt} wg Rohna (16)	p_{kryt} wg Rohna (17)
0.0ω_0	5300	5300	5100
0.1ω_0	4600	4600	4400
0.3ω_0	3200	3200	3000
0.5ω_0	1700	1700	1500
0.69ω_0	200	200	100
0.71ω_0	100	100	niestateczny
0.9ω_0	niestateczny	niestateczny	niestateczny
1.0ω_0	niestateczny	niestateczny	niestateczny

Na podstawie dynamicznego kryterium utraty stateczności wyznaczoną częstość drgań ω=0.71ω_0=19.748 rad/s możemy uważać za częstość drgań własnych konstrukcji o parametrach niepewnych.

5. Podsumowanie

Po przedstawieniu kryteriów analizy stateczności układów o parametrach przedziałowych od strony teoretycznej, a także po pokazaniu na przykładach ich praktycznego zastosowania możemy stwierdzić, że uwzględnienie niepewności parametrów ma bardzo znaczny wpływ na wartość obciążenia krytycznego. Jak już wspomniałem we wstępie, algebra interwałowa daje nowe możliwości uwzględnienia w obliczeniach niepewności materiałów. Pokazane tutaj wprowadzenie liczb przedziałowych do analizy stateczności konstrukcji jest tylko jednym z wielu możliwych zastosowań w budownictwie. Być może prace nad tą dziedziną nauki pozwolą na alternatywne podejście do problemów niepewności materiałów różniące się w istotny sposób od metod probabilistycznych.

Nasuwa się pytanie, czy może zastąpienie liczb przedziałowych liczbami rozmytymi, które łączą liczby przedziałowe i elementy prawdopodobieństwa, pozwoli na uzyskanie lepszych wyników.

LITERATURA

1. Gomuliński A., Witkowski M.: Mechanika budowli kurs dla zawansowanych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993, ss.5-55.
2. Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993, ss. 244-335.
3. Moore R. E.: Interval analysis, Engelwood Cliffs, New Jork.
4. Demidowicz B. P.: Matematyczna teoria stabilności, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
5. Soh C. B.: Necessary and suefficient conditions for stability of symmetric interval matrices, Int. J. Control, vol. 51, No. 1, 1990, pp. 243-248.
6. Hertz D.: The extreme eigenvalues and stability of real symmetric interval matrices, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 37, No.4, 1992, pp. 532-535.
7. Rohn J.: An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 41 No.1 1996, pp. 133-136.
8. Rohn J.: Possitive definitness and stability of ineterval matrices, SIAM J.Matrix Anal. Appl., vol.15,No.1,1994, pp. 175-184.
9. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli, Arkady, Warszawa 1998.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Bogdan Skalmierski

Abstract

Creators of modern constructions, using material of unexpected properties, overcome great depths and spaces with bold structures. Stability problems and sensitivity problems, with respect to dynamics influences, have basic meaning in modern constructions. Application in calculation of interval algebra gives us possibility to take in to account material properties determined with some probability.

The interval methodology was applied for stability analysis of structure's construction with uncertain parameters. An analysis of the stability problem needs calculation of corresponding eigenvalues. In interval mathematics it's a very difficult problem. However it's often sufficient to determine only approximate extremes of those eigenvalues: the smallest and the greatest ones. For practise it's often a sufficient information to estimate the constructions safety.

Theory is based on theorems proved by Soh, Hertz and Rohn for eigenvalues of symmetric interval matrices. The theory is illustrated with an example from construction theory.