

Zbigniew PERKOWSKI
Politechnika Opolska, Wydział Budownictwa

OPIS ODKSZTAŁCALNOŚCI BETONU Z USZKODZENIAMI*

Streszczenie. Przedstawiono termomechaniczny model narastania uszkodzeń w betonie. Wykazano, iż beton traktowany pierwotnie jako materiał izotropowy pod wpływem procesu narastania uszkodzeń staje się anizotropowy. Zaproponowano sposób wyznaczenia stałych określających odkształcalność materiału z uszkodzeniami na podstawie porównania ujęcia termodynamicznego z eksperymentem.

DESCRIPTION OF THE DEFORMABILITY OF CONCRETE WITH DAMAGES

Summary. The thermomechanical model of the damage evolution in concrete is presented. The experimental way of deriving constants describing the deformability of damaged material given by the thermomechanical approach is proposed.

1. Wprowadzenie

Beton traktujemy zwykle jako materiał pierwotnie izotropowy. W trakcie procesu obciążenia betonu pojawiają się w nim uszkodzenia (mikropęknięcia) o kierunkach zorientowanych zgodnie z kierunkami głównymi naprężeń, co powoduje, iż w betonie rozwija się wtórna anizotropia materiałowa. Problem ten był poruszany w pracach Chena [1], Dragona [2], Karpenki [5] i Litewki [10,11,12], gdzie podjęto próby sformułowania modelu anizotropowej odkształcalności betonu z uszkodzeniami struktury.

W prezentowanych dotychczas modelach teoretycznych uwzględnia się przede wszystkim przesłanki wynikające z obserwacji empirycznych: mikropęknięcia rozwijają się pod kątem prostym do kierunku dodatnich naprężeń głównych, intensywność występowania mikropęknięć zależy od wartości pierwszego niezmiennika tensora naprężeń i od drugiego niezmiennika dewiatora naprężeń [3,8]. Nie narzuca się natomiast przy opisie ewolucji uszkodzenia materiału ograniczeń termodynamicznych, mimo iż omawiany proces ma charakter nieodwracal-

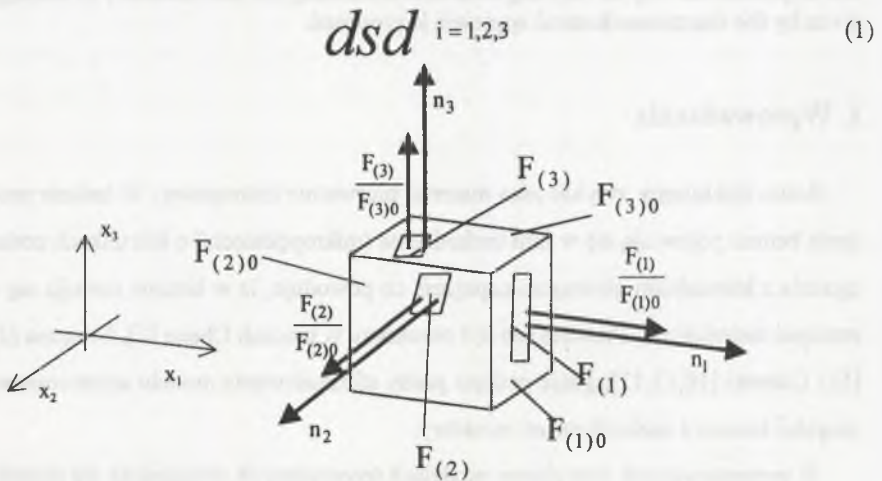
*Praca powstała w ramach seminarium doktoranckiego prowadzonego przez prof. dra hab. inż. Jana Kubika

ny. Oznacza to, że część mocy mechanicznej jest wydatkowana na rozwój defektów w strukturze betonu i tym samym jest dyssypowana z układu. Ponadto przedstawiane opisy odkształcalności betonu z uszkodzeniami odnoszą się do efektów „doraźnych” w relacji odkształcenie-napężenie bez uwzględnienia jego własności reologicznych.

Celem zaprezentowanych w niniejszej pracy rozważań jest zbudowanie poprawnego termomechanicznie modelu ewolucji uszkodzeń i jego uwzględnienie w równaniach opisujących odkształcalność betonu w złożonym stanie napężenia.

2. Opis uszkodzeń w materiale

Proces uszkodzeń struktury betonu będzie ujmowany symetrycznym tensorem drugiego rzędu zwanym tensorem uszkodzeń Ω_{ij} [13], który w kierunkach głównych jest reprezentowany przez trzy wartości główne $\Omega_{(i)}$ $i = 1, 2, 3$. Wartości główne tensora uszkodzeń $\Omega_{(i)}$ określają stosunki pól pustek materiałowych (pęknięć) $F_{(i)}$ w płaszczyznach wyznaczonych przez kierunki główne tensora naprężeń do pola pierwotnego nieuszkodzonego $F_{(i)0}$ (rys.1).



Rys.1. Interpretacja graficzna kierunków głównych tensora uszkodzeń
Fig.1. Graphical interpretation of the damage tensor

Oprócz tensora uszkodzeń Ω_{ij} w pracy wystąpi też druga wielkość, a mianowicie tensor efektu uszkodzenia D_{ij} . Oba tensory związane są przez swoje wartości główne $\Omega_{(i)}$ i $D_{(i)}$ zależnością

$$D_{(i)} = \frac{\Omega_{(i)}}{1 - \Omega_{(i)}} \text{ lub } \Omega_{(i)} = \frac{D_{(i)}}{1 + D_{(i)}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

3. Termomechanika procesu uszkodzenia betonu

Rozpatrzmy stosunkowo prosty model odkształcalności betonu, zakładający, iż beton nieuszkodzony jest materiałem liniowo lepkosprężystym i izotropowym. Natomiast pojawiające się w trakcie procesu obciążania betonu uszkodzenia decydujące o rozwoju anizotropii determinowane są jedynie przez stan naprężenia w materiale. Energetyczny opis procesu narastania uszkodzeń struktury betonu rozpoczniemy od określenia niezależnych pól procesu termodynamicznego. Będzie to tensor naprężeń σ_{ij} , przyrost temperatury θ oraz tensor efektu uszkodzenia D_{ij} jako zmienna wewnętrzna omawianego procesu. Jako podstawowy funkcjonał przyjmiemy entalpię swobodną ρG określoną następująco:

$$\rho G = \rho G(\sigma_{ij}, \theta, D_{ij}) \quad (3)$$

W wyniku typowych rozważań termodynamicznych z bilansu energii i nierówności wzrostu entropii otrzymano nierówność rezydualną (por.[4])

$$-\rho \dot{G} - \rho S \dot{\theta} - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - q_i \frac{\theta_{,i}}{T_0} \geq 0, \quad (4)$$

która powinna być spełniona w każdym rzeczywistym procesie narastania naprężeń σ_{ij} i uszkodzeń D_{ij} oraz zmian przyrostów temperatury θ . Z wyszczególnionymi polami skojarzone są odkształcenia ε_{ij} , entropia ρS i strumień ciepła q_i . Symbole ρ i T_0 oznaczają gęstość ośrodka i temperaturę początkową, natomiast symbol $(\dot{})$ oznacza pochodną lokalną po czasie.

Podstawową dla naszych rozważań entalpię swobodną przedstawimy w postaci sumy członów liniowych i kwadratowych

$$-(\rho G - \rho G_0) = \rho S_0 \theta + \varepsilon_{ij}^0 * d\sigma_{ij} + \frac{1}{2} c_v \theta^2 + \frac{1}{2} F_{ijkl} * d\sigma_{ij} * d\sigma_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} D_{mn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + R \quad (5)$$

gdzie ρG_0 oznacza entalpię początkową, ρS_0 entropię początkową, ε_{ij}^0 odkształcenia początkowe, c_v ciepło właściwe, F_{ijkl} tensor funkcji pełzania, $F_{ijkl}(\mathbf{D}) = A_{ijklmn} D_{mn}$ tensor stałych określających wpływ uszkodzeń na odkształcalność materiału. Obliczając pochodną po czasie z wyrażenia (5) i wstawiając ją do (4), uzyskamy nierówność

$$(\rho S_0 + c_v \theta - \rho S) \dot{\theta} + (\varepsilon_{ij}^0 + F_{ijkl} * d\sigma_{kl} + A_{ijklmn} D_{mn} \sigma_{kl} - \varepsilon_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{ijkl} * d\sigma_{ij} * d\sigma_{kl}) + \left(\frac{1}{2} A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right) \dot{D}_{mn} - q_i \frac{\theta_{,i}}{T_0} \geq 0 \quad (6)$$

Tożsamościowe spełnienie tej nierówności dla każdego rzeczywistego θ i σ_{ij} jest równoważne z przyjęciem, że

$$\begin{aligned} \rho S - \rho S_0 &= c_v \theta, \\ \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 &= F_{ijkl} * d\sigma_{kl} + A_{ijklmn} D_{mn} \sigma_{kl}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (F_{ijkl} * d\sigma_{ij} * d\sigma_{kl}) + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \dot{D}_{mn} &\geq 0 \\ -q_i \theta_{,i} &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Pomijając w rozważaniach efekty cieplne, odkształcenia początkowe i lepłą dyssypację mocy, tzn.

$$\rho S - \rho S_0 \cong 0, \quad q_i \cong 0, \quad \varepsilon_{ij}^0 \cong 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{ijkl} * d\sigma_{ij} * d\sigma_{kl}) \cong 0 \quad (8)$$

otrzymamy równanie konstytutywne w ogólnym, anizotropowym ujęciu

$$\varepsilon_{ij} = F_{ijkl} * d\sigma_{kl} + A_{ijklmn} D_{mn} \sigma_{kl} \quad (9)$$

oraz warunek ewolucji uszkodzeń

$$\frac{1}{2} A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \dot{D}_{mn} \geq 0 \quad (10)$$

W przypadku „izotropowym” z równania (9) uzyskamy (por. [9])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= -(\lambda' \sigma_{kk} + J_1 * d\sigma_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu' \sigma_{ij} + J_2 * d\sigma_{ij} + \\ &+ \alpha (\delta_{ij} D_{kl} \sigma_{kl} + D_{ij} \sigma_{kk}) + 2\beta (\sigma_{ik} D_{kj} + D_{ik} \sigma_{kj}), \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie $\lambda' = \frac{\nu}{E}$ i $\mu' = \frac{1+\nu}{2E}$ oznaczają stałe materiałowe, ν i E współczynnik Poissona i moduł Younga, J_1 i J_2 funkcje pełzania, natomiast α i β są parametrami charakteryzującymi wpływ uszkodzeń materiału na jego odkształcenia. Wówczas warunek ewolucji uszkodzeń (10) dla materiału pierwotnie izotropowego przyjmie postać:

$$\frac{1}{2} \alpha (\delta_{ij} D_{kl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} + D_{ij} \sigma_{kk} \sigma_{ij}) + \beta (\sigma_{ik} D_{kj} \sigma_{ij} + D_{ik} \sigma_{kj} \sigma_{ij}) \geq 0, \quad (12)$$

a dalej

$$(\alpha\sigma_{ii}\sigma_{kl} + 2\beta\sigma_{ik}\sigma_{il})\dot{D}_{kl} \geq 0 \quad (13)$$

Na podstawie nierówności (13) proponuje się następujące równanie ewolucji uszkodzenia materiału

$$\begin{aligned} \Omega_{kl} &= A(\alpha\sigma_{ii}\sigma_{kl} + 2\beta\sigma_{ik}\sigma_{il}) \quad \text{dla} \quad \alpha\sigma_{ii}\sigma_{kl} + 2\beta\sigma_{ik}\sigma_{il} \geq 0 \\ &\quad \text{oraz} \\ \Omega_{kl} &= 0 \quad \text{dla} \quad \alpha\sigma_{ii}\sigma_{kl} + 2\beta\sigma_{ik}\sigma_{il} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Wynika stąd, iż z badań eksperymentalnych poza parametrami E , ν , J_1 , J_2 określającymi odkształcalność betonu nieuszkodzonego należy wyznaczyć dodatkowo trzy stałe materiałowe α , β i A .

4. Proponowany sposób obliczenia stałych materiałowych

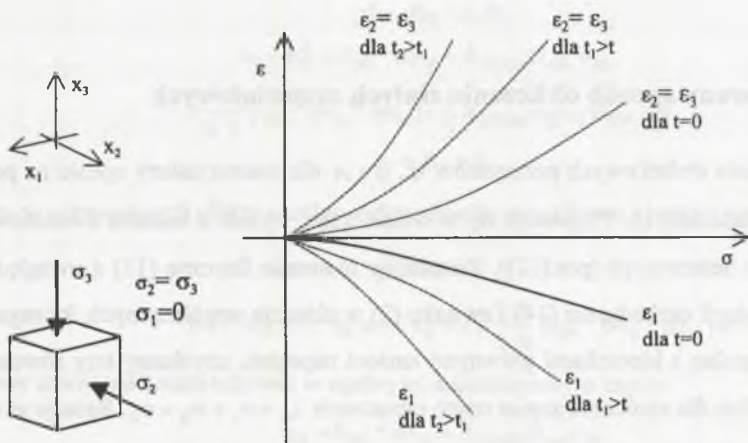
Wyznaczenie dodatkowych parametrów α , β i A dla betonu należy oprzeć na podstawie danych doświadczalnych. Proponuje się tu wykorzystać wyniki z badania dwuosiowego ściskania próbek betonowych (por.[12]). Rozpisując równanie fizyczne (11) z uwzględnieniem równania ewolucji uszkodzenia (14) i związku (2) w układzie współrzędnych, którego kierunki osi będą zgodne z kierunkami głównymi tensora naprężeń, uzyskamy trzy równania (15), (16) i (17), gdzie dla skrócenia zapisu użyto oznaczenia $I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Relacje te stanowią zależności pomiędzy wartościami głównymi tensorów odkształceń i naprężeń, na podstawie których można wyznaczyć poszukiwane parametry α , β i A .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{\nu}{E}I_\sigma - J_1 * dl_\sigma + \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 + J_2 * d\sigma_1 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_1 + 2\beta\sigma_1^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_1 - 2\beta\sigma_1^2} [\sigma_1(2\alpha + 4\beta) + \alpha\sigma_2 + \alpha\sigma_3] + \\ &\quad + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_2 + 2\beta\sigma_2^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_2 - 2\beta\sigma_2^2} \alpha\sigma_2 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_3 + 2\beta\sigma_3^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_3 - 2\beta\sigma_3^2} \alpha\sigma_3 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= -\frac{\nu}{E}I_\sigma - J_1 * dl_\sigma + \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 + J_2 * d\sigma_2 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_2 + 2\beta\sigma_2^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_2 - 2\beta\sigma_2^2} [\sigma_2(2\alpha + 4\beta) + \alpha\sigma_1 + \alpha\sigma_3] \\ &\quad + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_1 + 2\beta\sigma_1^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_1 - 2\beta\sigma_1^2} \alpha\sigma_1 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_3 + 2\beta\sigma_3^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_3 - 2\beta\sigma_3^2} \alpha\sigma_3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = & -\frac{\nu}{E} I_\sigma - J_1 * dI_\sigma + \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 + J_2 * d\sigma_3 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_3 + 2\beta \sigma_3^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_3 - 2\beta \sigma_3^2} [\sigma_3(2\alpha + 4\beta) + \alpha \sigma_1 + \alpha \sigma_2] \\ & + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_1 + 2\beta \sigma_1^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_1 - 2\beta \sigma_1^2} \alpha \sigma_1 + \frac{\alpha I_\sigma \sigma_2 + 2\beta \sigma_2^2}{\frac{1}{A} - \alpha I_\sigma \sigma_2 - 2\beta \sigma_2^2} \alpha \sigma_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Z analizy powyższych zależności wynika, że proponowany model opiera się na założeniu, iż beton nieszkodzony (tzn. gdy $D_{mn} = 0$) jest materiałem liniowo lepkosprężystym. Należy zaznaczyć, że w omawianym modelu przyjęto uproszczenie, iż wielkości α , β i A określające wpływ uszkodzenia struktury betonu na jego odkształcalność są niezależne od historii procesu i odwrotnie funkcje pełzania są niezależne od parametrów określających zniszczenie.



Rys.2. Eksperymentalne relacje pomiędzy naprężeniem i odkształceniem w przypadku równomiernego ściskania dwuosiowego betonu ($\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = 0$)

Fig.2. Experimental relations between stress and strain in case of biaxial compression for concrete

Dla poprawnej identyfikacji parametrów E , ν , J_1 , J_2 , α , β i A należy więc określić empirycznie krzywe opisujące relacje odkształcenie-naprężenie w dwuosiowym stanie naprężenia (dla uproszczenia rozważań założono równomierność ściskania) w różnych chwilach procesu obciążania betonu (rys.2) i porównać z teoretycznymi zależnościami (15), (16) i (17). Przykładowo, wartości parametrów α , β i A dla betonu bazaltowego (dla którego $E = 49.7$ GPa, $\nu = 0.2$) podano w opracowaniu [6].

$$\alpha = -1.53 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{MPa}}, \beta = 1.78 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{MPa}}, A = 17.28 \frac{1}{\text{MPa}} \quad (18)$$

5. Wnioski

Znajomość parametrów materiałowych E , ν , J_1 , J_2 , α , β i A pozwala na określenie zależności pomiędzy tensorem naprężeń σ_{ij} a odkształceń ϵ_{ij} w betonie pod dowolnym złożonym stanem naprężenia z uwzględnieniem procesu pełzania. Różnica pomiędzy dotychczas proponowanymi sposobami obliczania powyższych parametrów a przedstawionym w pracach [6,10,11,12] polega na tym, że równanie ewolucji uszkodzeń postuluje się na podstawie ograniczenia (13), wynikającego z rozważań natury termodynamicznej.

LITERATURA

1. Chen W.F.: *Plasticity of reinforced concrete*, McGraw-Hill, New York 1982.
2. Dragon A.: *Kontynualny model ośrodka z parametrem przebudowy struktury*, IPPT PAN, Warszawa 1974.
3. Hayhurst D.R., *Creep rupture under multi axial state of stress*, *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 1972.
4. Jakubiak A., Kubik J.: *Wpływ dyfuzji na sprężysto-plastyczne i kruche deformacje materiałów*, ZN WSI Opole, Bud. Z 35, 1992.
5. Karpenko N.I.: *K postrojeniju obszecznej ortotropnoj modeli deformirowanija betona*, *Stroitel'naja Miecchanika i Rascziot Sooruzenji*, Nr 4, 1987.
6. Kubik J., Perkowski Z.: *Opis narastania uszkodzeń betonu*, III Konferencja Naukowo-Techniczna-Zagadnienia Materiałowe w Inżynierii Lądowej-Matbud'2000, Kraków 2000.
7. Mitrofanow W.P., Dobzenko O.A.: *Razwitie deformacionnoj anizotropii betona pri ocie-wom szati*, *Beton i żelezobeton*, Nr 10, 1991.
8. Leckie F.A., Hayhurst D.R.: *Creep raptures of structures*, *Proc. R. Soc. Lond.*, A.340, 1974.
9. Litewka A.: *Uszkodzenie i pęknięcie metali w warunkach pełzania*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Rozprawy Nr 250, Poznań 1991.
10. Litewka A., Bogucka J., Dębiński J.: *Doświadczalna identyfikacja stałych materiałowych betonu podlegającego uszkodzeniu*, XVII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka 1996.

11. Litewka A., Bogucka J., Dembiński J.: Deformation induced anisotropy of concrete, Archives of Civil Engineering, Nr 4, 1996.
12. Litewka A., Dębiński J.: Anizotropowy model odkształcalności betonu w złożonym stanie naprężenia, XLIII KN KILiW PAN i KN PZITB, Poznań 1997.
13. Murakami S., Ohno N.: A continuum theory of creep and creep damage, Creep in Structures, red: A.R.S.Ponter, D.R.Hayhurst, Springer Verlag, Berlin 1981.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jerzy Białkiewicz

Abstract

The thermomechanical model of the damage evolution in material is presented and introduced to the equations describing the deformability of concrete under complex state of stress. The following statements are the consequences of the proposed model: concrete before the loading process can be treated as isotropic material and during the loading it becomes anisotropic, the deformability of material is characterised by standard parameters (Young's modulus, Poisson's ratio, functions of creep) and also by three new constants describing the influence of damages in material on its deformability. The experimental way of determining parameters describing the deformability of the damaged material is proposed.