ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: BUDOWNICTWO z.89 Nr kol. 1482

Marian ŁUPIEŻOWIEC

NAPRĘŻENIA TERMICZNE I DYFUZYJNE W CIELE O TRANSWERSALNEJ IZOTROPII

Streszczenie. W pracy analizuje się stan naprężenia spowodowany przepływem ciepła i masy w ciele o transwersalnej izotropii. Wykorzystując sformułowanie wariacyjne i program ANSYS oblicza się naprężenia w walcu poddanym działaniu sprzężonego pola termodyfuzyjnego.

THERMAL AND DIFFUSION STRESSES IN BODIES WITH TRANSVERSE ISOTROPY

Summary. In the paper the state of stress caused by the thermal and mass flux in a body of transverse isotropy has been analysed. Making use of variational formulation and ANSYS program, the stresses in a cylinder subjected to the operation of the coupled thermo–diffusion field have been computed.

1. Wstęp

Już od dawna starano się matematycznie opisać procesy przepływu ciepła i dyfuzji, które to procesy stanowiły istotny problem w działalności inżynierów. W klasycznym ujęciu wyprowadzenie równania opisującego proces dyfuzji opiera się na prawie Ficka, które wzorowane było na prawie Fouriera dotyczącym przepływu ciepła w ośrodkach ciągłych nieodkształcalnych. W obu przypadkach mamy do czynienia z cząstkowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu typu parabolicznego. Liniowe równania różniczkowe dyfuzji i przewodnictwa ciepła różnią się jedynie oznaczeniami stałych materiałowych i oczywiście interpretacją fizyczną otrzymanych wyników.

W miarę rozwoju technologii materiałowej zaczęto dostrzegać wzajemne powiązania wcześniej wymienionych zjawisk. Często okazywało się, że klasyczne prawo Ficka ma ograniczony zakres stosowania. Odkryto cały szereg procesów transportu masy nie podlegających klasycznej dyfuzji. W efekcie próbowano stworzyć bardziej skomplikowane modele dyfuzji. Podobnie było z prawem Fouriera. W ogólnym przypadku należałoby przyjąć wzajemnie

sprzężenie pól temperatury, dyfuzji i pola mechanicznego. Dotyczy to głównie materiałów biologicznych i polimerów.

Także w budownictwie problematyka przepływów cieplno – dyfuzyjnych sprzężonych z polem mechanicznym jest jednym z podstawowych, jakie napotykamy w zagadnieniach naprężeń technologicznych (np. przy dojrzewaniu betonu). Chcąc w miarę dokładnie opisać podane wcześniej procesy, nie sposób przyjąć do rozważań model ciała sztywnego, który często okazuje się niewystarczający. Z elementarnych rozważań natury termodynamicznej wiemy, że zmiany odkształceń w czasie wywołują przyrost temperatury i rozpraszanie ciepła, co dowodzi istnienia wzajemnie sprzężonych pól. Istniała więc potrzeba stworzenia jednolitej teorii, obejmującej oddziaływania procesu dyfuzyjnego, charakteryzowanego koncentracją dyfundującej masy, procesu cieplnego opisywanego polem temperatury oraz procesu odkształcania się ciała wyrażanego przez wektor przemieszczenia i stan naprężenia.

W pracy zamieszczono wyniki (graficzne) obliczeń pól temperatury, koncentracji wilgoci oraz powodowanych przez nie naprężeń dla średnio masywnego elementu betonowego przy założeniu nieliniowych własności mechanicznych dojrzewającego betonu (zależnych od czasu) oraz przy przyjęciu modelu ciała o transwersalnej izotropii i założeniu wzajemnego sprzężenia pól temperatury i koncentracji wilgoci. Do wykonania obliczeń numerycznych wykorzystano program ANSYS, który w obliczeniach stosuje metodę elementów skończonych.

2. Problem brzegowy termodyfuzji dla ciała o transwersalnej izotropii

Rozpatrujemy ciało odkształcalne, anizotropowe zajmujące objętość V i ograniczone powierzchnią A. Aby rozwiązać problem brzegowy termodyfuzji w ciele stałym, należy znaleźć rozkład koncentracji $c(\mathbf{x},t)$, temperatury $\theta(\mathbf{x},t)$ i przemieszczeń $u_i(\mathbf{x},t)$ lub naprężeń $\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$. Równania różniczkowe opisujące postawiony problem z pominięciem wpływów dynamicznych i sił masowych mają postać (por. [3], [6]):

- równanie przewodnictwa ciepła:

$$T_0(\Theta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + m\dot{\theta} + l\dot{c}) = K_{ij}\theta_{,ij} + \rho_c W, \tag{1}$$

- równanie dyfuzji:

$$\rho\dot{c} = \overline{K}_{ij}\frac{1}{\rho}(\varphi_{kl}\varepsilon_{kl,ij} + l\theta_{,ij} + nc_{,ij}) - \kappa W, \tag{2}$$

- równania przemieszczeniowe:

$$\frac{1}{2}G_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})_{,j}=\Theta_{ij}\theta_{,j}+\varphi_{ij}c_{,j}\ . \tag{3}$$

W powyższych równaniach przyjęto następujące oznaczenia:

$\theta = T - T_0$ – różnica temperatur, c – koncentracja, u_i – wektor przemieszczenia, T_0 – temperatura odniesienia, $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$ – tensor odkształcenia, G_{ijkl}, Θ_{ij}, φ_{ij} – macierze współczynników materiałowych, K_{ij}, $\overline{K}_{ij}$ – macierze przepływu ciepła i dyfuzji, m, l, n – współczynniki materiałowe, W – funkcja źródeł (ilość ciepła wytworzona w jednostce czasu i objętości), ρ – gęstość ośrodka, ρ_c – zawartość cementu w betonie, κ – współczynnik wpływu źródeł ciepła na ubytek wilgoci.

Do równań należy dołączyć następujące warunki brzegowe:

$$T(\mathbf{x},t)=\hat{T}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_1,\ t\in\langle 0,\infty);\quad K_n\frac{\partial\theta(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{n}}=h(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_2,\ t\in\langle 0,\infty);$$

$$K_n\frac{\partial\theta(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{n}}=k(\mathbf{x},t)\cdot(T-T_b),\ \mathbf{x}\in S_3,\ t\in\langle 0,\infty);\quad S_1\cup S_2\cup S_3=A,\ S_1\cap S_2\cap S_3=\varnothing,$$

$$c(\mathbf{x},t)=\hat{c}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_4,\ t\in\langle 0,\infty);\quad \overline{K}_n\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{n}}=g(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_5,\ t\in\langle 0,\infty); \tag{4}$$

$$\overline{K}_n\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{n}}=m(\mathbf{x},t)\cdot(c-c_b),\ \mathbf{x}\in S_6,\ t\in\langle 0,\infty);\quad S_4\cup S_5\cup S_6=A,\ S_4\cap S_5\cap S_6=\varnothing,$$

$$u_i(\mathbf{x},t)=\hat{u}_i(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_7,\ t\in\langle 0,\infty);\quad \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)n_j=\hat{p}_i(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in S_8,\ t\in\langle 0,\infty);$$

$$S_7\cup S_8=A,\ S_7\cap S_8=\varnothing$$

oraz warunki początkowe:

$$T(\mathbf{x},t)=\widetilde{T}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V,\ t=0;\quad c(\mathbf{x},t)=\widetilde{c}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V,\ t=0\ . \tag{5}$$

Funkcje $\hat{T}(\mathbf{x},t)$, $h(\mathbf{x},t)$, $k(\mathbf{x},t)$, $\hat{c}(\mathbf{x},t)$, $g(\mathbf{x},t)$, $m(\mathbf{x},t)$, $\hat{u}_i(\mathbf{x},t)$, $\hat{p}_i(\mathbf{x},t)$, $\widetilde{T}(\mathbf{x})$, $\widetilde{c}(\mathbf{x})$ są odpowiedniej klasy regularności oraz traktujemy je jako znane.

Występujące w powyższych równaniach macierze współczynników materiałowych muszą spełniać warunki symetrii [4]:

$$G_{ijkl}=G_{jikl},\ G_{ijkl}=G_{ijlk},\ G_{ijkl}=G_{klij},\ \Theta_{ij}=\Theta_{ji},\ \varphi_{ij}=\varphi_{ji}\ . \tag{6}$$

Ciało o tranwersalnej izotropii to ciało, w którym własności sprężyste pozostają niezmienne przy obrocie układu współrzędnych względem osi x_3. Jest ono charakteryzowane przez 5 niezależnych składowych tensora G_{ijkl} oraz 2 składowe tensorów Θ_{ij} i φ_{ij} (wg [4], [5]). Macierz współczynników dla takiego ciała wynosi:

$$[G]=[G_{ijkl}]=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & G_{11} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{44} & 0 & 0 \\ & & & & G_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(G_{11}-G_{12}) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$[\Theta_{ij}]=\begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ & \Theta_{11} & 0 \\ & & \Theta_{33} \end{bmatrix}, \qquad [\varphi_{ij}]=\begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 \\ & \varphi_{11} & 0 \\ & & \varphi_{33} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Biorąc pod uwagę powyższe uwagi oraz przyjmując brak wpływu pola mechanicznego na zjawiska przepływu ciepła i dyfuzji, równania (1) – (3) dla ciała o transwersalnej izotropii można zapisać w postaci [3], [4]:

$$\dot{\theta}=D_1^T(\theta_{,11}+\theta_{,22})+D_3^T\theta_{,33}+K_{1W}^T(c_{,11}+c_{,22})+K_{3W}^T c_{,33}+\frac{\rho_c}{\rho c_w}W, \tag{9}$$

$$\dot{c}=D_{1W}(c_{,11}+c_{,22})+D_{3W}c_{,33}+D_{1W}^T(\theta_{,11}+\theta_{,22})+D_{3W}^T\theta_{,33}-\kappa W, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &G_{11}u_{k,kk}+\frac{1}{2}(G_{11}-G_{12})u_{k,ll}+G_{44}u_{k,33}+\frac{1}{2}(G_{11}+G_{12})u_{l,kl}+(G_{13}+G_{44})u_{3,k3}= \\ &\qquad =\Theta_{kk}\theta_{,k}+\varphi_{kk}c_{,k}, \qquad k,l=1,2,\ k\neq l, \\ &G_{44}(u_{3,11}+u_{3,22})+G_{33}u_{3,33}+(G_{13}+G_{44})(u_{1,13}+u_{2,23})=\Theta_{33}\theta_{,3}+\varphi_{33}c_{,3}. \end{aligned} \tag{11}$$

Powyżej występujące stałe spełniają następujące zależności:

$$D_1^T=\frac{K_{11}}{T_0 m}-\frac{\overline{K}_{11}l^2}{m\rho^2}, \qquad D_3^T=\frac{K_{33}}{T_0 m}-\frac{\overline{K}_{33}l^2}{m\rho^2}, \qquad D_{1W}=\frac{\overline{K}_{11}n}{\rho^2}, \qquad D_{3W}=\frac{\overline{K}_{33}n}{\rho^2},$$

$$K_{1W}^T=-\frac{\overline{K}_{11}nl}{m\rho^2}, \qquad K_{3W}^T=-\frac{\overline{K}_{33}nl}{m\rho^2}, \qquad D_{1W}^T=\frac{\overline{K}_{11}l}{\rho^2}, \qquad D_{3W}^T=\frac{\overline{K}_{33}l}{\rho^2}.$$

3. Wariacyjne sformułowanie problemu

W niniejszym punkcie przedstawiamy problem brzegowy (9) – (11) w postaci umożliwiającej zastosowanie metody elementów skończonych. Człony w równaniach uwzględniające sprzężenie pól termicznego i koncentracji zostaną „potraktowane" jako źródła. Rozpatrywane ciało dzielimy na elementy skończone n–węzłowe. Możemy wyrazić temperaturę wewnątrz ciała za pomocą wartości w węzłach:

$$\theta = \{N\}^T \{\theta_e\}, \tag{12}$$

gdzie: $\underset{n\times 1}{\{N\}}$ – wektor funkcji kształtu, $\underset{n\times 1}{\{\theta_e\}}$ – wektor wartości temperatury w węzłach.

Równanie (9) mnożymy przez wariację temperatury $\delta\theta$, całkujemy po objętości ciała oraz korzystając z twierdzenia Gaussa wykorzystujemy warunki brzegowe [1]. Po odpowiednich przekształceniach dochodzimy do równania:

$$[C_e^t]\{\dot{\theta}\} + ([K_e^{tb}] + [K_e^{tr}])\{\theta\} = \{Q_e^f\} + \{Q_e^c\} + \{Q_e^g\}, \tag{13}$$

gdzie:

$$[C_e^t] = \int_V \{N\}\{N\}^T dV, \qquad [K_e^{tb}] = \int_V [B]^T [D][B] dV, \qquad [K_e^{tc}] = \int_{S_3} k\{N\}\{N\}^T dS_3,$$

$$\{Q_e^f\} = \int_{S_2} \{N\} h dS_2, \qquad \{Q_e^c\} = \int_{S_3} k\bar{\theta}\{N\} dS_2, \qquad \{Q_e^g\}_{i\text{-}1} = \int_V W^t \{N\} dV.$$

$$W^t = K_{1W}^T (c_{,11} + c_{,22}) + K_{3W}^T c_{,33} + \frac{\rho_c}{\rho c_w} W.$$

Macierze występujące w całce $[K_e^{tb}]$ określone są następująco:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1^T & 0 & 0 \\ 0 & D_1^T & 0 \\ 0 & 0 & D_3^T \end{bmatrix}$$ – macierz przewodności,

$$\{L\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T$$ – operator różniczkowy, $[B] = \{L\}\{N\}^T$.

Rozwiązując równanie (13), dostajemy temperaturę w punktach węzłowych, natomiast temperaturę w dowolnym punkcie obliczymy wg (12).

Identycznie rozwiązujemy równanie dyfuzji ze względu na fakt, że równania (9) i (10) są analogiczne. Problem pełnego sprzężenia rozwiązujemy następująco: najpierw znajdujemy pola temperatury i koncentracji bez sprzężeń, a następnie metodą kolejnych przybliżeń rozwiązujemy równania (9) i (10), uwzględniając pole koncentracji w równaniu przewodnictwa ciepła oraz pole temperatury w równaniu dyfuzji z poprzedniego przybliżenia.

Znając pola temperatury i koncentracji, można rozwiązać problem mechaniczny – znaleźć przemieszczenia (odkształcenia, naprężenia). Przyjmijmy, że na naprężenia mają wpływ pola temperatury i koncentracji oraz rozpatrzmy funkcjonał (energia potencjalna układu):

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\varepsilon^0\}^T \{\sigma\} dV. \tag{14}$$

W powyższym: $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{12}\}^T$, $\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\} - \{\varepsilon^c\}$.

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{12}\}^T$ – wektor odkształceń mechanicznych,

$\{\varepsilon^{th}\} = \theta\{\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$ – wektor odkształceń termicznych,

$\{\varepsilon^{c}\} = c\{\beta_1 \quad \beta_1 \quad \beta_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$ – wektor odkształceń dyfuzyjnych, α_i – współczynnik rozszerzalności termicznej, β_i – współczynnik rozszerzalności dyfuzyjnej.

Związki konstytutywne wyrazimy przez:

$$\{\sigma\} = [G]\,\{\varepsilon^0\}, \tag{15}$$

gdzie [G] dane jest wzorem (6), a współczynniki rozszerzalności spełniają następujące zależności:

$$G_{11}\alpha_1 + G_{12}\alpha_1 + G_{13}\alpha_3 = \Theta_{11}, \qquad 2G_{13}\alpha_1 + G_{33}\alpha_3 = \Theta_{33}. \tag{16}$$

Tak jak poprzednio obszar dzielimy na n–węzłowe elementy skończone i wyrażamy wektor przemieszczeń w dowolnym punkcie przez wektor przemieszczeń w węzłach:

$$\{u\} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T = \{N\}\{u_e\}, \tag{17}$$

gdzie: $\underset{3\times 3n}{\{N\}}$ – macierz funkcji kształtu, $\underset{3n\times 1}{\{u_e\}}$ – macierz przemieszczeń węzłowych.

Dokonując minimalizacji funkcjonału (12), dochodzimy do równania [1]:

$$[K_e]\{u_e\} = \{F_e^{th}\} + \{F_e^{c}\}, \tag{18}$$

gdzie: $[K_e] = \int_V [B]^T[G][B]dV$, $\{F_e^{th}\} = \int_V [B]^T[G]\{\varepsilon^{th}\}dV$, $\{F_e^{c}\} = \int_V [B]^T[G]\{\varepsilon^{c}\}dV$.

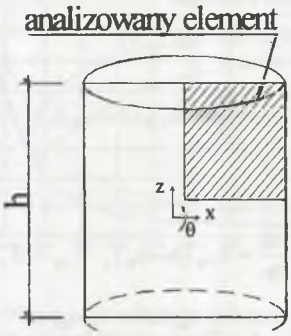
Występującą powyżej macierz [B] wiążącą wektor odkształceń z wektorem przemieszczeń obliczymy wg wzoru:

$$\underset{6\times 3n}{[B]} = \underset{6\times 3}{[L]}\,\underset{3\times 3n}{\{N\}}, \tag{19}$$

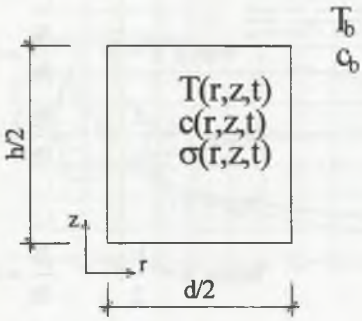
gdzie: $[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}^T$ – operator różniczkowy.

Rozwiązując równanie (18), otrzymamy przemieszczenia węzłów elementu, a z nich łatwo można dostać odkształcenia i naprężenia.

4. Przykład liczbowy



Rys.1. Analizowany walec
Fig.1. Analysing cylinder



Rys.2. Problem brzegowy
Fig.2. Boundary problem

Rozpatrujemy walec kołowy o średnicy d i wysokości h z materiału o transwersalnej izotropii. Temperatura początkowa wynosi $\tilde{T}(\mathbf{x}) = T_0$, a początkowa koncentracja wilgoci równa jest $\tilde{c}(\mathbf{x}) = c_0$. Przyjmujemy, że na zewnątrz walca temperatura jest stale równa T_b, a wilgotność odpowiada koncentracji c_b. Punkt środkowy walca nie przemieszcza się, natomiast punkty na jego osi mogą przemieszczać się tylko w kierunku równoległym do osi. Przyjmujemy także, że walec nie doznaje obrotu wokół jego osi. Jedynym obciążeniem konstrukcji są nierównomierne zmiany pól temperatury i stężenia wilgoci. Wynika z tego, że w punktach na brzegu walca znikają naprężenia normalne w kierunku prostopadłym do brzegu oraz naprężenia styczne. Zakładamy, że w każdym punkcie rozpatrywanego walca wytwarzane jest ciepło W, które jest zależne od czasu i temperatury (dane wg [7]). Przyjmujemy pełne sprzężenie równań przewodnictwa ciepła i dyfuzji. Następnie wyznaczamy pole przemieszczeń, które jest spowodowane dystorsjami wywoływanymi wpływami termicznymi i dyfuzyjnymi. Opierając się na [7], wpływy te znajdujemy oddzielnie stosując zasadę superpozycji. Analizowany walec jest przedstawiony na rys.1. Poszukujemy rozkładu temperatury T [°C], koncentracji c [$\frac{kg}{kg}$] i przemieszczeń (lub naprężeń) dla danych poniżej warunków początkowych i brzegowych. Analizę zadania przeprowadzamy w układzie cylindrycznym (r, φ, z). Ze względu na symetrię opisanego wyżej zagadnienia względem osi walca (równań różniczkowych, funkcji źródeł oraz warunków brzegowych) możemy przyjąć do rozwiązania element płaski osiowosymetryczny. Ponadto zagadnienie posiada także własność symetrii względem płaszczyzny prostopadłej do osi walca przechodzącej przez jego środek. Zatem możemy ograniczyć się tylko do analizy ćwiartki pokazanej na rys.2.

Warunki brzegowe: brzeg $r = 0$: $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial r} = 0$, $u_1 = 0$, $\sigma_{13} = 0$,

brzeg $z = 0$: $\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$, $u_3 = 0$, $\sigma_{13} = 0$,

brzeg $r = \frac{d}{2}$: $\frac{\partial\theta}{\partial r} = h_{1T}(T - T_b)$, $\frac{\partial c}{\partial z} = h_{1W}(c - c_b)$, $\sigma_{11} = 0$,

$\sigma_{13} = 0$,

brzeg $z = \frac{h}{2}$: $\frac{\partial\theta}{\partial z} = h_{3T}(T - T_b)$, $\frac{\partial c}{\partial r} = h_{3W}(c - c_b)$, $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{13} = 0$.

Warunki początkowe: $T = T_0$, $c = c_0$ dla $t = 0$, $r \in (0, \frac{d}{2})$, $z \in (0, \frac{h}{2})$.

Problem rozwiązujemy dla danych (wg [2], [8], [9]):

$D_1^T = 0.00529\ \frac{m^2}{h}$, $D_3^T = 0.00317\ \frac{m^2}{h}$, $D_{W1} = 0.3 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^2}{h}$, $D_{W3} = 0.18 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^2}{h}$,

$D_W^T = 3 \cdot 10^{-6}\ \frac{m^2}{h \cdot K}$, $K_W^T = 0.3375\ \frac{m^2 K}{h}$, $h_{1T} = h_{3T} = 12.0\ \frac{1}{m}$, $h_{1W} = h_{3W} = 5.0\ \frac{1}{m}$,

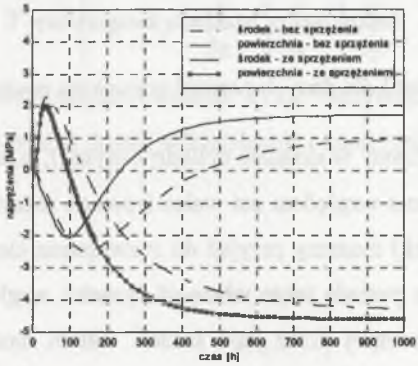
$\rho_c = 250\ \frac{kg}{m^3}$, $\rho = 2000\ \frac{kg}{m^3}$, $T_0 = 20°C$, $T_b = 20°C$, $\kappa = 3.125 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{K}$, $c_0 = 9.5 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{kg}$,

$c_b = 2.0 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{kg}$, $\alpha_1 = 10^{-5}\ \frac{1}{K}$, $\alpha_3 = 0.6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{K}$, $\beta_1 = 10^{-3}$, $\beta_3 = 0.6 \cdot 10^{-3}$, moduł sprężystości i współczynnik Poissona zmienne wg [7] oraz $E_3 = 0.6 \cdot E_1$, $\nu_3 = \nu_1$,

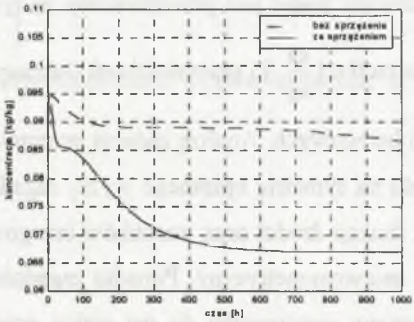
$\tilde{G}_{13} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_3)}$, $d = 4$ m, $h = 4$ m.

Zależności między powyższymi stałymi sprężystości a występującymi w (11) podano w [4].

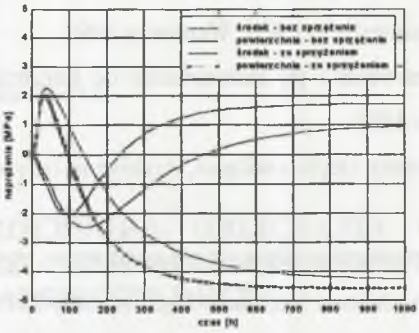
5. Analiza wyników i wnioski



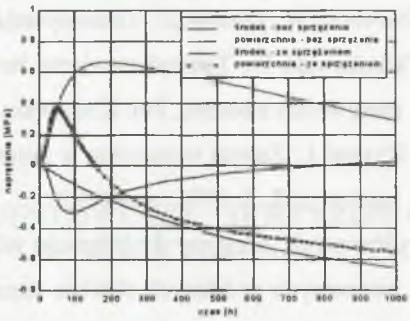
Rys.3. Rozwój temperatury w środku walca
Fig.3. Growing temperature of centre of cylinder



Rys.4. Rozwój koncentracji w środku walca
Fig.4. Growing concentration of centre of cylinder



Rys.5. Naprężenia radialne termiczne
Fig.5. Radial thermal stresses



Rys.6. Naprężenia radialne dyfuzyjne
Fig.6. Radial diffusion stresses

Zadanie rozwiązano za pomocą programu ANSYS 5.4ED dla kroku czasowego $\Delta t = 3.3$ h w początkowych 167 h oraz $\Delta t = 16.7$ h dla kolejnych 833 h. Łączny czas analizy 1000 h. W podsumowaniu pracy przedstawiono wyniki dotyczące środka walca oraz jego górnej powierzchni.

Analizując powyższe wykresy, stwierdzamy, że uwzględniając efekty sprzężenia pola temperatury i koncentracji otrzymujemy wyraźnie różniące się wyniki. Pierwszym narzucającym się wnioskiem jest stwierdzenie, że zawilgocenie materiału powoduje obniżenie się temperatury, natomiast wyższa temperatura jest przyczyną migracji wilgoci (por. rys. 3 i 4). Zauważalny jest jednak większy wpływ pola temperatury na dyfuzję niż pola koncentracji na przepływ ciepła (por. [8], [9]). Obserwujemy także nieznaczną różnicę w naprężeniach termicznych (por. [7]) oraz zdecydowaną przy rozważaniu naprężeń dyfuzyjnych. W tych ostatnich mamy inwersję naprężeń (w początkowym okresie naprężenia ściskające w środku elementu, a rozciągające przy powierzchni, w końcowym odwrotnie) przy uwzględnieniu efektów sprzężenia, natomiast jej brak przy analizowaniu dyfuzji wg prawa Ficka.

LITERATURA

1. Ansys Theory Reference, Heat Flow.
2. Kasperkowicz J.: Dyfuzja wilgoci i deformacja skurczowa w betonie, PWN, Warszawa 1972.
3. Nowacki W.: Postępy teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1986.
4. Nowacki W.: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.

5. Nowacki W.: Zagadnienia termosprężystości, PWN, Warszawa 1960.
6. Nowacki W., Olesiak Z.: Termodyfuzja w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1991.
7. Witakowski P.: Termodynamiczna teoria dojrzewania i jej zastosowanie do konstrukcji masywnych z betonu, Pol. Krakowska, Kraków 1998.
8. Wyrwał J.: Zasada wariacyjna w procesie wymiany ciepła i wilgoci, Archiwum Inżynierii Lądowej, **32**, 3, 1986, ss. 403-431.
9. Wyrwał J., Szczęsny J.: Migracja wilgoci wywołana gradientem temperatury w płytach betonowych poddanych obróbce termicznej, Archiwum Inżynierii Lądowej, **35**, 1, 1989, ss. 125-139.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jerzy Wyrwał

Abstract

The aim of the paper is to present transport of heat and mass problem in a transverse isotropy deformable body. It is known that Fick's law has a limited range of application. For exact description of the fields we should take into account the coupled problem. In the paper the fully coupled fields of temperature, diffusion and mechanical ones are analysed. Making use of variational formulation the stresses in the cylinder have been calculated. To solve the problem the FEM was used. The numerical analysis was done by ANSYS program.