ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

KONRAD WOJCIECHOWSKI

# SYNTEZA PRAWA STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ

P. 3342/91

AUTOMATYKA

Z. 104
GLIWICE
1991

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

**ZESZYTY NAUKOWE**
**Nr 1120**

KONRAD WOJCIECHOWSKI

# SYNTEZA PRAWA STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ

GLIWICE 1991

## SPIS TREŚCI


OZNACZENIA ..... 11

WPROWADZENIE ..... 19

1. Modele niepewności ..... 19

2. Synteza prawa sterowania ..... 21

3. Przegląd zawartości pracy ..... 24

ROZDZIAŁ 1. ZAGADNIENIA POMOCNICZE ..... 29

1. Wyróżnione argumenty i funkcje ..... 29

2. Modele układów dynamicznych ..... 32

3. Prawo sterowania ..... 34

ROZDZIAŁ 2. ZBIÓR INFORMACYJNY $\mathbb{T}$ ..... 41

1. Zbiory zmiennych zgodnych z pomiarami ..... 41

2. Wybrane własności rodziny $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ ..... 47

3. Różniczkowe ograniczenia informacyjne ..... 55

ROZDZIAŁ 3. ZBIORY INFORMACYJNE TYPU $\mathbb{S}$ ..... 65

1. Definicje i podstawowe własności ..... 65

2. Zbiory warunkowe i rzuty ..... 75

3. Przykłady ..... 77

4. Dodatek ..... 97

ROZDZIAŁ 4. ZBIORY INFORMACYJNE TYPU $\mathbb{R}$ ..... 103

1. Definicje i podstawowe własności ..... 103

2. Zbiory warunkowe i rzuty ..... 113

3. Rzut środka ciężkości zbioru i środek ciężkości rzutu zbioru . 115

4. Parametryzacja zbiorów elipsoidalnych ..... 119

5. Rekurencja parametrów ..... 123

6. Dodatek ..... 129

ROZDZIAŁ 5. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA ..... 133

1. Odwzorowanie podstawowe ..... 133

2. Porządek w rodzinie zbiorów L ..... 138

3. Przykład ..... 139

ROZDZIAŁ 6. WYBRANE PROBLEMY SYNTEZY PRAW STEROWANIA ..... 141

1. Problem 1.

Model w zmiennych stanu. Centrowany zbiór T. Zawierająca się struktura informacyjna ..... 141

2. Problem 2.

Model w zmiennych stanu. Niecentrowany zbiór. Zawierająca się struktura informacyjna ..... 153

3. Problem 3.

Model w zmiennych stanu. Centrowany zbiór T. Nieaktywne prawo sterowania. Zawierająca się struktura informacyjna ..... 165

4. Problem 4.

Model bezpośredni. Zawierająca się struktura informacyjna .... 174

5. Problem 5.

Model bezpośredni. Klasyczna struktura informacyjna. Nieaktywne prawo sterowania ..... 179

6. Problem 6.

Model bezpośredni. Bezpośrednie prawo sterowania ..... 183

PODSUMOWANIE ..... 191

LITERATURA ..... 195

STRESZCZENIE ..... 205

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ ..... 11

ВВЕДЕНИЕ ..... 19

1. Модели неопределенностей ..... 19

2. Синтез закона управления ..... 21

3. Обзор содержания работы ..... 24

ГЛАВА 1. ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ..... 29

1. Выделенные аргументы и функции ..... 29

2. Модели динамических систем ..... 32

3. Закон управления ..... 34

ГЛАВА 2. ИНФОРМАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО $\mathbb{I}$ ..... 41

1. Множества переменных согласных с измерениями ..... 41

2. Избранные свойства семьи $\mathcal{E}|\mathbb{D}$ ..... 47

3. Дифференциальные информационные ограничения ..... 55

ГЛАВА 3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА ТИПА $\mathbb{S}$ ..... 65

1. Определения и основные свойства ..... 65

2. Условные множества и проекции ..... 75

3. Примеры ..... 77

4. Приложение ..... 97

ГЛАВА 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА ТИПА $\mathbb{R}$ ..... 103

1. Определения и основные свойства ..... 103

2. Условные множества и проекции ..... 113

3. Проекция центра тяжести множества и центр тяжести проекции множества ..... 115

4. Параметризация эллипсоидных множеств ..... 119

5. Рекуренция параметров ..... 123

6. Приложение ..... 129

ГЛАВА 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ..... 133

1. Основное отображение ..... 133

2. Порядок в семье множеств L ..... 136

3. Пример ..... 139

ГЛАВА 6. ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ СИНТЕЗА ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ..... 141

1. Проблема 1.

Модель в переменных состояния. Центрированное множество T. Содержащаяся информационная структура ..... 141

2. Проблема 2.

Модель в переменных состояния. Нецентрированное множество T. Содержащаяся информационная структура ..... 153

3. Проблема 3.

Модель в переменных состояния. Центрированное множество T. Неактивный закон управления. Содержащаяся информационная структура ..... 165

4. Проблема 4.

Непосредственная модель. Содержащаяся информационная структура ..... 174

5. Проблема 5.

Непосредственная модель. Классическая информационная структура. Неактивный закон управления ..... 179

6. Проблема 6.

Непосредственная модель. Непосредственный закон управления ..... 183

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ..... 191

ЛИТЕРАТУРА ..... 195

РЕЗЮМЕ ..... 205

# TABLE OF CONTENTS


NOTATION ..... 11

INTRODUCTION ..... 19

1. Models of uncertainty ..... 19

2. Control law synthesis ..... 21

3. Review of contents ..... 24

CHAPTER 1. ADDITIONAL PROBLEMS ..... 29

1. Distinct arguments and functions ..... 29

2. Models of dynamical systems ..... 32

3. Control law ..... 34

CHAPTER 2. INFORMATION SET $\mathcal{T}$ ..... 41

1. Sets of variables consistent with measurements ..... 41

2. Selected properties of family $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ ..... 47

3. Differential information constraints ..... 55

CHAPTER 3. INFORMATION SETS $\mathcal{S}$ ..... 65

1. Definition and basic properties ..... 65

2. Conditional sets and projections ..... 75

3. Examples ..... 77

4. Appendix ..... 97

CHAPTER 4. INFORMATION SETS $\mathcal{R}$ ..... 103

1. Definition and basic properties ..... 103

2. Conditional sets and projections ..... 113

3. Set gravity center projection and gravity center of set projection ..... 115

4. Parameterization of ellipsoidal sets ..... 119

5. Parameter recurrence ..... 123

6. Appendix ..... 129

CHAPTER 5. GEOMETRIC INTERPRETATION ..... 133

1. Basic mapping ..... 133

2. Order in family of sets L ..... 138

3. Example ..... 139

CHAPTER 6. SELECTED PROBLEMS OF CONTROL LAW SYNTHESIS ..... 141

1. Problem 1.

State space model.Centered set T. Nested information structure 141

2. Problem 2.

State space model. Non centered set T. Nested information structure ..... 153

3. Problem 3.

State space model. Centered set T. Non-active control law. Nested information structure ..... 165

4. Problem 4.

Direct model. Nested information structure ..... 174

5. Problem 5.

Direct model. Classical information structure. Non-active control law ..... 179

6. Problem 6.

Direct model. Direct control law ..... 183

CONCLUSIONS ..... 191

BIBLIOGRAPHY ..... 195

SUMMARY ..... 205

# PODZIĘKOWANIA

Autor dziękuje wszystkim osobom i instytucjom, które umożliwiły powstanie pracy lub przyczyniły się do jej polepszenia.

W okresie grudzień 1985 – sierpień 1986 praca była prowadzona dzięki stypendium Uniwersytetu Wageningen w Holandii. Autor dziękuje Władzom tej Uczelni prof. dr. P. van Beek z Wydziału Matematyki Uniwersytetu w Wageningen, prof. dr. inż. P. Eykhoffowi i prof. dr. inż. M.L.J. Hautusowi z Uniwersytetu w Eindhowen oraz prof. dr. inż. H. Kwakernaakowi z Uniwersytetu Twente w Groningen. Specjalne podziękowania należą się dr. inż. A. Królikowskiemu, współautorowi niektórych początkowych wyników.

W okresie 1986-1990 praca realizowana była w Zakładzie Teorii Sterowania Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej i finansowana częściowo z programu RP.I.02 koordynowanego przez Politechnikę Warszawską. Autor dziękuje wszystkim Kolegom za dyskusje dotyczące tresci pracy, a w szczególnosci Kierownikowi Zakładu prof. dr. hab. inż. R. Gessingowi za pomoc okazaną w propagowaniu podstawowych idei pracy oraz uwagę, która spowodowała rozwinięcie frgmentu pracy dotyczącego zbiorów elipsoidalnych i ich parametryzacji, doc. dr. hab. inż A. Świerniakowi za przeczytanie wstępnej wersji pracy i pomoc w pewnych zagadnieniach matematycznych, mgr. inż. A. Polańskiemu za sugestię sposobu rozwiązania pomocniczego problemu optymalizacji parametrycznej, co wykorzystane zostanie w przyszłej rozszerzonej wersji pracy.

# OZNACZENIA

**Ogólna konwencja oznaczeń**

Dla przejrzystosci pracy przyjęto nastepujące konwencje oznaczeń:

1. Małe koncowe litery alfabetu łacińskiego oznaczają wektory, przykładowo u, v, w, ..., w tym również skalary.

2. Duże litery alfabetu łacińskiego oznaczają macierze, przykładowo A, B, C,..., w tym również macierze blokowe.

3. Duże litery alfabetu łacińskiego "pisane podwójnie" oznaczają zbiory, wyróżnione dla potrzeb pracy, przykładowo $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, ..., $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$.

4. Duże litery "pisane" oznaczają rodziny zbiorów wyróżnionych dla potrzeb pracy, przykładowo $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$.

5. Każdy z symboli wymienionych w pp 1-4 może być opatrzony symbolem dolnym lub górnym.

   5.1. Symbole dolne i, j, k, l są liczbami naturalnymi lub skończenie elementowymi ciągami takich liczb, pisanymi z pogrubieniem jako $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$.

   5.2. Symbole górne i, j, k, l, stosowane w odniesieniu do wektorów, są charakterystyczne dla pracy i oznaczają ciągi wektorów.

6. Małe wybrane litery alfabetu łacińskiego, przykładowo e, f, g, h, oznaczają funkcje wektorowe lub skalarne.

7. Małe litery alfabetu greckiego, przykładowo $\alpha$, $\beta$, ... oznaczają odwzorowania.

8. Oznaczenia inne niż wynikające z powyższych konwencji są objaśnione w tekście pracy lub w oznaczeniach szczegółowych .

**Ważniejsze oznaczenia szczegółowe**

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $\mathbb{I}$ | 29 | Zbiór liczb naturalnych |
| $\mathbb{I}^M$ | 29 | Iloczyn kartezjański M egzemplarzy zbioru $\mathbb{I}$ |
| $\mathbb{H}_t, \mathbb{H}_u, \mathbb{H}_z$ | 29 | Horyzonty odpowiednio zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów |
| $i \in \mathbb{I}^M$ | 29 | M wymiarowy argument dyskretny |
| $\mathbb{D}_t, \mathbb{D}_u, \mathbb{D}_z$ | 30 | Podzbiory horyzontów $\mathbb{H}_t, \mathbb{H}_u, \mathbb{H}_z$ |
| R | 30 | Zbiór liczb rzeczywistych |
| $R^n$ | 30 | Iloczyn kartezjański n egzemplarzy zbioru R |
| $f_{\mathbb{D}}$ | 30 | Wektor kolumnowy blokowy (ciąg), numery poszczególnych składowych blokowych wybierane są ze zbioru $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{H}$ odpowiednio do ustalonego porządku. |
| $f_{\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2}$ | 30 | Wektor kolumnowy blokowy (ciąg), numery poszczególnych składowych blokowych wybierane są ze zbioru $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{H}$ odpowiednio do ustalonego porządku. |
| $f^k$ | 30 | Wektor kolumnowy blokowy (ciąg), numery poszczególnych składowych blokowych są 1,...,k |
| $f^{k \setminus l}$ | 30 | Wektor kolumnowy blokowy (ciąg), numery poszczególnych składowych blokowych są l+1,...,k gdzie k>l. |

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{uk}})$ | 33 | Funkcja określająca zależność pomiaru $z_k$ od zmiennych niepewnych $t_{D_{tk}}$ i sterowań $u_{D_{uk}}$. |
| $\bar{h}_k(t,u)$ | 34 | Funkcja określająca zależność pomiaru $z_k$ od zmiennych niepewnych $t_{H_t}$ i sterowań $u_{H_u}$ przedstawiona w zapisie uproszczonym |
| $\mathcal{H}_z$ | 34 | Rodzina podzbiorów zbioru $\mathbb{D}_z$ |
| $\gamma$ | 34 | Przyporządkowanie informacyjne |
| $\gamma_a$ | 34 | Przyporządkowanie informacyjne dla zagregowanego prawa sterowania |
| $u_i(z_{\gamma(i)})$ | 34 | i-te prawo sterowania |
| $u_{oi}(z_{o,\gamma(i)})$ | 34 | i-te nieaktywne prawo sterowania |
| $q_i(z_{\gamma_a(i)})$ | 34 | i-te zagregowane prawo sterowania |
| $q_{oi}(z_{o,\gamma_a(i)})$ | 35 | i-te zagregowane nieaktywne prawo sterowania |
| $g_i(t)$ | 38 | i-te bezpośrednie prawo sterowania |
| $r<N_1$ | 38 | parametr określający segmentację wektora zmiennych niepewnych t |
| $t_1$ | 38 | r elementowy pierwszy segment wektora t |
| $t_2$ | 38 | $N_1$-r elementowy drugi segment wektora t |
| $\partial g_i/\partial t_{1j}$ | 38 | Pochodna cząstkowa i-tej składowej funkcji g względem j-tej składowej pierwszego segmentu wektora t |
| $\partial g_i/\partial t_{2j}$ | 38 | Pochodna cząstkowa i-tej składowej funkcji g względem j-tej składowej drugiego segmentu wektora t |

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $z_D$ | 41 | Wektor pomiarów o mumerach ze zbioru $D=\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq H_z=\{1,\ldots,N_1\}$, $r<N_1$ |
| $T$ | 42 | Zbiór określający możliwe wartości zmiennych $(x_1,w_1,\ldots,w_N,v_1,\ldots,v_N)$ |
| $P=z(T)$ | 42 | Zbiór pomiarów zgodnych ze zbiorem T |
| $C\|z_D$ | 42 | Zbiór zmiennych zgodnych z pomiarami $z_D$ |
| $T\|z_D$ | 42 | Zbiór zmiennych zgodnych z pomiarami $z_D$ i zbiorem T |
| $\mathfrak{C}\|D$ | 42 | Rodzina zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami o numerach ze zbioru D |
| $\partial h/\partial t_1$ | 43 | Macierz pochodnych cząstkowych funkcji h względem pierwszego r wymiarowego segmentu wektora t |
| $\partial h/\partial t=h_t$ | 43 | Macierz pochodnych cząstkowych funkcji h względem wektora t |
| $\partial h/\partial g=h_g$ | 43 | Macierz pochodnych cząstkowych funkcji h względem sterowań |
| $\partial g/\partial t=g_t$ | 43 | Macierz pochodnych cząstkowych funkcji g (bezposredniego prawa sterowania) względem wektora t |
| $z_{oD}$ | 45 | Wektor pomiarów o mumerach ze zbioru $D=\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq H_z=\{1,\ldots,N_1\}$, $r<N_1$ dla przypadku zerowych sterowań |
| $C\|z_{oD}$ | 45 | Zbiór zmiennych zgodnych z pomiarami $z_D$ dla przypadku zerowych sterowań |
| $h_o(t)$ | 45 | Funkcja określająca model bezposredni w przypadku zerowych sterowań |
| $z_{H\setminus D}$ | 48 | Wektor pomiarów o numerach ze zbioru $H\setminus D$ |

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $dz_D$ | 49 | Różniczka zupełna wektora pomiarów $z_D$ |
| $dz_{H\setminus D}$ | 49 | Różniczka zupełna wektora pomiarów $z_{H\setminus D}$ |
| $p(u)$ | 50 | Funkcja określająca addytywny składnik zależny od sterowań |
| $\mathcal{T}_o \mid D$ | 50 | Rodzina zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami o numerach ze zbioru D w przypadku zerowych sterowań |
| $S_{ok}=\mu_{ok}(T)$ | 67 | Zbiór informacyjny typu S określony dla $k\in H$ i zerowych sterowań |
| $S_k$ | 69 | Zbiór informacyjny typu S określony dla $k\in H$ |
| $(s_k, z_o^k)$ | 67 | Element zbioru $S_{ok}$, $s_k=(x_1, w^N, v^{N\setminus k})$ |
| $(s_k, z^k)$ | 69 | Element zbioru $S_k$ |
| $\mu_{ok}$ | 67 | Swobodne odwzorowanie informacyjne |
| $J_{\mu_{ok}}$ | 68 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\mu_{ok}$ |
| $d(s_k, z_o^k)$ | 68 | Objętość elementu różniczkowego zbioru $S_{ok}$ |
| $d(s_k, v^k)$ | 72 | Objętość elementu różniczkowego zbioru T |
| $J_{\mu_k}$ | 71 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\mu_k$ |
| $d(s_k, z^k)$ | 72 | Objętość elementu różniczkowego zbioru $S_k$ |
| $\eta_{ok}$ | 72 | Odwzorowanie przekształcające zbiór $S_{ok}$ w zbiór $S_{o,k-1}$ |
| $J_{\eta_{ok}}$ | 73 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\eta_{ok}$ |
| $J_{\eta_k}$ | 74 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\eta_k$ |
| $S_{ok} \mid z_o^k$ | 75 | Zbior warunkowy zbioru $S_{ok}$ |

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $P_{ok}=\pi_{zk}(S_{ok})$ | 75 | Rzut ortogonalny zbioru $S_{ok}$ na podprzestrzeń zmiennych $z_o^k$ |
| $Z_{ok}\|z_o^k$ | 75 | Warunkowy zbiór pomiarów $z_{ok}$ |
| $\mu_{o2}^{\Delta}$ | 77 | Zmodyfikowane odwzorowanie informacyjne (ciąg pomiarów opóźniony o $\Delta$) |
| $S_{o2}^{\Delta}=\mu_{o2}^{\Delta}(T)$ | 77 | Zmodyfikowany zbiór informacyjny |
| $S_{o2}^{\Delta}\|z_{o2}$ | 78 | Zmodyfikowany warunkowy zbiór informacyjny |
| $S_{ok}^{\Delta(k-1)}$ | 91 | Zmodyfikowany zbiór informacyjny (ciąg pomiarów opóźniony o $(k-1)\Delta$) |
| $R_{ok}=\rho_{ok}(T)$ | 104 | Zbiór informacyjny typu R określony dla $k\in H$ i zerowych sterowań |
| $R_k$ | 107 | Zbiór informacyjny typu R określony dla $k\in H$ |
| $(r_{ok}, z_o^k)$ | 104 | Element zbioru $R_{ok}$, $r_{ok}=(x_{ok}, w^N, v^{N\setminus k})$ |
| $(r_k, z^k)$ | 107 | Element zbioru $R_k$ |
| $\rho_{ok}$ | 104 | Swobodne odwzorowanie informacyjne |
| $J_{\rho_{ok}}$ | 106 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\rho_{ok}$ |
| $d(r_{ok}, z_o^k)$ | 107 | Objętość elementu różniczkowego zbioru $R_{ok}$ |
| $d(s_k, v^k)$ | 107 | Objętość elementu różniczkowego zbioru T |
| $J_{\rho_k}$ | 109 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\rho_k$ |
| $d(r_k, z^k)$ | 110 | Objętość elementu różniczkowego zbioru $R_k$ |
| $\xi_{ok}$ | 111 | Odwzorowanie przekształcające zbiór $R_{ok}$ w zbiór $R_{o,k-1}$ |
| $J_{\xi_{ok}}$ | 111 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\xi_{ok}$ |

| Oznaczenie | Strona | Znaczenie |
|---|---|---|
| $J_{\xi_k}$ | 113 | Macierz Jacobiego odwzorowania $\xi_k$ |
| $R_{ok}\|z_o^k$ | 113 | Zbiór warunkowy zbioru $R_{ok}$ |
| $P_{ok}=\pi_{zk}(R_{ok})$ | 113 | Rzut ortogonalny zbioru $R_{ok}$ na podprzestrzen zmiennych $z_o^k$ |
| $X_{ok}\|z_o^k=\pi_{x_{ok}}(R_{ok}\|z_o^k)$ | 114 | Rzut ortogonalny zbioru warunkowego $R_{ok}\|z_o^k$ na podprzestrzeń $x_{ok}$ |
| $Z_{ok}\|z_o^k$ | 114 | Warunkowy zbiór pomiarów $z_{ok}$ |
| $E(m,M)$ | 119 | Zbiór elipsoidalny o parametrach m, M |
| $\alpha$ | 133 | Odwzorowanie podstawowe |
| $L=\alpha(T)$ | 133 | Obraz zbioru T według odwzorowania $\alpha$ |
| $\beta, \alpha_\beta, \alpha_{\beta\mu}, \alpha_{\beta\rho}$ | 133, 137, 138 | Odwzorowania pomocnicze |
| $m^o$ | 139 | Moment rzędu zerowego |
| $m^2$ | 139 | Macierz momentów rzędu drugiego |
| q | 142 | Kwadratowy wtórny wskaźnik jakości |

# WPROWADZENIE

Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności jest stale aktualną dziedziną badań. Problem syntezy praw sterowania sformułowany i rozwiązany w pracy posiada cechy wyróżniające go spośród innych problemów tego typu. Są nimi przyjęty model niepewności ograniczonej w powiązaniu z metodą zbiorów informacyjnych oraz dwie efektywnie wykorzystywane parametryzacje tych zbiorów (elipsoidalna i wielościenna) - nowa interpretacja nieklasycznej struktury informacyjnej wynikająca z wprowadzonych ograniczeń informacyjnych i bezpośrednie modele sterowanego obiektu, pozwalające na jednolite traktowanie problemów syntezy praw sterowania formułowanych konwencjonalnie oddzielnie dla modeli 1D i MD.

## 1. Modele niepewności

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie najbardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właśnie modelu niepewności należą do danego zbioru. Struktura tego zbioru może być dowolna.

Pierwsze próby wykorzystania tego modelu można znaleźć w pracach [52], [57], [63], dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [7], [8] również z zakresu teorii sterowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty", mając być może na uwadze związek z teorią zbiorów rozmytych. Model niepewności ograniczonej bywa też nazywany "non-probabilistic model of uncertainty" lub "set-theoretical

model", [4], [6], [3]. W rozumieniu intuicyjnym model niepewności ograniczonej wykorzystywany był również w pracach [67-70].

Zastosowania praktyczne modelu niepewności ograniczonej w dziedzinie ekologii przedstawiono w pracach [20], [33], [46], zaś w dziedzinie mechaniki przykładowo w pracach [3], [4], [5], [6]. Ogólnie stwierdza się, że model niepewności ograniczonej powinien być stosowany, jeżeli liczba danych pomiarowych jest zbyt mała dla określenia parametrów statystycznych wymaganych w modelu niepewności losowej.

Efektywne operowanie modelem niepewności ograniczonej wymaga parametryzacji zbiorów. Stąd w zastosowaniach rozpatruje się zbiory elipsoidalne w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, parametryzowane przez środek ciężkości i dodatnio określoną macierz formy kwadratowej oraz zbiory wielościenne parametryzowane alternatywnie przez wierzchołki, krawędzie lub ściany. Zbiory wypukłe mogą być również efektywnie określone przez parametryzację ich funkcji podpierającej.

Modelowi niepewności ograniczonej przyporządkować można formalnie równoważne modele niepewności losowej. Przykładowo można przyjąć rozkład równomierny na danym zbiorze lub rozkład symetryczny względem środka ciężkości tego zbioru. Zbiór ograniczony można również traktować jako obszar ufności wyznaczony na podstawie (ograniczonej lub nie) gęstości rozkładu. Przykładowo obszar ufności odpowiadający wielowymiarowemu rozkładowi normalnemu jest zbiorem elipsoidalnym.

Modele niepewności ograniczonej i losowej mogą być traktowane w pełni jednolicie w kategoriach teorii miary [13], [19].

W modelu niepewności rozmytej stopień przynależności elementu do danego zbioru określa wartość funkcji przynależności przyporządkowana temu elementowi. Może ona być interpretowana jako "wartość logiczna" wyrażenia "element należy do danego zbioru". Jeżeli zbiór elementów o różnej od zera

funkcji przynależności jest ograniczony, to funkcja ta może być parametryzowana rodziną zbiorów, z których każdy odpowiada ustalonej wartości funkcji. Parametryzacja taka jest szczególnie korzystna w powiązaniu ze składaniem maxyminowym występującym w przypadku modelu niepewności rozmytej, wartość parametru nie ulega bowiem zmianie w wyniku operacji na zbiorach.

## 2. Synteza praw sterowania

Wyniki uzyskane w teorii sterowania i dotyczące problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności dotyczą głównie problemu liniowo-kwadratowego (LQ) przy niepewności o modelu losowym.

W sformułowaniu klasycznego liniowo-kwadratowego problemu sterowania stochastycznie optymalnego zakłada się, że warunek początkowy $x_1$ oraz addytywne zakłócenia $w_k$, $v_k$ są dla $k=1,\ldots,N$ wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi i dodatkowo wartość średnia $w_k$ wynosi zero dla $k=1,\ldots,N$. Przyjmuje się również, że dopuszczalne prawa sterowania posiadają strukturę informacyjną typu "nested". Przy powyższych założeniach optymalne prawo sterowania w chwili k jest liniową funkcją oceny wektora stanu wyznaczonej na podstawie informacji pomiarowej dostępnej w chwili k.

W ogólniejszych wersjach problemu LQ [1,9,60] dopuszcza się dowolne charakterystyki probabilistyczne zmiennych losowych $x_1$, $w_k$, $v_k$, $k=1,\ldots,N$ uzyskując prawo sterowania w postaci liniowej funkcji oceny wektora stanu uzupełnionej o składnik związany z predykcją zakłóceń w równaniu stanu.

W przypadku sterowania stochastycznie optymalnego w problemie LQ układ sterowania dekomponuje się na podukład wyznaczania warunkowej oceny wektora stanu i liniowe w funkcji tej oceny prawo sterowania.

Osobny problem stanowi wyznaczenie oceny wektora stanu na podstawie dostępnej w danej chwili informacji pomiarowej. Efektywne rekurencyjne rozwiązanie tego problemu wymaga oprócz wzajemnej niezależności zmiennych

$x_1, w_k, v_k$, $k=1,\ldots,N$ założenia dodatkowo gausowskich rozkładów dla tych zmiennych.

Podobnie jak problem syntezy praw sterowania, również definicja struktury informacyjnej [29] oraz kontrprzykład Witsenhausena [64] [44], gdzie dodatkowo zakłada się rozkłady normalne, podawane są w kontekście losowego modelu niepewności. Sugeruje to, że model ten stanowi istotny element problemu i wpływa jakościowo na jego rozwiązanie.

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej ograniczony zbiór T określa łącznie możliwe wartości zmiennych niepewnych. W przypadkach szczególnych (zbiory elipsoidalne, wielościenne) zbiór T może być parametryzowany.

Wzajemnie jednoznaczne i zależne od praw sterowania odwzorowanie zbioru T jest zbiorem informacyjnym. W pracy wyróżniono trzy typy zbiorów informacyjnych zorientowanych na różne sformułowania problemu syntezy praw sterowania.

Zbiory informacyjne typu R nadają się do problemów, w których model sterowanego obiektu zapisany jest w konwencji zmiennych stanu. Odpowiednikiem warunkowej oceny wektora stanu jest ogólnie rzut ortogonalny środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu. W przypadku szczególnym, jeśli warunkowy zbiór informacyjny spełnia odpowiednie warunki symetrii, kolejność rzutowania i wyznaczania środka ciężkości może być zamieniona. Wystarczy zatem wyznaczyć środek ciężkości niskowymiarowego warunkowego zbioru stanów będącego rzutem ortogonalnym warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu.

Dodatkowo w świetle wyników przedstawionych w pracy dla przypadku modelu liniowego wystarczy wyznaczać środki ciężkości tzw. swobodnych zbiorów informacyjnych odpowiadających zerowym wartościom sterowań.

Nawiązując do literatury dotyczącej zbiorowego modelu niepewności

warto zauważyć, że wymieniony warunek nie był zauważany. Przenosząc intuicyjnie wyniki teorii sterowania stochastycznie optymalnego starano się wyznaczać zbiory możliwych stanów [8], [13], [36], [40], [47], [52], [53].

Powracając do analogii z wynikami sterowania stochastycznie optymalnego przypomnijmy, że w problemie LQG problem wyznaczania warunkowej oceny stanu może być parametryzowany i prowadzony rekurencyjnie (filtr Kalmana). Stąd w przypadku ograniczonego modelu niepewności poszukiwano parametryzacji zbiorów prowadzącej do wyników o podobnym charakterze. Przykładowo w monografii [53] zakłada się elipsoidalne zbiory $X_1$, $W_k$, $V_k$, $k\in H=1,\ldots,N$, określające możliwe wartości warunku początkowego oraz zakłóceń w równaniu stanu i równaniu wyjścia. Niestety, ponieważ suma Minkowskiego zbiorów elipsoidalnych nie jest zbiorem elipsoidalnym, konieczne jest w tym podejściu wprowadzenie aproksymacji i operowanie rozwiązaniami przybliżonymi.

W pracy pokazuje się, że dopiero założenie elipsoidalności zbioru łącznego o elementach $(x_1, w_1, \ldots, w_N, v_1, \ldots, v_N)$ oraz konsekwentne operowanie liniowymi przekształceniami, przekrojami i rzutami ortogonalnymi tego zbioru pozwala na parametryzację procesu wyznaczania środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego i przedstawienie go w postaci rekurencyjnej.

Jeżeli omówione warunki symetrii, dotyczące zbioru $R_1$ nie są spełnione, technika przestrzeni stanu nie jest efektywna i stosowane powinny być zbiory informacyjne typu S.

Zbiory informacyjne typu T i związane z nimi tzw. zbiory zmiennych zgodnych z pomiarami pozwalają na formułowanie problemów syntezy prawa sterowania w przypadku nieklasycznej struktury informacyjnej, jak również na nową interpretację istoty tej struktury przez wprowadzenie tzw. ograniczeń informacyjnych.

Przedstawiona w pracy oryginalna metoda syntezy prawa sterowania w warunkach niepewnosci ograniczonej, oparta na przekształceniach i własnosciach zbiorow informacyjnych, pozwala na uzyskanie wyników pojęciowo równoważnych uzyskanym w teorii sterowania stochastycznie optymalnego [1], [54], [23], [24], [59], [60], [61].

Modelowi niepewnosci ograniczonej można przyporządkowac równoważne modele niepewnosci losowej. Najprostszy jest rozkład równomierny na zbiorze Y. Możliwe są również inne rozkłady spełniające odpowiednie warunki symetrii. Z tego względu do rozważan przedstawionych w pracy wprowadzono liczbowe czynniki normalizujące, co pozwala na odnoszenie uzyskanych wyników do rezultatow problemu sterowania stochastycznie optymalnego.

Zaletą podejscia przyjętego w pracy jest jawne uwzględnienie istniejacych ograniczen na realizacje oraz wyeliminowanie funkcji gęstosci, co pozwoliło na uzyskanie bardziej szczegółowych wyników.

Przedstawiona metoda jest kompletna, definicje i własnosci zbiorow informacyjnych łącznie z rozwiazaniami przykładowych problemow zamieszczonymi w rozdziale 6 i ich dowodami tworzą całosc. Nie ma potrzeby odwoływania sie do pojęc "zewnętrznych". Jednoczesnie sama metoda, jak i postac uzyskanych wynikow jest prosta, co pozwala na ich bezpośrednią implementacje numeryczną.

## 3. Przegląd zawartosci pracy

Ogólnie praca składa sie z wprowadzenia, szesciu rozdziałow i zakonczenia. Wyniki o bezposrednim znaczeniu aplikacyjnym, z ktorych każdy stanowi odrębną całosc, przedstawione są w rozdziale 6. Odwoływania sie do wczesniejszych rozdziałow pracy wymagają jedynie dowody tych wynikow. Wyniki o znaczeniu poznawczym zamieszczone są w rozdziałach 2-5. Rozdział 5 zawiera niekonwencjonalną interpretacje problemu syntezy praw sterowania

zgodną z treścią rozdziałów 2-4. Rozdział 1 poświęcony jest uporządkowaniu pewnych problemów pomocniczych.

Przechodząc do szczegółowego omówienia treści pracy mamy:

W rozdziale 1 przedstawiono wybrane pojęcia występujące w sformułowaniu problemu syntezy praw sterowania. Ze względu na ograniczoną objętość pracy ograniczono się do problemu renumeracji pozwalającej na jednolite traktowanie tzw. modeli 1D i MD, problemu modeli bezpośrednich oraz problemów wzajemnie równoważnych praw sterowania, a w szczególności warunków równoważności dla bezpośredniego prawa sterowania.

W rozdziałach 2-4 przedstawiono definicje i własności tzw. zbiorów informacyjnych wykorzystywanych w syntezie praw sterowania. W zakresie zbioru $\mathbb{T}$ (rozdział 2) przedstawiono zbiory zmiennych zgodnych z pomiarem oraz rodziny tych zbiorów określone przez formy różniczkowe Pfaffa lub równoważne układy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Odpowiednio do tematu pracy szczególną uwagę zwrócono na określenie warunków niezależności wspomianych form różniczkowych od praw sterowania lub ich gradientów. Wykorzystując różniczkową postać zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami określono tzw. różniczkowe ograniczenia informacyjne będące warunkami równoważności klasycznych i bezpośrednich praw sterowania.

Zbiory informacyjne typu $S_k$ $R_k$ $k\in H$ omawiane są kolejno w rozdziałach 3, 4. Dla każdego z wymienionych typów zbioru podaje się jego definicje i podstawowe własności. Jedną z nich jest słuszna w przypadku modelu liniowego inwariantność miary Lebesgue'a wymienionych zbiorów względem praw sterowania.

Dla zbiorów typu S zastosowano parametryzację odpowiadającą zbiorom wielościennym. Jeżeli zbiór $\mathbb{T}$, charakteryzujący łącznie warunek początkowy $x_1$ zakłócenia $w_1,\ldots,w_N$ w równaniu stanu, błędy pomiarowe $v_1,\ldots,v_N$ w równaniu wyjścia jest wielościenny (naprzykład kostka), to również

wielościenne są zbiory informacyjne oraz warunkowe zbiory informacyjne. Środek ciężkości wielościennego warunkowego zbioru informacyjnego można przedstawić w postaci analitycznej funkcji jego wierzchołków, a w konsekwencji w funkcji wartości pomiarów. W pracy wykorzystano w tym celu podział symplicjalny zbioru wielościennego (kompleksu komórkowego). Zamieszczono obszerne przykłady ilustrujące wyznaczanie środka ciężkości zbiorów wielościennych i jego zależność od pomiarów.

Dla zbiorów typu R zastosowano parametryzację odpowiadającą zbiorom elipsoidalnym. Jeżeli zbiór T, charakteryzujący łącznie warunek początkowy $x_1$ zakłócenia $w_1,\ldots,w_N$ w równaniu stanu, błędy pomiarowe $v_1,\ldots,v_N$ w równaniu wyjścia jest elipsoidalny, to również elipsoidalne są: zbiory informacyjne, warunkowe zbiory informacyjne oraz ich rzuty ortogonalne na podprzestrzeń zmiennych stanu. W pracy zbiory elipsoidalne parametryzowane są przez środek ciężkości i dodatnio określoną macierz odpowiedniej formy kwadratowej. Dla zbiorów informacyjnych i warunkowych zbiorów informacyjnych przedstawiono zależność ich parametrów od parametrów zbioru T, modelu obiektu oraz ciągu zrealizowanych obserwacji. Elipsoidalne warunkowe zbiory informacyjne posiadają własność symetrii pozwalającą na operowanie ich rzutami ortogonalnymi na podprzestrzeń zmiennych stanu. Rzuty te są warunkowymi zbiorami stanów. Zakładając dodatkowo szczególną, blokowo diagonalną postać macierzy określającej zbiór T uzyskano zależności rekurencyjne pomiędzy parametrami warunkowych zbiorów stanów. Otrzymane zależności posiadają strukturę analogiczną do równań filtru Kalmana.

Rozdział 5 zawiera ogólną geometryczną interpretację problemu syntezy praw sterowania. Podstawą wyboru optymalnego prawa sterowania jest porządek w rodzinie obrazów zbioru T, danego jako informacja a priori przez zależne od praw sterowania odwzorowanie podstawowe.

Rozdział 6 zawiera zbiór przykładowych problemów syntezy praw sterowania, których rozwiązania analityczne znaleziono wykorzystując metodę

zbiorów informacyjnych. W przypadku zbiorów typu R polega ona na przekształceniu dla każdego $k \in H$ zbioru T danego w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ w zbiór $R_k$, dany dla $k \in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_k, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. Dzięki temu zadanie minimalizacji względem funkcji $u_k(z^k)$, $k \in H$ może być sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości $z^k$, $k \in H$.

Ustalonej wartości $z^k$ odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $R_k|z^k$. Niezależność "kształtu" tego zbioru od sterowań $u^{k-1}$ jest podstawową własnością umożliwiającą otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego.

Podobne postępowanie stosuje się wykorzystując zbiory informacyjne typu S. Różnica polega na tym, że zbiór T dany w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ przekształca się w zbiór $S_k$, dany dla $k \in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_1, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. Nie wprowadza się zatem zmiennej $x_k$ reprezentującej aktualny stan układu, bowiem ze względu na brak wymaganej symetrii zbiór $X_k$ nie stanowi informacji wystarczającej dla sterowania. Dalszy przebieg syntezy jest analogiczny jak dla zbiorów typu R.

Wykorzystując zbiory informacyje typu T i związane z nimi ograniczenia informacyjne sformułowano zadanie syntezy praw sterowania dla dowolnej struktury informacyjnej oraz pokazano przyczynę powodującą, że w przypadku klasycznej struktury informacyjnej problem syntezy praw sterowania przy wykorzystaniu modelu bezpośredniego dekomponuje się na odpowiednią liczbę wzajemnie niezależnych problemów statycznych [29]. Dla odpowiednika kontrprzykładu Witsenhausena sformułowanego przy ograniczonym modelu niepewności pokazano dlaczego pomimo liniowych równań stanu i kwadratowego wskaźnika jakości nieliniowe prawa sterowania mogą być lepsze od liniowych.

Podsumowując można stwierdzić, że w pracy przedstawiono elementy pozwalające na konstruowanie rozwiązań szerokiej klasy problemów syntezy praw

sterowania. Przykładowo kilka przedstawiono w rozdziale 6. Dwa z nich wykorzystujące model w zmiennych stanu lub model bezpośredni przy założeniu klasycznej struktury informacyjnej prowadzą do praw sterowania o postaciach analitycznych. Jako pomocniczy występuje w tych wątkach problem wyznaczania środka ciężkości opowiedniego informacyjnego zbioru warunkowego.

Przyjęta koncepcja układu pracy powoduje pewne trudności w jej odbiorze, przykładowo czytając rozdziały 1-4 czytelnik nie wie jak zostaną wykorzystane "praktycznie" przedstawiane w tych rozdziałach liczne definicje i twierdzenia. Jednym z uzasadnień takiej koncepcji może być to, że już po zakończeniu pisania pracy udało się, wykorzystując jedynie rozdziały 1-4, uzyskać analityczne rozwiązanie problemów syntezy maksyminowych praw sterowania.

Własności przedstawione w rozdziałach 2-4 można ocenić również z poznawczego punktu widzenia, przykładem są tu tzw. ograniczenia informacyjne które w zakresie przedstawionym w pracy nie dają jeszcze wprawdzie możliwości rozwiązywania problemów z nieklasyczną strukturą informacyjną, pozwalają jednak na jej nową intrpretację.

# Rozdział 1

# ZAGADNIENIA POMOCNICZE

*Model sterowanego obiektu, charakterystyka zmiennych niepewnych, typ praw sterowania, struktura informacyjna i cel sterowania są pojęciami podstawowymi w problemie syntezy praw sterowania. Konwencjonalnie w przestrzeni realizacji rozróżnia się modele ID i MD zapisane w przestrzeni stanu lub jako modele bezpośrednie. Modele typu MD przez odpowiednią renumerację argumentu mogą być sprowadzone do modeli ID. Prawa sterowania są funkcjami dostępnej informacji pomiarowej, jednak dla potrzeb syntezy przydatne są pomocnicze prawa sterowania, będące funkcją przetworzonej informacji pomiarowej. Prawa sterowania wraz z modelem tworzą tzw. strukturę informacyjną, której typ decyduje o stopniu trudności problemu syntezy. Cel sterowania wprowadza relację porządku w zbiorze praw sterowania i umożliwia wybór najlepszego.*

## 1. Wyróżnione argumenty i funkcje

Niech $\mathbb{I}=\{1,2,\dots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych zaś $\mathbb{I}^M=\mathbb{I}\times\dots\times\mathbb{I}$ iloczynem kartezjańskim M egzemplarzy zbioru $\mathbb{I}$.

Skończenie elementowe zbiory $H_t\subset\mathbb{I}^{M_1}$, $H_u\subset\mathbb{I}^{M_2}$, $H_z\subset\mathbb{I}^{M_3}$, nazywamy odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów. Ich elementami są ciągi: $i_1=(i_1,\dots i_{M_1})$, $i_2=(i_1,\dots i_{M_2})$, $i_3=(i_1,\dots i_{M_3})$.

W pracy wyróżniamy dodatkowo podzbiory $\mathbb{D}_t \subset \mathbb{H}_t$, $\mathbb{D}_u \subset \mathbb{H}_u$, $\mathbb{D}_z \subset \mathbb{H}_z$ oraz rodzinę zbiorów $\mathbb{D}_z$ oznaczoną przez $\mathcal{H}_z$.

Na zbiorach $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$ określone są funkcje (ciągi) rozpatrywane w pracy. Podstawowymi są:

Zmienne niepewne

$t: \mathbb{H}_t \to R^q$

Sterowanie

$u: \mathbb{H}_u \to R^m$

Pomiary

$z: \mathbb{H}_z \to R^p$

Zauważmy, że ogólnie funkcja (ciąg) $f: \mathbb{H} \to R^n$ określona na skończenie elementowym zbiorze $H \subset \mathbb{H}^M$ może być przedstawiona w postaci wektora blokowego, w którym n wymiarowe składowe blokowe odpowiadają wartościom funkcji (ciągu) dla kolejnych (według ustalonego porządku) argumentów wybieranych ze zbioru $\mathbb{H}$.

Odpowiednio do powyższej uwagi w pracy stosuje się zapisy

$f_{\mathbb{D}}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}$, przy ustalonym porządku w zbiorze $\mathbb{D}$,

$f_{\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$ gdzie z założenia $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{H}$, oraz $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2$. Porządek w zbiorze $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$ jest ustalony.

W szczególnym przypadku, gdy M=1, stosuje się równoważne zapisy:

$f^k = (f'_1, \ldots, f'_k)$,

$f^{k \setminus l} = (f'_{l+1}, \ldots, f'_k)$ , $k > 1$.

W tym samym przypadku i przy założeniu $\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_u = \mathbb{H}_z = \mathbb{H} = \{1, \ldots, N\}$ wyróżnia się dodatkowo następujące funkcje (ciągi):

Warunek początkowy

$b: \{1\} \to R^n$

Stan

$x: \mathbb{H} \to R^n$

Zakłocenie w równaniu stanu

$w: \mathbb{H} \to R^n$

Zakłócenie pomiarowe

$v: \mathbb{H} \to R^p$

Wielowymiarowy argument dyskretny w powiązaniu z wektorową postacią funkcji (ciągów) t, u, z opisuje przejrzyście realne problemy sterowania oraz podejmowania decyzji. Przykładowo w dwupoziomowym problemie decyzyjnym wygodnie jest "numerować" poszczególne decyzje parami liczb, z których pierwsza oznacza numer poziomu decyzyjnego, druga zaś dyskretną chwilę czasu. Decyzja przyporządkowana określonej powyżej parze liczb może być wektorem m-wymiarowym.

W rozważaniach teoretycznych, a szczególnie w zapisach operowanie wielowymiarowym argumentem dyskretnym w powiązaniu z wektorową strukturą funkcji nie jest wygodne. Z tego względu wprowadzamy procedurę renumeracji dotycząca zarówno wielowymiarowego argumentu, jak i funkcji wektorowych.

Ilustruje ją następujący przykład:

Problem oryginalny

Horyzont

$\mathbb{H}=\{(1,1),(1,2)\}$.

Funkcja określona na zbiorze $\mathbb{H}$ ma postać:

$f: \mathbb{H} \to R^2$

$f_{1,(1,1)}$ $f_{1,(1,2)}$

$f_{2,(1,1)}$ $f_{2,(1,2)}$

Problem po renumeracji

Horyzont

$\mathbb{H}=\{1,2,3,4\}$

Funkcja określona na zbiorze $H_{re}$ ma postać:

$$f_{re}: H_{re} \to R$$

$$f_{re,1} = f_{1,(1,1)} \qquad f_{re,2} = f_{1,(1,2)}$$

$$f_{re,3} = f_{2,(1,1)} \qquad f_{re,4} = f_{2,(1,2)}.$$

Ogólnie niech $f: H \to R^n$ będzie daną funkcją określoną na skończenie elementowym zbiorze $H \subset I^M$, zaś $\nu: \{1,\ldots,n\} \times H \to I$ będzie danym odwzorowaniem renumeracji.

Oznaczmy

$$\nu(\{1,\ldots,n\} \times H) = \{1,\ldots,N\} = H_{re}$$

$$\nu(i,(j_1,\ldots,j_n)) = k \in \{1,\ldots,N\}.$$

Funkcja $f_{re}: H_{re} \to R$ otrzymana w wyniku renumeracji określona jest:

$$f_k = f_{i,(j_1,\ldots,j_n)},$$

gdzie: $k \in \{1,\ldots,N\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $(j_1,\ldots,j_n) \in H$.

W dalszej części pracy nie będziemy rozróżniać horyzontów i funkcji pierwotnych od tych, które zostały otrzymane w wyniku renumeracji.

## 2. Modele układów dynamicznych

Dyskretny liniowy i stacjonarny model dynamiczny zapisany w przestrzeni stanu ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, & x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

$$k \in H = \{1,\ldots,N\},$$

$$x_k, w_k \in R^n, \quad u_k \in R^m, \quad z_k, v_k \in R^p,$$

$$A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times m}, \quad C \in R^{p \times n}.$$

Model (1) nazywamy wymuszonym, mając na uwadze składnik $Bu_k$ występujący w

prawej stronie rownań stanu. Modelowi (1) odpowiada model swobodny o postaci:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $k \in H = \{1, \ldots, N\}$,

$x_{ok}, w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_{ok}, v_k \in R^p$,

$A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$.

W przypadku modeli (1), (2) założenie stacjonarności ma tylko na celu uproszczenie zapisów i wszystkie rozważania można powtórzyć dla modeli liniowych niestacjonarnych.

Dyskretny liniowy i stacjonarny model dynamiczny zapisany w postaci bezposredniej ma formę:

$$z_k = h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}), \tag{3}$$

gdzie:

$k \in H_z$

$t_{D_{tk}} = (t_i : i \in D_{tk} \subset H_t,\ t_i \in R^q)$

$u_{D_{uk}} = (u_i : i \in D_{uk} \subset H_u,\ u_i \in R^m)$

$z_k \in R^p$.

Ten sam model po renumeracji wektorowego argumentu i funkcji wektorowych może byc zapisany w postaci:

$$z_k = h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}), \tag{4}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots N_3\}$

$t_{D_{tk}} = (t_i : i \in D_{tk} \subset H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R)$

$u_{D_{uk}} = (u_i : i \in D_{uk} \subset H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R)$

$z_k \in R$.

W pracy stosuje się rownież uproszczone zapisy bezposredniego modelu dynamicznego w postaci:

$$z_k = \bar{h}_k(t,u), \tag{5}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1,\dots N_3\}$

$t = t_{H_t} = (t_i : i \in H_t = \{1,\dots,N_1\},\ t_i \in R)$

$u = u_{H_u} = (u_i : i \in H_u = \{1,\dots,N_2\},\ u_i \in R)$

$z_k \in R.$

$\bar{h}_k(t,u)$ jest funkcją stałą względem zmiennych $t_{H_t \setminus D_{tk}}$, $u_{H_u \setminus D_{uk}}$ równą $h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{uk}})$.

Modele bezpośrednie (3), (4) nazywamy modelami wymuszonymi; odpowiadające im modele swobodne otrzymujemy podstawiając $u_{D_{uk}} = 0$.

## 3. Prawo sterowania

Definicja 1 Niech

i) $H_u = \{1,\dots,N_2\}$, $H_z = \{1,\dots,N_3\}$ będą odpowiednio horyzontami sterowań i pomiarów, $\mathbb{D}_u$, $\mathbb{D}_z$ ich podzbiorami, zaś $\mathcal{H}_z$ rodziną podzbiorów $\mathbb{D}_z$,

ii) $\gamma : H_z \to \mathcal{H}_z$ będzie przyporządkowaniem informacyjnym,

iii) $z_i = h_i(t, u_{D_u})$

$z_{oi} = h_{oi}(t)$,

gdzie $i \in H_z$ będą odpowiednio wymuszonym i swobodnym modelem bezpośrednim.

Funkcje

i) $u_i = u_i(z_{\gamma(i)})$, $i \in H_u$

nazywamy i-tym prawem sterowania.

ii) $u_i = u_{oi}(z_{o,\gamma(i)})$, $i \in H_u$

nazywamy i-tym nieaktywnym prawem sterowania,

iii) $q_i = q_i(z_{\gamma a(i)}) = \sum_{j=1}^{i} a_j u_j(z_{\gamma(j)})$, $i \in H_u$,

gdzie $\gamma_a(i)=\bigcup_{j=1}^{i}\gamma(i)$, nazywamy i-tym addytywnie zagregowanym prawem sterowania,

iv) $q_i=q_{oi}(z_{o,\gamma_a(i)})=\sum_{j=1}^{i}a_j u_{oj}(z_{o,\gamma(j)})$, $i\in H_u$,

gdzie $\gamma_a(i)$ jest określone jak w punkcie iii), nazywamy i-tym addytywnie zagregowanym prawem sterowania.

Jeżeli w szczególności przyporządkowanie informacyjne $\gamma$ jest takie, że

$$\gamma(i)=\{1,\ldots,i\}\subseteq H_z,\quad i\in H_u$$

oraz model bezpośredni może być zapisany w postaci:

$$z_i=h_i(t,u^{i-1}),$$

to prawa sterowania wymienione w punktach i)-iv) przyjmują postacie:

$$u_i=u_i(z^i),\quad i\in H_u$$

$$u_i=u_{oi}(z_o^i),\quad i\in H_u$$

$$q_i=q_i(z^i)=\sum_{j=1}^{i}a_j u_j(z^j),\quad i\in H_u$$

$$q_i=q_{oi}(z_o^i)=\sum_{j=1}^{i}a_j u_{oj}(z_o^j),\quad i\in H_u.$$

Jeżeli bezpośrednie modele dynamiczne, odpowiednio wymuszony i swobodny mają postacie:

$$z_j=h_{oj}(t)+p_j(u^{j-1}),\quad p_j(0)=0,\quad j\in H_z,$$

$$z_{oj}=h_{oj}(t),$$

to dla każdego $i\in H_u$ pomiędzy prawami sterowania $u_i(z^i)$, $u_{oi}(z_o^i)$ zachodzą związki

$$u_{oi}(z_o^i)=u_{oi}(z^i-\underline{d}_i(z^{i-1}))=u_i(z^i),\qquad(6)$$

$$u_i(z^i)=u_i(z_o^i+\underline{c}_i(z^{i-1}))=u_{oi}(z_o^i).\qquad(7)$$

Bezpośrednio z postaci modelu, założenia $p_j(0)=0$ dla $j\in H_z$ oraz postaci praw sterowania $u_k(z^k)$, $k\in H_u$ mamy:

$$z_{oj}=z_j-p_j(u_1(z^1),\ldots,u_{j-1}(z^{j-1}))$$

$$z_{oj}=z_j-d_j(z^{j-1}),$$

dla $j \in H_z$. Rozpisując jawnie $z_o^1$ uporządkowany do postaci wektora blokowego otrzymujemy:

$$z_{o1} = z_1$$

$$z_{o2} = z_2 - d_2(z^1)$$

.....

$$z_{oi} = z_i - d_i(z^{i-1})$$

lub w zapisie zwartym:

$$z_o^1 = z^1 - \underline{d}_1(z^{i-1}),$$

co po podstawieniu do $u_{oi}(z_o^1)$ w miejsce $z_o^1$ uzasadnia (6). Dla uzasadnienia (7) podstawiamy za $z^1$ w wyrażeniu na $u_i(z^1)$ uporządkowane do odpowiednich wektorów blokowych postacie

$$z_j = z_{oj} + p_j(u_{o1}(z_o^1), \ldots, u_{o,j-1}(z_o^{j-1}))$$

$$z_j = z_{oj} + c_j(z_o^{j-1}).$$

Jeżeli swobodny i wymuszony model dynamiczny dane są w zmiennych stanu w postaciach:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k & , x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k & k \in H \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k & , x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k & k \in H, \end{cases}$$

to dla każdego $k \in H$ pomiędzy prawami sterowania $u_i(z^1)$, $q_i(z_o^1)$ zachodzą związki:

$$u_{oi}(z_o^1) = u_{oi}(z^1 - C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_j(z^j)) = u_i(z^1), \tag{8}$$

$$u_i(z^1) = u_i(z_o^1 + C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_{oj}(z_o^j)) = u_{oi}(z_o^1). \tag{9}$$

Wykorzystując zależności

$$z^1 - C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_j(z^j) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - C\,Bu_1(z^1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_i - C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_j(z^j) \end{bmatrix}$$

podobnie

$$z_o^i - C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_{oj}(z_o^j) = \begin{bmatrix} z_{o1} \\ z_{o2} - C\,Bu_{o1}(z_o^1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{oi} - C\sum_{j=1}^{i-1} A^{i-1-j} B\, u_{oj}(z_o^j) \end{bmatrix}$$

otrzymujemy uzasadnienie związków (8), (9).

W charakterze dodatkowego komentarza rozpatrzmy następujący schemat. W chwili k=1 funkcje $u_1(z_1)$, $u_{o1}(z_{o1})$ są identyczne ponieważ $z_1=z_{o1}$. Załóżmy , że w chwili k-tej dane są funkcje $u_i(z^i)$, $u_{oi}(z_o^i)$, i=1,...,k. Jeżeli w chwili k+1 dana jest funkcja $u_{k+1}(z^{k+1})$ to rownoważna jej funkcję $u_{o,k+1}(z_o^{k+1})$ wyznaczamy następująco:

$$u_{o,k+1}(z_o^{k+1}) = u_{k+1}(z_o^{k+1} + C\sum_{i=1}^{k} A^{k-1} B\, u_{oi}(z_o^i))$$

Jeżeli natomiast w chwili k+1 dana jest funkcja $u_{o,k+1}(z_o^{k+1})$, to rownoważną jej funkcję $u_{k+1}(z^{k+1})$ wyznaczamy:

$$u_{k+1}(z^{k+1}) = u_{ok+1}(z^{k+1} - C\sum_{i=1}^{k} A^{k-1} B\, u_i(z^i)).$$

Jeżeli prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i\in H_u$ wraz z modelem bezpośrednim

$$z_j = h_{oj}(t) + P\, u^{j-1},\quad j\in H_z$$

tworzą zawierającą się strukturę informacyjną, to prawa sterowania

$$\begin{bmatrix} q_1(z^1) \\ \vdots \\ q_{N_2}(z^{N_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_2 1} & \cdots & a_{N_2 N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z^1) \\ \vdots \\ u_{N_2}(z^{N_2}) \end{bmatrix},$$

gdzie $A=[a_{ij}]$ jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną, tworzą również zawierającą się strukturę informacyjną z modelem bezpośrednim

$$z_j = h_{oj}(t) + P\, A^{-1} u^{j-1},\quad j\in H_z.$$

Słuszność powyższego stwierdzenia wynika z faktu, że trójkątna dolna macierz agregacji nie zmienia uporządkowania decydującego o strukturze informacyjnej.

Definicja 2. Niech $H_t=\{1,\ldots,N_1\}$, $H_u=\{1,\ldots,N_2\}$ będą odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych i sterowań. Funkcję $g_i=g_i(t)$ nazywamy i-tym bezpośrednim prawem sterowania.

Niech $t'=(t'_1,t'_2)$ będzie segmentacją wektora t taką, że dim $t_1$=r, dim $t_2=N_1-r$.

Układ funkcji skalarnych (dla uproszczenia pomijamy dalej indeks $i\in H_u$ określający numer bezpośredniego prawa sterowania)

$$g(t'_1,t'_2)$$
$$z_1(t'_1,t'_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$z_r(t'_1,t'_2)$$

z których każda określona jest w zbiorze $T\subset R^{N_1}$ i posiada w nim ciągłe pochodne do rzędu drugiego włącznie, jest funkcjonalnie zależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$J=\left[\begin{array}{c|c} \partial g_1/\partial t_{11} \ldots \partial g_1/\partial t_{1r} & \partial g_1/\partial t_{2,r+1}\ldots\partial g_1/\partial t_{2,N_1} \\ \hline \partial z_1/\partial t_{11} \ldots \partial z_1/\partial t_{1r} & \partial z_1/\partial t_{2,r+1}\ldots\partial z_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{11} \ldots \partial z_r/\partial t_{1r} & \partial z_r/\partial t_{2,r+1}\ldots\partial z_r/\partial t_{2,N_1} \end{array}\right] \qquad (10)$$

w każdym punkcie $(t'_1,t'_2)\in T$ posiada rząd nie wyższy niż r. Oznaczmy:

$$B_1(t)=[\partial g_1/\partial t_{11} \ldots \partial g_1/\partial t_{1r}],$$

$$B_2(t)=[\partial g_1/\partial t_{2,r+1}\ldots\partial g_1/\partial t_{2,N_1}],$$

$$A_1(t)=\left[\begin{array}{ccc} \partial z_1/\partial t_{11} & \ldots & \partial z_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{11} & \ldots & \partial z_r/\partial t_{1r} \end{array}\right],$$

$$A_2(t)=\left[\begin{array}{ccc} \partial z_1/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial z_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial z_r/\partial t_{2,N_1} \end{array}\right].$$

Macierze $A_1(t)$, $A_2(t)$ wyznaczane są na podstawie funkcji

$$z_i=z_i(t),\ i=1,\ldots,r.$$

Zauważmy, że te same macierze mogą być wyznaczone również na podstawie funkcji

$$z_i=h_i(t,g(t)),\ i=1,\ldots,r,$$

gdzie $g(t)$ jest funkcją wektorową tj $g(t)=[g_1(t),\ldots,g_{N_2}(t)]$. Mamy zatem

$$A_1(t)=H_1(t)+F(t)G_1(t), \tag{11}$$

$$A_2(t)=H_2(t)+F(t)G_2(t), \tag{12}$$

gdzie:

$$H_1(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{11} & \ldots & \partial h_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{11} & \ldots & \partial h_r/\partial t_{1r} \end{bmatrix},$$

$$H_2(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial h_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial h_r/\partial t_{2,N_1} \end{bmatrix},$$

$$F(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial g_1 & \ldots & \partial h_1/\partial g_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial g_1 & \ldots & \partial h_r/\partial g_{N_2} \end{bmatrix},$$

$$G_1(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_{11} & \ldots & \partial g_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_{11} & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_{1r} \end{bmatrix},$$

$$G_2(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial g_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_{2,r+1} & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_{2,N_1} \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia można przepisać macierz J w postaci:

$$J=\left[\begin{array}{c|c} B_1(t) & B_2(t) \\ \hline A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Zakładamy, że pomiary $z_i(t)$, $i=1,\ldots r$ tworzą układ funkcjonalnie niezależny, zatem rząd macierzy $A(t)=[A_1(t)\ A_2(t)]$ wynosi r oraz, że r

pierwszych kolumn tej macierzy tworzy układ liniowo niezależny. Inaczej zakładamy, że dla każdego $t\in T$ rząd macierzy $A_1(t)$ jest równy r.

Na to, by rząd macierzy J był również r, wystarczy zapewnić wobec powyższego, by wyznacznik każdej macierzy uzyskanej przez dopisanie do macierzy

$$\begin{bmatrix} B_1(t) \\ \hline A_1(t) \end{bmatrix}$$

dowolnej kolumny

$$\begin{bmatrix} B_{2j}(t) \\ \hline A_{2j}(t) \end{bmatrix}, \quad j=r+1,\ldots,N_1$$

był rowny zeru. Wykorzystując wzór na wyznacznik macierzy blokowej otrzymujemy warunek:

$$\det(B_{2j}(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t))\det A_1(t)=0, \quad j=r+1,\ldots,N_1.$$

Ponieważ z założenia $\det A_1(t)\neq 0$ oraz $B_{2j}(t)$ jest funkcją skalarną, to otrzymany warunek upraszcza się do postaci:

$$B_{2j}(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0, \quad j=r+1,\ldots,N_1.$$

Zauważmy, że powyższy układ warunków można zapisac łącznie w następującej postaci macierzowej:

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0. \tag{13}$$

Uwzględniając dodatkowo wyrażenia (11), (12) dla macierzy $A_1(t)$, $A_2(t)$ otrzymujemy:

$$B_2(t)-B_1(t)(H_1(t) + F(t)\,G_1(t))^{-1}(H_2(t) + F(t)\,G_2(t))=0. \tag{14}$$

Warunek (13) lub (14) zapewnia, że i-te bezpośrednie prawo sterowania $g_1(t)$ jest funkcjonalnie zależne od pomiarów $z_D=(z_1,\ldots,z_r)$ przyporządkowanych mu przez odwzorowanie $\gamma$, tj $\gamma(1)=D$. Warunek (14) jest tożsamy z różniczkowym ograniczeniem informacyjnym odpowiadającym prawu sterowania $g_1$ (patrz rozdział 2 p.3).

# Rozdział 2

# ZBIÓR INFORMACYJNY T

*Zbiór T dany jako informacja a priori określa łącznie możliwe wartości zmiennych niepewnych występujących w problemie. Ogólnie wymaga się by zbiór T był całkowalny w sensie Lebesgue'a.*

*Zbiór T może być przedstawiony w postaci sumy zbiorów zgodnych z pomiarami. W przypadku modelu liniowego rodzina zbiorów zgodnych z pomiarami jest niezależna od praw sterowania.*

## 1. Zbiory zmiennych zgodnych z pomiarami

Niech $H_t=\{1,\ldots,N_1\}$, $H_u=\{1,\ldots,N_2\}$, $H_z=\{1,\ldots,N_3\}$ będą horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów, zaś $D_t$, $D_u$, $D_z$ dowolnymi podzbiorami zbiorów $H_t$, $H_u$, $H_z$, które w przypadku ogólnym są wynikiem renumeracji problemu pierwotnego (patrz rozdział 1).

Model bezpośredni ma postać:

$$z_i=\bar{h}_i(t_{D_t},u_{D_u}), \qquad D_t\subset H_t,\ D_u\subset H_u,\ i\in H_z.$$

Dalej dla uproszczenia notacji model powyższy zapisywany będzie w postaci

$$z_i=h_i(t,u), \quad i\in H_z, \tag{1}$$

gdzie:

$$t'=[t_1,\ldots,t_{N_1}],$$

$$u'=[u_1,\ldots,u_{N_2}].$$

Niech $D=\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq H_z$, $r<N_1$ będzie danym zbiorem. Układ

$$\begin{cases} z_{i_1}=h_{i_1}(t,u) \\ \ldots\ldots\ldots \\ z_{i_r}=h_{i_r}(t,u) \end{cases}$$

zapisywać będziemy w postaci uproszczonej

$$z_D=h(t,u), \tag{2}$$

gdzie $h(t,u)$ jest funkcją wektorową o składowych $h_j$, $j=1,\ldots,r$.

Definicja 1. Niech dla $D=\{i_1,\ldots i_r\}\subseteq H_z$, $r<N_1$ będzie określona funkcja

$$z_D=h(t,g(t))=z(t),$$

i) zbiór $P=z(T)$ nazywamy zbiorem pomiarów zgodnych ze zbiorem informacyjnym $T$,

ii) zbiór $C|z_D=z^{-1}(z_D)$ nazywamy zbiorem zmiennych zgodnych z pomiarami $z_D$,

iii) zbiór $T|z_D=T\cap(C|z_D)$ nazywamy zbiorem zmiennych zgodnych z pomiarami $z_D$ i zbiorem informacyjnym $T$,

iv) zbiór $\mathcal{C}|D=\{C|z_D: z_D\in P_D\}$ nazywamy rodziną zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami, których numery należą do zbioru $D$.

Zauważmy, że zbiór $C|z_D$ zależy zarówno od tego, które pomiary (określa to zbiór $D$) występują w $z_D$ jak również od tego, jakie są wartości liczbowe tych pomiarów. Rodzina zbiorów $\mathcal{C}|D$ zależy jedynie od zbioru $D$ określającego numery pomiarów występujących w $z_D$.

Dokonując następującej segmentacji wektora $t$,

$$t'_{1\times N_1}=[t'_{1\,1\times r}, t'_{2\,1\times(N_1-r)}]$$

możemy układ równań (2) przedstawić w postaci:

$$z_D=h(t_1,t_2,g(t_1,t_2)).$$

Ten sam układ rozwikłany względem grupy zmiennych zawartych w wektorze $t_1$ ma postać:

$$t_1 = e(t_2, z_D), \tag{3}$$

która jawnie określa elementy zbioru $\mathfrak{C}|z_D$. Traktując $z_D$ jako ustalony parametr i wybierając dowolnie $t_2$ określamy $t_1$ (jeśli istnieje) według zależności (3). Para $(t_1, t_2)$ stanowi element zbioru $\mathfrak{C}|z_D$.

Warunkiem istnienia postaci (3) w otoczeniu punktu $(t_{10}, t_{20})$ takiego, że $z_D = h(t_{10}, t_{20}, g(t_{10}, t_{20}))$, jest, by macierz pochodnych cząstkowych

$$\partial h/\partial t_1 = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{11}, \ldots, \partial h_1/\partial t_{1r} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{11}, \ldots, \partial h_r/\partial t_{1r} \end{bmatrix}$$

była w punkcie $(t_{10}, t_{20})$ nieosobliwa.

Obliczając różniczkę zupełną zmiennych $z_D$ odpowiednio do modelu (2) otrzymujemy:

$$dz_D = (\partial h/\partial t + (\partial h/\partial g)(\partial g/\partial t))dt, \tag{4}$$

gdzie:

$$\partial h/\partial t = h_t(t, g(t)) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial h_1/\partial t_1, \ldots, \partial h_1/\partial t_r & & & \partial h_1/\partial t_{r+1}, \ldots, \partial h_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial t_1, \ldots, \partial h_r/\partial t_r & & & \partial h_r/\partial t_{r+1}, \ldots, \partial h_r/\partial t_{N_1} \end{array}\right] =$$

$$= [H_1(t) \mid H_2(t)], \tag{5}$$

$$\partial h/\partial g = h_g(t, g(t)) = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial g_1, \ldots, \partial h_1/\partial g_{N_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial g_1, \ldots, \partial h_r/\partial g_{N_2} \end{bmatrix} = F(t), \tag{6}$$

$$\partial g/\partial t = g_t(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial g_1/\partial t_1, \ldots, \partial g_1/\partial t_r & & & \partial g_1/\partial t_{r+1}, \ldots, \partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1, \ldots, \partial g_{N_2}/\partial t_r & & & \partial g_{N_2}/\partial t_{r+1}, \ldots, \partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{array}\right] =$$

$$= [G_1(t) \mid G_2(t)]. \tag{7}$$

Ponieważ dla ustalonego pomiaru $z_D$, $dz_D \equiv 0$, to układ równań Pfaffa określający rodzinę $\mathfrak{C}|\mathfrak{D}$ ma postać:

$$(\partial h/\partial t+(\partial h/\partial g)(\partial g/\partial t))dt=0. \tag{8}$$

Wykorzystując wprowadzoną segmentację wektora t oraz oznaczenia odpowiednich macierzy pochodnych cząstkowych możemy rozpatrywany układ przedstawić w postaci:

$$H_1(t)dt_1+ H_2(t)dt_2+ F(t)G_1(t)dt_1+ F(t)G_2(t)dt_2=0,$$

$$(H_1(t) + F(t)G_1(t))dt_1+ (H_2(t) + F(t)G_2(t))dt_2=0. \tag{9}$$

Zakładając dodatkowo nieosobliwość dla każdego $t\in T$ macierzy $H_1(t)+F(t)G_1(t)$ możemy przekształcić układ (9) do postaci:

$$dt_1+ R(t)dt_2=0, \tag{10}$$

gdzie

$$R(t)=(H_1(t) + F(t)G_1(t))^{-1}(H_2(t) + F(t)G_2(t))=[r_{ij}(t)],$$

$$i=1,\ldots,r, \qquad j=1,\ldots,N_1-r.$$

lub do następującego równoważnego układu równań różniczkowych cząstkowych

$$\partial t_{1i}/\partial t_{2j}=-r_{ij}(t), \quad i=1,\ldots,r \ , \ j=1,\ldots,N_1-r \tag{11}$$

Jeżeli układ (10) jest w pełni całkowalny, to przez każdy punkt $(t_{10}, t_{20})$ przechodzi dokładnie jedna rozmaitość całkowa $N_1-r$ wymiarowa.

Związek pomiędzy ustalonym pomiarem $z_D$ a punktem $(t_{10}, t_{20})$ wynika z zależności:

$$z_D=h(t_{10}, t_{20}, g(t_{10}, t_{20})).$$

Inaczej każdemu $z_D\in P_D$ odpowiada dokładnie jeden element rodziny $\mathfrak{C}|D$.

Rozpatrując przypadki szczególne będziemy odróżniać swobodny model układu od modelu wymuszonego. Powodem takiego podejścia jest, że jak okaże się dalej, układy równań Pfaffa określające rodziny zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami mogą być dla tych modeli identyczne przy pewnych dodatkowych założeniach.

Przypadek 1

Swobodny liniowy model bezpośredni przy uwzględnieniu założeń z p.1 ma postać:

$$z_{oD}=H\,t \tag{12}$$

lub po dokonaniu segmentacji wektora t i macierzy H postać:

$$z_{oD}=H_1 t_1 + H_2 t_2. \tag{13}$$

Przypominając, że wektory $z_{oD}$, $t_1$ są r wymiarowe i zakładając nieosobliwość macierzy $H_1$ możemy układ (13) rozwikłać ze względu na $t_1$ otrzymując:

$$t_1=-H_1^{-1}H_2 t_2-H_1^{-1}z_{oD}. \tag{14}$$

Widzimy, że w rozpatrywanym przypadku zbiór $C|z_{oD}$ stanowi $N_1$-r wymiarowa podprzestrzeń $N_1$ wymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Przykładowo dla $N_1$=3 i r=1 zbiór $C|z_{oD}$ jest płaszczyzną, zaś dla r=2 i tej samej wartości $N_1$ reprezentuje go prosta. Uzmienniając parametr $z_{oD}$ otrzymujemy rodzinę $\mathfrak{C}|D$. W pierwszym przypadku ($N_1$=3, r=1) jej elementami są wzajemnie równoległe płaszczyzny, w drugim ($N_1$=3, r=2) wzajemnie równoległe proste.

Przyrównując do zera różniczkę $dz_{oD}$ wyznaczoną na podstawie modelu (13) otrzymujemy formę różniczkową określającą rodzinę $\mathfrak{C}|z_{oD}$.

$$dt_1 + H_1^{-1}H_2 dt =0 \tag{15}$$

Określenie elementu tej rodziny, tj zbioru $C|z_{oD}$ wymaga dodatkowo warunku o postaci $t_{10}=t_1(t_{20})$. Związek tego warunku z wartością $z_{oD}$ wynika bezpośrednio z zależności $z_{oD}=H_1 t_{10}+H_2 t_{20}$. W szczególności można przyjąć $t_{20}=0$ i wyznaczyć $t_{10}=H_1^{-1}z_{oD}$.

Przypadek 2

Swobodny nieliniowy model bezpośredni ma postać:

$$z_{oD}=h_o(t). \tag{16}$$

Zakładając jak w przypadku ogólnym wymiarowość dim $z_{oD}$=r i odpowiednio do tego dokonując segmentacji wektora $t'=[t_1', t_2']$, gdzie dim $t_1$=r, dim $t_2$=$N_1$-r

a następnie rozwikłując układ (16) względem zmiennych $t_1$ otrzymujemy zależność:

$$t_1 = e_o(t_2, z_{oD}), \tag{17}$$

określającą zbiór $\mathcal{C}|z_{oD}$.

Forma różniczkowa określająca rodzinę $\mathcal{C}|D$ ma postać:

$$(\partial h_o/\partial t)dt = 0, \tag{18}$$

gdzie

$$\partial h_o/\partial t = h_{ot}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial h_{o1}/\partial t_1 & \dots & \partial h_{o1}/\partial t_r & \partial h_{o1}/\partial t_{r+1} & \dots & \partial h_{o1}/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial h_{or}/\partial t_1 & \dots & \partial h_{or}/\partial t_r & \partial h_{or}/\partial t_{r+1} & \dots & \partial h_{or}/\partial t_{N_1} \end{array}\right] =$$

$$= [H_{o1}(t) \,\vdots\, H_{o2}(t)]. \tag{19}$$

Uwzględniając podział wektora t na wektory $t_1$, $t_2$ odpowiednio o wymiarach r oraz $N_1 - r$ i wynikający stąd podział macierzy $\partial h_o/\partial t$ możemy zapisać formę różniczkową (18) w postaci:

$$H_{o1}(t)dt_1 + H_{o2}(t)dt_2 = 0. \tag{20}$$

Przy dodatkowym założeniu nieosobliwości macierzy $H_{o1}(t)$ dla każdego $t \in T$ forma ta przyjmuje postać:

$$dt_1 + H_{o1}^{-1}(t)\, H_{o2}(t)dt_2 = 0. \tag{21}$$

Układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego równoważny formie różniczkowej (21) ma postać:

$$\partial t_{1i}/\partial t_{2j} = -r_{oij}(t), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, N_1 - r,$$

gdzie $r_{oij}(t)$ są elementami macierzy

$$R_o(t) = H_{o1}^{-1}(t)\, H_{o2}(t).$$

## 2. Wybrane własności rodziny $\mathcal{C}|\mathcal{D}$

Definicja 2. Mówimy, że rodzina $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ jest niezależna od funkcji $f \in F$, gdzie $F$ jest zbiorem dopuszczalnych funkcji, jeżeli określający ją układ równań Pfaffa jest niezależny od funkcji $f$. Jeżeli:

i) $f=g$, mówimy o niezależności od praw sterowania,

ii) $f=\partial g/\partial t$, mówimy o niezależności od gradientów praw sterowania.

Odpowiednio do powyższej definicji możemy wyróżnić te szczególne postacie układu Pfaffa (8), które odpowiadają niezależności rodziny $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ od praw sterowania lub ich gradientów.

Jeżeli układ (8) ma postać:

$$(h_t(t)+h_g(t)g_t(t))dt=0,$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ jest niezależna od praw sterowania $g'(t)=[g_1(t),\ldots,g_{N_2}(t)]$.

Jeżeli układ (8) ma postać:

$$(h_t(t,g(t))dt=0,$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ jest niezależna od gradientów praw sterowania

$$g_t(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_1 & \ldots & \partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1 & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli układ (8) ma postać:

$$h_t(t)dt=0,$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ jest niezależna zarówno od praw sterowania, jak i ich gradientów.

Uwzględniając, że, jak zaznaczono to powyżej, $g(t)$ jest wektorem, zaś $g_t(t)$ macierzą, można również określić postać układu (8), dla której rodzina $\mathcal{C}|\mathcal{D}$ jest niezależna od wybranych praw sterowania i wybranych gradientów.

Oznaczmy

$$g^{\setminus i}(t)=[g_1(t),\ldots,g_{i-1}(t),g_{i+1}(t),\ldots,g_{N_2}(t)]$$

$$g_t^{\setminus j}(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_1 & \ldots & \partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{j-1}/\partial t_1 & \ldots & \partial g_{j-1}/\partial t_{N_1} \\ \partial g_{j+1}/\partial t_1 & \ldots & \partial g_{j+1}/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1 & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli układ (8) ma postać:

$$(h_t(t,g^{\setminus i}(t))+h_q(t,g^{\setminus i}(t))g_t^{\setminus j}(t))dt=0,$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|D$ jest niezależna od i-tego prawa sterowania i gradientu j-tego prawa sterowania.

Wynik podstawowy dla rozważań tego punktu zawiera następujące

Twierdzenie 1. Jeżeli dla każdego $dz_{H\setminus D}$, $t\in T$, $u\in U$ zachodzi

$$M_2(t,u)dz_{H\setminus D}=0,$$

gdzie

$$h_u(t,u)u_z(z)=[M_1(t,u)\,|\,M_2(t,u)],$$

$$\partial h/\partial u=h_u(t,u)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1 & \ldots & \partial h_1/\partial u_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial u_1 & \ldots & \partial h_r/\partial u_{N_2} \end{bmatrix},$$

$$\partial u/\partial z=u_z(z_H)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial u_1/\partial z_1 & \ldots & \partial u_1/\partial z_r & \partial u_1/\partial z_{r+1} & \ldots & \partial u_1/\partial z_{N_3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial u_{N_2}/\partial z_1 & \ldots & \partial u_{N_2}/\partial z_r & \partial u_{N_2}/\partial z_{r+1} & \ldots & \partial u_{N_2}/\partial z_{N_3} \end{array}\right],$$

to rodzina $\mathcal{C}|D$ określona jest układem równań Pfaffa o postaci

$$h_t(t,g(t))dt=0.$$

Dowód. Wymuszony model bezpośredni ma postać:

$$z_D=h(t,u).$$

Przypominając, że $u=u(z_H)$, $u=g(t)$ są równoważnymi prawami sterowania, możemy wyznaczyć różniczkę zupełną $dz_D$. Mamy

$$dz_D=h_t(t,g(t))dt+h_u(t,u)u_z(z_H)dz_H.$$

Dokonując renumeracji kolumn macierzy $u_z$ możemy drugi ze składników prawej strony powyższego wyrażenia zapisać w postaci:

$$h_u(t,u)u_z(z_H)\begin{bmatrix} dz_D \\ \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix},$$

gdzie $dz_D$ jest wektorem różniczek pomiarów, których numery należą do zbioru D. Podobnie $dz_{H\setminus D}$ jest wektorem różniczek pomiarów, których numery należą do zbioru $H\setminus D$. Odpowiednie macierze pochodnych cząstkowych mają postacie:

$$h_u(t,u)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1 & \dots & \partial h_1/\partial u_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial u_1 & \dots & \partial h_r/\partial u_{N_2} \end{bmatrix},$$

$$u_z(z_H)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial u_1/\partial z_1 & \dots & \partial u_1/\partial z_r & \partial u_1/\partial z_{r+1} & \dots & \partial u_1/\partial z_{N_3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial u_{N_2}/\partial z_1 & \dots & \partial u_{N_2}/\partial z_r & \partial u_{N_2}/\partial z_{r+1} & \dots & \partial u_{N_2}/\partial z_{N_3} \end{array}\right]=$$

$$=[U_1(z_H)\,|\,U_2(z_H)].$$

Przedstawiając iloczyn macierzy $h_u(t,u)u_z(z_H)$ w postaci:

$$h_u(t,u)u_z(z_H)=[M_1(t,u)\,|\,M_2(t,u)]$$

możemy drugi ze składników w układzie (8) przedstawić w postaci:

$$[M_1(t,u)\,|\,M_2(t,u)]\begin{bmatrix} 0 \\ \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix}=M_2(t,u)dz_{H\setminus D}.$$

Warunkiem tożsamościowego zerowania się tego składnika jest zerowanie się dla każdego $dz_{H\setminus D}$, $t\in T$, $u\in U$ wektora r wymiarowego $M_2(t,u)dz_{H\setminus D}$.

Twierdzenie 2. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested (zawierająca się), to $M_2(t,u)\equiv 0$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że elementy macierzy $M_2(t,u)$ będącej drugim blokiem iloczynu macierzy $h_u(t,u)$ $u_z(z_H)$ mają następującą postać szczegółową:

$$M_2(t,u)=[m_{2kj}]=[\sum_{i=1}^{N_2}(\partial h_k/\partial u_i)(\partial u_i/\partial z_j)], \qquad (22)$$

$$k=1,\ldots,r,\ j=r+1,\ldots,N_3.$$

Odpowiednio do definicji struktury informacyjnej nested (zawierająca się), jeżeli pomiary, których numery należą do zbioru $\mathbb{D}$, są argumentami prawa sterowania, to argumenty praw sterowania wpływających na nie powinny się w nich zawierać.

Powracając do postaci (22) wystarczy rozpatrzeć następujące dwa przypadki: i) $\partial h_k/\partial u_i \neq 0$, co oznacza, że k-ty pomiar zależy od i-tego sterowania, a zatem numery pomiarów stanowiących jego argumenty z definicji struktury nested (zawierającej się) należą do zbioru $\mathbb{D}$ i $\partial u_i/\partial z_j \equiv 0$, $j \in \mathbb{H}\setminus\mathbb{D}$, ii) $\partial h_k/\partial u_i = 0$, co oznacza, że k-ty pomiar nie zależy od i-tego prawa sterowania, zatem argumenty tego prawa sterowania mogą być dowolne.

Wyróżnione przypadki wyczerpują wszystkie możliwości (przy założeniu struktury nested), stąd zawsze jeden z czynników iloczynów stanowiących elementy macierzy $M_2(t,u)$ równy jest zeru i cała macierz jest macierzą zerową.

Wniosek 1. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested (zawierająca się) a wymuszony model bezpośredni ma postać:

$$z_{\mathbb{D}}=h(t,u)=h_o(t)+p(u),$$

to rodziny $\mathfrak{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathfrak{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa o postaci:

$$h_{ot}(t)dt=0.$$

Dowód. Na podstawie Tw.2 układ równań określający rodzinę $\mathfrak{C}|\mathbb{D}$ ma postać:

$$h_t(t,u)dt=0.$$

Uwzględniając założoną szczególną postać funkcji h(t,u) otrzymujemy:

$$h_{ot}(t)dt=0.$$

Wniosek 2. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested (zawierająca się), a wymuszony model bezpośredni jest liniowy względem t i u, tj. ma postać

$$z_D = H\,t + Pu,$$

to rodziny $\mathcal{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa postaci:

$$H\,dt = 0.$$

Dowód. Przypadek szczególny Wniosku 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli

i) wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_D=h_o(t)+Pu,$$

gdzie $N_2>r$, $P=[P_a,P_b]$, rank $P_a=r$, $P_b$ jest macierzą $r\times(N_2-r)$ wymiarową,

ii) prawa sterowania są liniowymi funkcjami pomiarów

$$u=Kz=[K_1,K_2]\begin{bmatrix} z_D \\ z_{H\setminus D} \end{bmatrix},$$

gdzie $K_1$, $K_2$ są macierzami odpowiednio $r\times r$ i $r\times(N_3-r)$ wymiarowymi oraz

$$K_2 = [k_{r+1},\ldots,k_j,\ldots,k_{N_3}],$$

$$k'_j = [k'_{aj},k'_{bj}],$$

$$k'_{aj} = [k_{1j},\ldots,k_{rj}],$$

$$k'_{bj} = [k_{r+1,j},\ldots,k_{N_2,j}],$$

gdzie $j=r+1,\ldots N_3$,

iii)elementy macierzy $K_1$ są dowolne a elementy macierzy $K_2$ odpowiednio do podziałów z p i), ii) spełniają zależność:

$$k_{aj}=-(P_a)^{-1}P_b k_{bj},\quad j=r+1,\ldots,N_3,$$

to rodziny $\mathcal{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa o postaci:

$$h_{ot}(t)dt=0.$$

Dowód. Macierz $M_2$ (patrz Tw.1) ma przy założeniach i), ii) postać:

$$M_2=PK_2=[P_a,P_b][k_{r+1},\ldots,k_j,\ldots,k_{N_3}],$$

zas jej j-tą kolumnę $m_{2j}$ można przedstawić jako:

$$m_{2j}=P_a k_{aj}+P_b k_{bj}.$$

Z warunku zerowania się macierzy $M_2$ otrzymujemy:

$$P_a k_{aj}+P_b k_{bj}=0,\ j=r+1,\ldots,N_3,$$

stąd przy założeniu nieosobliwości macierzy $P_a$

$$k_{aj}=(P_a)^{-1}P_b k_{bj}.$$

Przypominając, że $N_2>r$ w każdej kolumnie macierzy $K_2$, $N_2-r$ elementów może byc wybranych dowolnie, pozostałe r musi spełniać warunek iii). Na elementy macierzy $K_1$ nie ma żadnych ograniczeń.

W charakterze komentarza zauważmy, że na podstawie Tw.3. nieklasyczna struktura informacyjna nie zmienia tezy Wniosku 1 (układy równań Pfaffa są takie same dla modelu wymuszonego i modelu swobodnego), jeżeli współczynniki wzmocnień przy tych sterowaniach, których numery argumentów nie należą do zbioru $\mathbb{D}$, spełniają warunek ii).

Zamieszczone poniżej przykłady ilustrują Tw.3, jak również niektóre aspekty Tw.1, 2.

Przykład 1

$N_1$ dowolne

$N_2=1$

$N_3=2$

$r=1$, $(N_2=r)$

$\mathbb{H}=\{1,2\}$, $\mathbb{D}=\{2\}$.

Wymuszony model bezpośredni ma postać:

$$z_2=h_{o2}(t)+p_{21}u_1.$$

Prawo sterowania jest liniowe z założenia

$$u_1=u_1(z_1)=k_{11}z_1.$$

Zbiory pomiarów

$$z_D = \{z_2\},$$

$$z_{H\setminus D} = \{z_1\}.$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji:

$$dz_2 = (\partial h_{o2}(t)/\partial t)dt + p_{21}(\partial u_1(z_1)/\partial z_1)dz_1.$$

Warunek zerowania się macierzy $M_2$ przyjmuje postać (patrz Tw. 1, 3)

$$PK_2 = p_{21}k_{11} = 0$$

i może być spełniony jedynie dla $k_{11}=0$, co oznacza, że rodzina zbiorów $\mathcal{E}|D$ nie zależy od pochodnej prawa sterowania $u_1$ tylko wtedy, jeżeli jest ono stałe jako funkcja $z_1$.

Przykład 2

$N_1$ dowolne

$N_2 = 2$

$N_3 = 3$

$r = 1$, $(N_2 > r)$

$H = \{1,2,3\}$, $D = \{3\}$

Wymuszony model bezpośredni ma postać:

$$z_3 = h_{o3}(t) + p_{31}u_1 + p_{32}u_2.$$

Prawa sterowania są liniowe z założenia o postaciach:

$$u_1 = u_1(z_1) = k_{11}z_1,$$

$$u_2 = u_2(z_2) = k_{22}z_2.$$

Zbiory pomiarów

$$z_D = \{z_3\},$$

$$z_{H\setminus D} = \{z_1, z_2\}.$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji w zapisie macierzowym

$$dz_3 = (\partial h_{o3}(t)/\partial t)dt + [p_{31}\ p_{32}] \left[\begin{array}{c|cc} \partial u_1/\partial z_3 & \partial u_1/\partial z_1 & \partial u_1/\partial z_2 \\ \partial u_2/\partial z_3 & \partial u_2/\partial z_1 & \partial u_2/\partial z_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} dz_3 \\ dz_1 \\ dz_2 \end{array}\right] =$$

$$=(\partial h_{o3}(t)/\partial t)dt+[p_{31}\ p_{32}]\begin{bmatrix} 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dz_3 \\ dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}.$$

Warunek $M_2=PU_2(z)=0$ przyjmuje postać:

$$p_{31}\ k_{11} + p_{32}\ k_{22}=0.$$

Rodzina zbiorów $\mathcal{G}|\mathcal{D}$ nie zależy od gradientów liniowych z założenia praw sterowania $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$, jeżeli współczynniki modelu bezpośredniego łącznie ze współczynnikami wzmocnień $k_{11}$, $k_{22}$ spełniają związek:

$$p_{31}k_{11} + p_{32}k_{22}=0.$$

Przykład 3

$N_1$ dowolne

$N_2 = n$

$N_3 = n+1$

$r = 1$, $(N_2>r$ dla $n>r)$

$H = \{1,\ldots,n+1\}$, $D = \{n+1\}$.

Wymuszony model bezpośredni ma postać:

$$z_{n+1} = h_{o,n+1}(t)+Pu=h_{o,n+1}(t)+\sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i}u_i.$$

Prawa sterowania są liniowe z założenia o postaciach:

$$u_i = u_i(z_i) = k_{ii}z_i,\ i=1,\ldots,n.$$

Zbiory pomiarów

$$z_D = \{z_{n+1}\}$$

$$z_{H\setminus D} = \{z_1,\ldots,z_n\}.$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji w zapisie macierzowym

$$dz_{n+1}=(\partial h_{o,n+1}(t)/\partial t)dt+P\begin{bmatrix} \partial u_1/\partial z_{n+1} & \partial u_1/\partial z_1 & \ldots & \partial u_1/\partial z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial u_n/\partial z_{n+1} & \partial u_n/\partial z_1 & \ldots & \partial u_n/\partial z_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dz_D \\ \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając przyjętą strukturę informacyjną i założenie o liniowości praw sterowania warunek $M_2=PU_2(z)=0$ przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i} k_{ii} = 0.$$

Zakładając dodatkowo ustalone prawo sterowania $k_{ii}=k>0$, $i=1,\ldots,n$ można rozpatrywany warunek przekształcić do postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i} = 0.$$

## 3. Różniczkowe ograniczenia informacyjne

Niech $H_t=\{1,\ldots,N_1\}$, $H_u=\{1,\ldots,N_2\}$, $H_z=\{1,\ldots,N_3\}$ będą horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych sterowań i pomiarów otrzymanymi w wyniku renumeracji problemu pierwotnego (patrz rozdział 1, p.1). Symbolem $D_z$ oznaczamy dowolny podzbiór zbioru $H_z$, zaś symbolem $\mathcal{H}_z$ rodzinę zbiorów $D_z$.

Niech model bezpośredni ma postać:

$$z_D=h(t,u).$$

Odwzorowanie $\gamma: H_u \to \mathcal{H}_z$ określa przyporządkowanie informacyjne (patrz rozdział 1, p.3). Załóżmy

$$\gamma(i)=D,$$

co oznacza, że argumentami prawa sterowania o numerze i-tym są pomiary, których numery należą do zbioru $D \subset H_z$.

Rozpatrywane prawo sterowania ma zatem postać:

$$u_i=u_i(z_D).$$

Na to by prawo sterowania

$$g_i=g_i(t), \quad t \in T$$

było mu równoważne, funkcja $g_i(t)$ powinna być stała dla $t \in T|z_D=T \cap (C|z_D)$, gdzie $C|z_D$ jest zbiorem zgodnym z pomiarami $z_D$ (patrz p.1).

Powinien być zatem spełniony następujący układ równań Pfaffa:

$$\begin{cases} g_{it}\, dt = 0 & (23) \\ (h_t + h_q\, g_t)dt = 0 & (24) \end{cases}$$

Przypominając, że dim $z_D$=r. możemy przeprowadzić następującą segmentację wektora t i macierzy $g_{1t}$, $h_t$, $h_q$, $g_t$. Mamy:

$$t' = [t_1', t_2']$$

$$g_{1t} = [\partial g_1/\partial t_1 \ldots \partial g_1/\partial t_r \,|\, \partial g_1/\partial t_{r+1} \ldots \partial g_1/\partial t_{N_1}] = [B_1(t) | B_2(t)]$$

$$h_t = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_1 & \ldots & \partial h_1/\partial t_r & \vdots & \partial h_1/\partial t_{r+1} & \ldots & \partial h_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_1 & \ldots & \partial h_r/\partial t_r & \vdots & \partial h_r/\partial t_{r+1} & \ldots & \partial h_r/\partial t_{N_1} \end{bmatrix} = [H_1(t) | H_2(t)]$$

$$h_q = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial g_1 & \ldots & \partial h_1/\partial g_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial g_1 & \ldots & \partial h_r/\partial g_{N_2} \end{bmatrix} = F(t)$$

$$g_t = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_1 & \ldots & \partial g_1/\partial t_r & \vdots & \partial g_1/\partial t_{r+1} & \ldots & \partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1 & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_r & \vdots & \partial g_{N_2}/\partial t_{r+1} & \ldots & \partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{bmatrix} = [G_1(t) | G_2(t)]$$

Rozpatrywany układ przy powyższych oznaczeniach przepisać można zatem w postaci:

$$\begin{cases} B_1(t)\, dt_1 + B_2(t)\, dt_2 = 0 & (25) \\ (H_1(t) + F(t)\, G_1(t))dt_1 + (H_2(t) + F(t)\, G_2(t))dt_2 = 0 & (26) \end{cases}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ \hline A_1(t) & A_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt_1 \\ \hline dt_2 \end{bmatrix} = 0, \qquad (27)$$

gdzie

$$A_1(t) = H_1(t) + F(t)\, G_1(t),$$

$$A_2(t) = H_2(t) + F(t)\, G_2(t).$$

Zakładając nieosobliwość dla każdego $t \in T$ macierzy $H_1(t)+F(t)G_1(t)$ i eliminując z powyższego układu różniczkę $dt_1$, otrzymujemy:

$$(B_2(t)-B_1(t)(H_1(t) + F(t)\, G_1(t))^{-1}(H_2(t) + F(t)\, G_2(t)))dt_2 = 0.$$

Uwzględniając, że powyższe równanie ma być spełnione dla każdego $dt_2$, otrzymujemy warunek:

$$B_2(t)-B_1(t)(H_1(t) + F(t)\, G_1(t))^{-1}(H_2(t) + F(t)\, G_2(t))=0. \qquad (28)$$

Warunek (28) nazywamy różniczkowym ograniczeniem informacyjnym odpowiadającym prawu sterowania $g_1$.

Z punktu widzenia syntezy praw sterowania $g_i(t)$, $i\in H_u$ podstawową własnością powyższego układu jest niezależność i-tego ograniczenia (dotyczy ono prawa sterowania $g_i(t)$) od pozostałych praw sterowania $g_j(t)$ lub ich gradientów $\partial g_j(t)/\partial t$, gdzie $j\neq i$, $j\in H_u$. Niezależność, o której mowa, może być badana bezpośrednio przez wypisanie i przekształcenia układów ograniczeń. Ilustrują to następujące przykłady.

Przykład 4

$N_1=3$

$N_2=N_3=2$

$H_t=\{1,2,3\}$

$H_u=H_z=\{1,2\}$

Model bezpośredni dla całego horyzontu $H_z$ ma postać:

$$z_1 = t_1 + t_2,$$

$$z_2 = t_1 + t_3 + u_1. \qquad (a)$$

Prawa sterowania

$$u_1 = u_1(z_1), \quad D_1=\{1\},$$

$$u_2 = u_2(z_1, z_2), \quad D_2=\{1,2\}.$$

Bezpośrednie prawa sterowania mają postać:

$$g_1 = g_1(t_1, t_2, t_3),$$

$$g_2 = g_2(t_1, t_2, t_3).$$

Macierz układu (27) dla bezpośredniego prawa sterowania $g_1$ ma postać:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \partial g_1/\partial t_1 & \partial g_1/\partial t_2 & \partial g_1/\partial t_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1 & A_2 \end{array}\right].$$

Warunek (28)

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}A_2=0$$

przyjmuje postać:

$$[\ \partial g_1/\partial t_2 \quad \partial g_1/\partial t_3\ ] = \partial g_1/\partial t_1\ [\ 1 \quad 0\ ].$$

Układ ograniczeń różniczkowych dla $g_1$ jest zatem następujący:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_1 = \partial g_1/\partial t_2 \\ \partial g_1/\partial t_3 = 0. \end{cases}$$

Macierz układu (27) dla bezpośredniego prawa sterowania $g_2$ ma postać:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \partial g_2/\partial t_1 & \partial g_2/\partial t_2 & \partial g_2/\partial t_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1+\partial g_1/\partial t_1 & \partial g_1/\partial t_2 & 1+\partial g_1/\partial t_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Warunek (28)

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0,$$

gdzie

$$A_1^{-1}(t)=(\Delta(t))^{-1}\left[\begin{array}{cc} \partial g_1/\partial t_2 & 1 \\ -1-\partial g/\partial t & 1 \end{array}\right]$$

$$\Delta(t) = \partial g_1/\partial t_2 - (1+\partial g_1/\partial t_1)$$

daje ograniczenie różniczkowe o postaci:

$$\partial g_2/\partial t_3-(\partial g_1/\partial t_2-\partial g_1/\partial t_1-1)(1+\partial g_1/\partial t_3)(-\partial g_2/\partial t_1+\partial g_2/\partial t_2)=0.$$

Otrzymane ograniczenie jest zależne od gradientu funkcji $g_1(t)$.

Podsumowując, w rozpatrywanym horyzoncie $H_u$ funkcje $g_1(t)$, $g_2(t)$ powinny łącznie spełniać ograniczenia

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_1 - \partial g_1/\partial t_2 = 0 \\ \partial g_1/\partial t_3 = 0 \\ \partial g_2/\partial t_3-(\partial g_1/\partial t_2-\partial g_1/\partial t_1-1)(1+\partial g_1/\partial t_3)(-\partial g_2/\partial t_1+\partial g_2/\partial t_2)=0. \end{cases} \quad (b)$$

Łatwo zauważyć, że uwzględniając pierwsze dwa równania powyższego układu w równaniu trzecim otrzymujemy:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_1 - \partial g_1/\partial t_2 = 0 \\ \partial g_1/\partial t_3 = 0 \\ \partial g_2/\partial t_3 - \partial g_2/\partial t_1 + \partial g_2/\partial t_2 = 0 . \end{cases} \qquad (c)$$

W układzie (c) ograniczenia dla funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$ są już wzajemnie niezależne. Możliwość przekształcenia układu (b) do układu (c), oczywista w rozpatrywanym przypadku, ogólnie jest konsekwencją zawierającej się struktury informacyjnej. Aby pokazać to w ramach przykładu, przyjmijmy prawa sterowania w postaci:

$$u_1 = u_1(z_1) \ , D_1 = \{1\}$$

$$u_2 = u_2(z_2) \ , D_2 = \{2\},$$

tworzące wraz z modelem bezpośrednim (a) nieklasyczną strukturę informacyjną.

Macierz układu (27) dla $g_1(t)$ nie ulega zmianie, a wynikające z niej ograniczenia różniczkowe mają postać:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_1 - \partial g_1/\partial t_2 = 0 \\ \partial g_1/\partial t_3 = 0 . \end{cases}$$

Macierz układu (27) dla $g_2(t)$ ma obecnie postać:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \partial g_2/\partial t_1 & \partial g_2/\partial t_2 & \partial g_2/\partial t_3 \\ \hline 1+\partial g_1/\partial t_1 & \partial g_1/\partial t_2 & 1+\partial g_1/\partial t_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Warunek

$$B_2(t) - B_1(t) A_1^{-1}(t) A_2(t) = 0$$

po podstawieniu odpowiednich macierzy daje następujący układ ograniczeń dla funkcji $g_2$:

$$\begin{cases} \partial g_2/\partial t_2 = (\partial g_2/\partial t_1)(1+ \partial g_1/\partial t_1)^{-1}(\partial g_1/\partial t_2) \\ \partial g_2/\partial t_3 = (\partial g_2/\partial t_1)(1+ \partial g_1/\partial t_1)^{-1}(1+ \partial g_1/\partial t_3). \end{cases}$$

Uwzględniając, że $\partial g_1/\partial t_3=0$ układ powyższy można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} \partial g_2/\partial t_2 = (\partial g_2/\partial t_1)(1+ \partial g_1/\partial t_1)^{-1}(\partial g_1/\partial t_2) \\ \partial g_2/\partial t_3 = (\partial g_2/\partial t_1)(1+ \partial g_1/\partial t_1)^{-1}. \end{cases}$$

Podstawiając w pierwszym równaniu $(\partial g_2/\partial t_1)(1+\partial g_1/\partial t_1)^{-1}=\partial g_2/\partial t_3$ oraz mnożąc drugie równanie obustronnie przez $(1+\partial g_1/\partial t_1)$ otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} (\partial g_2/\partial t_2)/(\partial g_2/\partial t_3)=\partial g_1/\partial t_2 \\ (\partial g_2/\partial t_3)/(\partial g_2/\partial t_1)=(1+\partial g_1/\partial t_1). \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze i wykorzystując $\partial g_1/\partial t_2=\partial g_1/\partial t_1$ mamy:

$$\begin{cases} (\partial g_2/\partial t_2)/(\partial g_2/\partial t_3)=\partial g_1/\partial t_2 \\ (\partial g_2/\partial t_3)/(\partial g_2/\partial t_1)-(\partial g_2/\partial t_2)/(\partial g_2/\partial t_3) =1. \end{cases}$$

Podsumowując rozpatrywany przypadek, funkcje $g_1(t)$, $g_2(t)$ powinny łącznie spełniać ograniczenia różniczkowe postaci:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_1 - \partial g_1/\partial t_2 =0 \\ \partial g_1/\partial t_3 = 0 \\ (\partial g_2/\partial t_2)/(\partial g_2/\partial t_3)=\partial g_1/\partial t_2 \\ (\partial g_2/\partial t_3)/(\partial g_2/\partial t_1)-(\partial g_2/\partial t_2)/(\partial g_2/\partial t_3) =1, \end{cases} \qquad (d)$$

gdzie jedno z ograniczeń na funkcję $g_2(t)$ zależy od funkcji $\partial g_1/\partial t_1$.

Przykład 5

$N_1=2$

$N_2=N_3=2$

$H_t=\{1,2\}$

$H_u=H_z=\{1,2\}$.

Model bezpośredni dla całego horyzontu $H_z$ ma postać:

$$z_1=t_1$$

$$z_2=t_1+t_2+u_1. \qquad (a)$$

Prawa sterowania

$$u_1=u_1(z_1)\ ,D_1=\{1\}$$

$$u_2=u_2(z_2)\ ,D_2=\{2\}.$$

Bezpośrednie prawa sterowania mają postać:

$$g_1=g_1(t_1,t_2)$$

$$g_2=g_2(t_1,t_2).$$

Macierz układu (27) dla bezpośredniego prawa sterowania $g_1$ ma postać:

$$\left[\begin{array}{c|c} \partial g_1/\partial t_1 & \partial g_1/\partial t_2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1 & A_2 \end{array}\right].$$

Warunek

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}A_2=0$$

przyjmuje postać:

$$\partial g_1/\partial t_2 = 0.$$

Macierz układu (27) dla bezpośredniego prawa sterowania $g_2$ ma postać:

$$\left[\begin{array}{c|c} \partial g_2/\partial t_1 & \partial g_2/\partial t_2 \\ \hline 1+\partial g_1/\partial t_1 & 1+\partial g_1/\partial t_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Warunek

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0$$

po podstawieniu odpowiednich macierzy daje ograniczenie różniczkowe w postaci:

$$\partial g_2/\partial t_2 - \partial g_2/\partial t_1 (1+ \partial g_1/\partial t_1)^{-1} (1+ \partial g_1/\partial t_2)=0.$$

Uwzględniając $\partial g_1/\partial t_2=0$ i mnożąc obustronnie przez $-(1+\partial g_1/\partial t_1)$ otrzymujemy:

$$\partial g_2/\partial t_1 - \partial g_2/\partial t_2 (1+ \partial g_1/\partial t_1)=0$$

lub:

$$(\partial g_2/\partial t_1)/(\partial g_2/\partial t_2)-1=\partial g_1/\partial t_1.$$

Łącznie układ ograniczeń różniczkowych dla funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$ ma postać:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_2 = 0 \\ (\partial g_2/\partial t_1)/(\partial g_2/\partial t_2)-1= \partial g_1/\partial t_1. \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Drugie z ograniczeń tego układu jest zależne zarówno od funkcji $\partial g_2/\partial t_1$, $\partial g_2/\partial t_2$ , jak również od funkcji $\partial g_1/\partial t_1$.

Ogólne warunki wzajemnej niezależności ograniczeń informacyjnych podaje następujące

Twierdzenie 4. Niech $\gamma$ będzie przyporządkowaniem informacyjnym, zaś $H_t=\{1,\ldots,N_1\}$, $H_u=\{1,\ldots,N_2\}$, $H_z=\{1,\ldots,N_3\}$, będą horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów.

Jeżeli dla każdego $i\in H_u$

i) $\gamma(i)=D_i\subset H_z$ ,

ii) rodzina $\mathcal{G}|D_i$ jest niezależna od praw sterowania $g_j(t)$, $j\in H_u$ oraz ich gradientów $\partial g_j/\partial t$, $j\in H_u$,

to dla każdego $i\in H_u$ ograniczenie informacyjne dla i-tego bezpośredniego prawa sterowania zależy od jego gradientu i ma postać

$$B_{2i}(t)-B_{1i}(t)H^{-1}_{1i}(t)H_{2i}(t)=0,$$

gdzie

$$B_{1i}(t)=[\partial g_1/\partial t_1 \ldots \partial g_1/\partial t_{r_1}]$$

$$B_{2i}(t)=[\partial g_1/\partial t_{r_1+1} \ldots \partial g_1/\partial t_{N_1}]$$

$$H_{1i}(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_1 & \ldots & \partial h_1/\partial t_{r_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_1 & \ldots & \partial h_r/\partial t_{r_1} \end{bmatrix}$$

$$H_{2i}(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{r_1+1} & \ldots & \partial h_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{r_1+1} & \ldots & \partial h_r/\partial t_{N_1} \end{bmatrix}.$$

Dowod. Jeżeli rodzina $\mathfrak{C}|\mathfrak{D}_1$ jest niezależna od praw sterowania $g_j(t)$, $j\in H_u$ oraz ich gradientów $\partial g_j/\partial t$, $j\in H_u$, to określający ją układ równań Pfaffa ma postać (patrz Def.2):

$$h_t(t)\,dt=0$$

lub w bardziej szczegółowym zapisie, segmentacji wektora t do postaci $t'=[t'_1 t'_2]$, gdzie $\dim t_1=r_1$, $\dim t_2=N_1-r_1$ oraz macierzy $h_t(t)$ pochodnych cząstkowych do postaci $h_t(t)=[H_{1i}(t)|H_{2i}(t)]$ (patrz (27)) rozpatrywany układ równań przybiera postać:

$$H_{1i}(t)dt_1 + H_{2i}(t)dt_2=0.$$

Dopisując do powyższego układu równanie

$$B_{1i}(t)dt_1 + B_{2i}(t)dt_2=0,$$

gdzie $B_{1i}(t)$, $B_{2i}(t)$ są określone jak w tekście Tw.4, a następnie eliminując różniczkę $dt_1$ otrzymujemy ograniczenie informacyjne dla $g_1(t)$. Ponieważ macierze $B_{1i}(t)$, $B_{2i}(t)$ zależą jedynie od $\partial g_1/\partial t$, zaś macierze $H_{1i}(t)$, $H_{2i}(t)$ zależą tylko od t, rozpatrywane ograniczenie informacyjne dla funkcji $g_1(t)$ zależy jedynie od $\partial g_1/\partial t$.

Wniosek 3. Jeżeli dla każdego $i \in H_u$ model bezpośredni ma postać:

$$z_{D_i} = H_i t + Pu$$

i przyporządkowanie informacyjne $\gamma(i)=D_i$ $i \in H_u$ tworzy wraz z nim zawierającą się strukturę informacyjną, to dla każdego $i \in H_u$ ograniczenie informacyjne dla funkcji $g_i(t)$ stanowi układ liniowych równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach.

Dowód. Na podstawie Tw.2 rodzina $\mathfrak{G}|D_i$ jest niezależna od praw sterowania $g_j(t)$, $j \in H_u$ oraz ich gradientów $\partial g_j/\partial t$, $j \in H_u$, co pozwala na zastosowanie Tw.3. i wynikającej z niego postaci ograniczenia informacyjnego, w którym macierz $H_i=[H_{11}(t)\,|\,H_{2i}(t)]$ jest stała.

Wniosek 3 wyjaśnia również wynik uzyskany w Przykładzie 4 dla przypadku zawierającej się struktury informacyjnej.

# Rozdział 3

# ZBIORY INFORMACYJNE TYPU S

*Zbiory informacyjne typu S są zorientowane alternatywnie na przypadki, w których model układu dynamicznego podlegającego sterowaniu wyrażony jest w konwencji zmiennych stanu lub postaci modelu bezpośredniego, zaś zbiór T nie posiada symetrii środkowej warunkującej operowanie rzutami ortogonalnymi zbiorów informacyjnych.*

*Ogólnie zbiór informacyjny typu S jest obrazem zbioru T przez odwzorowanie zależne od praw sterowania. W przypadku szczególnym dla modelu liniowego niezmiennikiem tego odwzorowania jest objętość elementu różniczkowego.*

*Dla zbiorów informacyjnych typu S proponuje się parametryzację odpowiadającą zbiorom wielościennym i pokazuje jak stosując podział symplicjalny wyrazić środek ciężkości zbioru wielościennego w postaci analitycznej funkcji wierzchołków zbioru.*

## 1. Definicje i podstawowe własności

Jako modele w przestrzeni stanu wyróżnia się niesterowany (swobodny) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{o,k+1} = Ax_{o,k} + w_k ; x_1 \\ z_{o,k} = Cx_{o,k} + v_k \end{cases} \qquad (1)$$

oraz sterowany (wymuszony) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \; ; \; x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{2}$$

gdzie w obydwu przypadkach: $x_{o,k+1}$, $x_k$, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_{o,k}$, $z_k$, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje $A^{-1}$.

Odpowiednie modele bezpośrednie mają postacie:

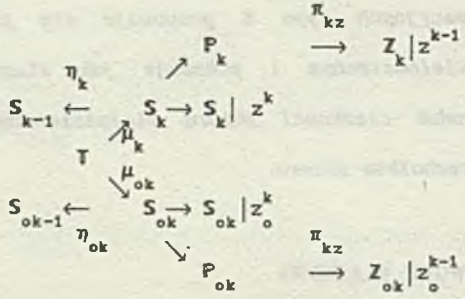
$$z_o^k = H_p s_k + v^k, \tag{3}$$

$$z^k = H_p s_k + v^k + p_4(z^{k-1}), \tag{4}$$

gdzie w obydwu przypadkach $k \in H$, $v_k \in R^p$, zaś grupa zmiennych $s_k$ określona jest przez następujący podział wektora $t=(s_k, v^k)$, skąd $s_k \in R^{d-kp}$, $d=n+nN+pN$, $H_p \in R^{kpx(d-kp)}$.

Rozróżnienia na swobodny i wymuszony model dynamiczny są istotne dla liniowego i stacjonarnego układu dynamicznego. Pomiędzy zbiorami imformacyjnymi odpowiadającymi wyróżnionym przypadkom zachodzą wtedy proste zależności typu translacji (patrz p.2).

Szczegółową strukturę rodziny zbiorów typu S przedstawia rys.1.




Rys.1. Struktura rodziny zbiorów informacyjnych typu S

Fig.1. Structure of the family of the information sets of type S

Definicja 1 .Określone dla każdego $k\in H$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\mu_{ok}:R^d\to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k,v^k)\in R^d$ punkt $(s_k,z^k)\in R^d$, gdzie $s_k=(x_1,w^N,v^{N/k})$, w przypadku modelu (1) lub $t=(s_k,v^k)$ dla modelu (3) nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\mu_{ok}$ przekształca dany zbiór $T\subset R^d$ w zbiór:

$$S_{ok}=\mu_{ok}(T)=\{(s_k,z_o^k):(s_k,z_o^k)=\mu_{ok}(s_k,v^k)\,|\,(s_k,v^k)\in T\}\subset R^d.$$

Zbiór $S_{ok}$ nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi $T$ zgodnie z odwzorowaniem $\mu_{ok}$.

Twierdzenie 1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) lub (3), to dla każdego $k\in H$:

1) odwzorowanie $\mu_{ok}$ jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} = \mu_{ok}(s_k,v^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix},$$

gdzie:

-dla modelu (3) macierz $H_p$ jest dana bezpośrednio, $s_k$ wynika natomiast z podziału $t=(s_k,v^k)$,

-dla modelu (1) $s_k=(x_1^N,w^N,v^{N\setminus k})$ zaś macierz $H_p$ określona jest następująco

$$H_p=\begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$P_{41}=\left.\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\right\}\text{ k wierszy macierzowych,}$$

$$P_{42}=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \cdots & C & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right].$$

k kolumn macierzowych — N-k kolumn macierzowych

ii) odzworowanie odwrotne $\mu_{ok}^{-1}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \rho_{ok}^{-1}(s_{ok}, z_o^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix},$$

gdzie $H_r = -H_p$.

Dowód. Dla modelu (3) postać odwzorowania $\mu_{ok}$ uzyskujemy dopisując do równań tego modelu tożsamość $s_k = s_k$. Prawdziwość twierdzenia dla modelu (1) wynika natomiast z zależności:

$$x_{ok} = A^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}w_i$$

$$z_{oj} = C\left(A^{j-1}x_1 + \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}w_i\right) + v_j, \qquad j=1,\ldots,k$$

zapisanych w postaci macierzowej. Te same zależności rozwikłane względem $x_1$ i ciągu zmiennych $v^k$ dają postać odwzorowania odwrotnego.

Twierdzenie 2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) lub (3), to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_{ok}}| = 1,$$

gdzie $J_{\mu_{ok}} = \partial\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\mu_{ok}$.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania $\mu_{ok}$ jest tożsama z macierzą (Tw.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy jedności.

Wniosek 1. Niech $d(s_k, z_o^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie zgodnie z odwzorowaniem $\mu_{ok}$ objętościami elementów różniczkowych zbiorów $S_k$, $T$. Dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$d(s_k, z_o^k) = d(s_k, v^k).$$

Słownie oznacza to ,że objętość elementu różniczkowego jest niezmiennikiem odwzorowania $\mu_{ok}$.

Definicja 2. Określone dla każdego $k\in H$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\mu_k: R^d \to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k, v^k)\in T\subset R^d$ punkt $(s_k, z^k)\in R^d$, gdzie $s_k=(x_k, w^N, v^{N\setminus k})$ w przypadku modelu (2) lub wynika z podziału $t=(s_k, v^k)$, w przypadku modelu (4) nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\mu_k$ zależy od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ i przekształca dany zbiór $T\subset R^d$ w:

$$S_k = \mu_k(T) = \left\{(s_k, z^k): (s_k, z^k) = \mu_k(s_k, v^k) \,\middle|\, (s_k, v^k)\in T\right\} \subset R^d$$

Twierdzenie 3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) lub (4) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ to dla każdego $k\in H$ odwzorowanie $\mu_k$ określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \\ z^k_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix},$$

gdzie $(s_k, z^k_o)=\mu_{ok}(s_k, v^k)$ oraz

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i) \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niejawną postać odwzorowania $\mu_{ok}$ wyrażoną przez parametry modelu (4) otrzymujemy uzupełniając równania tego modelu tożsamością $s_k=s_k$. W przypadku modelu (2), wykorzystując zależność:

$$x_k = x_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i)$$

oraz zależność:

$$z_j = z_{oj} + C\sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}Bu_i(z^i)$$

dla $j=2,\dots,k$, otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowego tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania $\mu_k$ wymaga rozwikłania zależności z Tw.3 względem $z^k$, co jest możliwe w pewnych przypadkach. Jednego z nich dotyczy następujące

Twierdzenie 4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) lub (4) i funkcje $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$ są liniowe, to odwzorowanie $\mu_k$ jest liniowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$L_{21}=(1-M)^{-1}H_p \qquad L_{22}=(1-M)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ M_{21} & & \\ \vdots & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1}\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz $H_p$ określona jest jak w Tw.1 dla modelu (2) lub dana jako parametr modelu (4).

Dowód. Przy założeniu liniowych funkcji $u(z^k)$, $k\in H$, składnik $p_4(z^{k-1})$ przedstawić można kolejno w postaciach:

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{l=1}^{k-1} A^{k-1-l}Bu_l(z^l) \end{bmatrix},$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ M_{21} & & \\ \vdots & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1}\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = M\, z^k.$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-M \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-M)^{-1}H_p & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 5. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) i funkcje $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$ są liniowe, to zbiór $S_k$ jest wzajemnie jednoznacznym liniowym odwzorowaniem zbioru $S_{ok}$. Wszystkie wartości własne tego odwzorowania wynoszą 1.

Dowód. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) i prawa sterowania są liniowe to na podstawie Tw.3 (patrz również dowód Tw.3) mamy:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix},$$

gdzie macierz M określona jest jak w Tw.3. Stąd wszystkie wartości własne macierzy powyższego odwzorowania są równe 1.

Twierdzenie 6. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2), to dla każdego $k\in H$ i dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\ldots,k-1$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_k}| = |\det J_{\mu_{ok}}| = 1,$$

gdzie $J_{\mu_k} = \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\mu_k$.

Dowód. Odwzorowanie $\mu_k$ określone jest niejawnie (por.Tw.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Macierz $H_p$ i funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w Tw.1, Tw.3.

$$J_{\mu_k^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1+\partial p_4 (z^{k-1})/\partial z^k \end{bmatrix}.$$

Dla założonej struktury informacyjnej praw sterowania $u_i(z^i)$, i=1,...,k-1 mamy:

$$\partial p_4 (z^{k-1})/\partial z^k = \begin{bmatrix} & \#0 \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Stąd det $J_{\mu_k^{-1}}$=det $J_{\mu_k}$ =1, co kończy dowód.

Wniosek 2. Niech $d(s_k, z^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie według odwzorowania $\mu_k$ objętościami elementów różniczkowych zbiorów $S_k$, T. Dla każdego k∈H dla dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, i=1,...,k-1 zachodzi

$$d(s_k, z^k) = d(s_{ok}, z_o^k) = d(s_k, v^k).$$

Słownie oznacza to, że objętość elementu różniczkowego jest niezmiennikiem odwzorowania $\mu_k$. Wybór praw sterowania nie wpływa na objętość zbioru $S_k$ będącego obrazem zbioru T przez odwzorowanie $\mu_k$.

Definicja 3. Niech dla każdego k∈H będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $\eta_{ok}: R^d \to R^d$, d=n+nN+pN, przyporządkowujące punktowi $(s_k, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in S_{ok} \subset R^d$ punkt $(s_k, v_k, z_o^{k-1}) \in S_{ok-1} \subset R^d$. Odwzorowanie $\eta_{ok}$ przekształca dany zbiór $S_{ok}$ w:

$$S_{ok-1} = \eta_{ok}(S_{ok}) = \left\{ (s_{k-1}, z_o^{k-1}) : (s_{k-1}, z_o^{k-1}) = \eta_{ok}(s_k, z_o^k) \mid (s_k, z_o^k) \in S_{ok} \right\}.$$

Twierdzenie 7. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) lub (3) to dla każdego k ∈ H odwzorowanie $\eta_{ok}$ jest liniowe i ma postać :

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Odwzorowanie odwrotne $\eta_{ok}^{-1}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $H_{pk}$ jest k-tym wierszem blokowym macierzy $H_p$ z modelu (3). W przypadku modelu (1):

$$H_{pk} = [\ P_{41k}\ P_{42k}\ 0\ ]$$

$$P_{41k} = [\ C\ A^{k-1}\ ]$$

$$P_{42k} = [\ \underbrace{C\ A^{k-2} \ldots C}_{k-1\ \text{bloków}}\ \underbrace{0 \ldots 0}_{N-k-1\ \text{blok}}\ ].$$

Dowód. Wykorzystując równanie wyjścia wyrażamy $z_{ok}$ przez $x_1$ oraz $w^{k-1}$ i $v_k$, co prowadzi do określenia $\eta_{ok}^{-1}$ dla przypadku modelu o postaci (1). Podobnie dla otrzymania postaci odwzorowania $\eta_{ok}$ wyrażamy $v_k$ przez $x_1$, $w^{k-1}$ i $z_{ok}$. W przypadku modelu (3) postacie odwzorowań $\eta_{ok}, \eta_{ok}^{-1}$ wynikają bezpośrednio z modelu (3) rozpisanego z dokładnością do "blokowych" wierszy

Twierdzenie 8. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) lub (3), to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_{ok}}| = 1,$$

gdzie $J_{\eta_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} s_{ok-1} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_{ok} \\ z_o^{k} \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\eta_{ok}$.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania $\eta_{ok}$ jest równa macierzy reprezentującej to odwzorowanie (Tw.7). Jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek 3. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania $\eta_{ok}$ elementów różniczkowych zbiorów $S_{ok-1}$, $S_{ok}$ zachodzi związek:

$$d(s_{ok-1}, z_o^{k-1}) = d(s_{ok}, z_o^{k}).$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_{ok-1}|z_o^{k-1}$, $S_{ok}|z_o^{k-1}$ (p.2. Def.5) zachodzi związek:

$$ds_{ok-1} = ds_{ok} dz_{ok}.$$

Definicja 4. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\eta_k: R^d \to R^d$, $d = n+nN+pN$, zależne od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\ldots,k-1$, przyporządkowujące punktowi $(s_k, z_k, z^{k-1}) \in S_k \subset R^d$ punkt $(s_k, v_k, z^{k-1}) \in S_{k-1} \subset R^d$. Odwzorowanie $\eta_k$ przekształca dany zbiór $S_k$ w:

$$S_{k-1} = \eta_k(S_k) = \left\{ (s_{k-1}, z^{k-1}) : (s_{k-1}, z^{k-1}) = \eta_k(s_k, z^k) \mid (s_k, z^k) \in S_k \right\}.$$

Twierdzenie 8. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) lub (4) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\ldots,k-1$, to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie $\eta_k$ określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{4k}(z^{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $H_{pk}$, określona jest jak w Tw.7, zaś funkcja wektorowa $p_{4k}(z^{k-1})$ jak w Tw.3.

Dowód. Postać odwzorowania $\eta_k$ odpowiadająca modelowi (2) wynika z zależności $v_k = z_k - Cx_k$, w której $x_k$ wyrażamy przez $x_1$, $w^{k-1}$, $u_i(z^i)$, $i=1,\ldots,k-1$. To samo odwzorowanie dla modelu (4) uzyskujemy wyznaczając $v_k$ z k-tego wiersza "blokowego" układu stanowiącego ten model.

Twierdzenie 10. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) lub (4), to dla każdego $k \in H$ i dla dowolnej funkcji $u_k(z^{k-1})$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_k}| = |\det J_{\eta_{ok}}| = 1,$$

gdzie: $J_{\eta_k} = \partial \begin{bmatrix} s_{k-1} \\ z^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\eta_k$.

Dowód. Macierz $J_{\eta_k}$ ma postać:

$$J_{\eta_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -H_{pk} & 1 & -\partial p_{4k}/\partial z^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

stąd jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek 4. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania $\eta_k$ elementów różniczkowych zbiorów $S_{k-1}$, $S_k$ zachodzi związek:

$$d(s_{k-1}, z^{k-1}) = d(s_k, z^k).$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_k|z^{k-1}$, $S_k|z^{k-1}$ (p.2. Def.5) zachodzi związek:

$$ds_{k-1} = d(s_k, z_k)$$

## 2. Zbiory warunkowe i rzuty

Definicja 5. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór $S_{ok}$ o elementach $(s_{ok}, z_o^k)$. Dla ustalonego $z_o^k$ zbiór $S_{ok}|z_o^k = \{(s_{ok}): (s_{ok}, z_o^k) \in S_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru $S_{ok}$ przy warunku $z_o^k$.

Zbiór $S_{ok}|z_o^k$ można interpretować geometrycznie jako rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych $s_{ok}$ "przekroju" danego zbioru $S_{ok}$ hiperpłaszczyzną (w przestrzeni zmiennych $(s_{ok}, z_o^k)$) $z_o^k = \text{const}$.

Definicja 6. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór $S_{ok}$ o elementach $(s_{ok}, z_o^k)$. Zbiór $P_{ok} = \pi_{zk}(S_{ok}) = \{(z_o^k): (s_{ok}, z_o^k) \in S_{ok}\}$ nazywamy rzutem ortogonalnym zbioru $S_{ok}$ na przestrzeń zmiennych $z_o^k$. Zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1} = \{z_{ok}: (z_{ok}, z_o^{k-1}) \in P_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji $z_{ok}$ dla danego ciągu obserwacji $z_o^{k-1}$.

Pomijając w Def.5, 6 indeks "o" otrzymujemy definicje zbiorów: $S_k|z^k$, $P_k$, $Z_k|z^{k-1}$.

Twierdzenie 11. Jeżeli układ dynamiczny ma postacie (1), (2) lub (3), (4), to pomiędzy zbiorami $S_{ok}|z_o^k$, $S_k|z^k$ zachodzi związek:

$$S_k|z^k = S_{ok}|z_o^k,$$

gdzie $z_o^k = z^k - p_4(z^{k-1})$, funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ jest określona jak w Tw.3. Dowod. Dla każdego $k \in H$ odwzorowanie $\mu_k$ (Def.2) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Zbior warunkowy $S_k|z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość $z^k$ już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym $z^k$ również ustalone jest $z^{k-1}$, to $p_4(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym, co prowadzi do słuszności tezy. Zauważmy, że w opisany sposób nie można wyznaczyć zbioru $S_k|z^{k\setminus l}$ gdzie $1 \le l \le k$ przy niezmienionej definicji zbioru $S_k$ i funkcji wektorowej $p_4(z^{k-1})$. Wynika to stąd, że przy ustalonym $z^{k\setminus l}$ dla $1 \le l \le k$ nie jest ustalone $z^{k-1}$.

Własciwość warunkowych zbiorów informacyjnych wymieniona w Tw.11 jest jedną z podstawowych decydujących o możliwości analitycznego rozwiązania problemu syntezy praw sterowania. Powoduje ona niezależność "reszt" od wczesniejszych sterowań.

Twierdzenie 12. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1), (2) lub (3), (4), to pomiędzy zbiorami $Z_{ok}|z_o^{k-1}$, $Z_k|z^{k-1}$ zachodzi związek:

$$Z_k|z^{k-1} = p_{4k}(z^{k-1}) + Z_{ok}|z_o^{k-1},$$

gdzie

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u_i(z^i).$$

Dowod. Dla każdego $k \in H$ przy ustalonym $z^{k-1}$, $p_{4k}(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k = z_{ok} + p_{4k}(z^{k-1})$.

## 3. PRZYKŁADY

Przykład 1

Przykład ilustruje postać zbioru $\mathbb{T}$, odwzorowanie informacyjne $\mu^{\Delta}_{o2}$ oraz określony przez nie zbiór informacyjny $S^{\Delta}_{o2}$ wraz z odpowiadającym mu zbiorem warunkowym $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$. Środek ciężkości zbioru warunkowego $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ wyznaczany jest bezpośrednio z definicji przez całkowanie.

Model sterowanego układu ma postać:

$$x_{o,k+1} = x_{ok} + w_k \quad ; \quad x_1 = x_{o1}$$

$$z_{ok} = x_{ok} + v_k,$$

gdzie $k \in \mathbb{H} = \{1,2\}$, $x_{ok}, w_k, z_{ok}, v_k \in \mathbb{R}$.

Zbiór $\mathbb{T} = \{(x_1, w_1, v_2)\} \subset \mathbb{R}^3$ jest prostopadłościanem określonym przez następujący układ nierówności:

$$-0.5 \le x_1 \le 0.5 ,$$

$$-0.5 \le w_1 \le 0.5 ,$$

$$-1 \le v_2 \le 1 .$$

Odwzorowanie $\mu^{\Delta}_{o2}$ określone jest zależnością:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowanie $(\mu^{\Delta}_{o2})^{-1}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_{o2} \end{bmatrix}.$$

Zbiór $S^{\Delta}_{o2} = \mu^{\Delta}_{o2}(\mathbb{T})$ określony jest następującym układem nierówności w zapisie macierzowym:

$$-\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\1\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\w_1\\z_{o2}\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\1\end{bmatrix}.$$

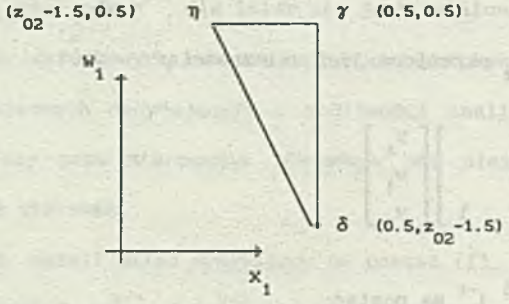
Dla określenia zależności środka ciężkości zbioru warunkowego $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ od $z_{o2}$ rozpatrzymy wymienione dalej przypadki szczególne. Dodatkowo, ze względu na "symetrię", zależność środka ciężkości zbioru warunkowego $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ od $z_{o2}$ określać będziemy jedynie dla $z_{o2}\geq 0$.

Przypadek a

W przypadku tym wartości obserwacji $z_{o2}$ spełniają warunek

$1\leq z_{o2}\leq 2$

Zbiór $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ odpowiadający temu przypadkowi przedstawiony jest na rys. 2.




Rys. 2. Postać zbioru $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ w przypadku a

Fig. 2. Form of the set $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ in the case a

Bezpośrednio z definicji środka ciężkości mamy:

$$v_{x_1}=\int_{z_{o2}-1.5}^{0.5}\left(\int_{z_{o2}-1-w_1}^{0.5}x_1\,dx_1\right)dw_1=\int_{z_{o2}-1.5}^{0.5}\frac{1}{2}x_1^2\Big|_{z_{o2}-1-w_1}^{0.5}dw_1=$$

$$= \int_{z_{o2}-1.5}^{0.5} \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - z_{o2}^2 + 2z_{o2} + 2(z_{o2}-1)w_1 - w_1^3\right) dw_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{3}{4} - z_{o2}^2 + 2z_{o2}\right)w_1 + 2(z_{o2}-1)w_1^2 - \frac{1}{3}w_1^3\right)\Big|_{z_{o2}-1-w_1}^{0.5} =$$

$$= \frac{1}{6}(-z_{o2}+2)^2\left(z_{o2} - \frac{1}{2}\right).$$

Pole rozpatrywanego trojkąta wynosi:

$$P_{\eta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(-z_{o2}+2)^2,$$

stąd ostatecznie

$$\hat{x}_1 = \overset{v}{x}_1 / P_{\eta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\left(z_{o2} - \frac{1}{2}\right).$$

Ze względu na kształt zbioru $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ mamy:

$$\hat{w}_1 = \overset{v}{w}_1 / P_{\eta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\left(z_{o2} - \frac{1}{2}\right).$$

Przypadek b

W przypadku tym wartości obserwacji $z_{02}$ spełniają warunek

$0 \le z_{02} \le 1$.

Zauważmy, że rozpatrywany obecnie przypadek sprowadzić można do przypadku a) podstawiając w wyprowadzonych tam wzorach w miejsce zmiennej $z_{o2}$ wyrażenie $2-z_{o2}$. Otrzymujemy

$$\overset{v}{x}_1 = \frac{1}{6} z_{o2}^2 \left(-z_{o2} + \frac{3}{2}\right).$$

Pole powierzchni rozpatrywanego pięciokąta wynosi:

$$P_{\psi\xi\gamma\rho\mu} = 1 - \frac{1}{2} z_{o2}^2,$$

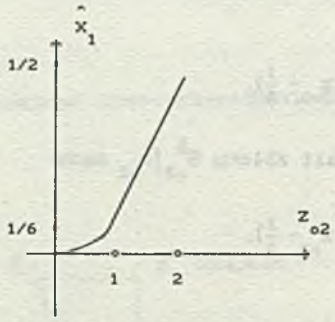
stąd ostatecznie:

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{6} z_{o2}^2 \left(-z_{o2}+\frac{3}{2}\right)\setminus\left(1-\frac{1}{2} z_{o2}^2\right).$$

Podobnie jak w przypadku a) ze względu na kształt zbioru $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ mamy

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{6} z_{o2}^2 \left(-z_{o2}+\frac{3}{2}\right)\setminus\left(1-\frac{1}{2} z_{o2}^2\right).$$

Ostatecznie, otrzymana zależność środka ciężkości zbioru $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ od wartości $z_{o2}$ (łącznie przypadki a), b)) ma postać przedstawioną na rys.3 Dla $1 \le z_{o2} \le 2$ zależność ta jest liniowa, dla $0 \le z_{o2} \le 1$ nieliniowa wypukła.




Rys.3. Zależność środka ciężkości zbioru $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ od wartości $z_{o2}$

Fig.3. The dependence of gravity center of the set $S^{\Delta}_{o2}|z_{o2}$ from $z_{o2}$

Przykład 2

Przykład ilustruje kolejno postać zbioru **T**, postacie odwzorowań informacyjnych $\mu_{01}, \mu_{02}$ oraz określone przez te odwzorowania zbiory $S_1, S_2$ oraz zbiory warunkowe $S_1|z_{01}$, $S_2|(z_{01}, z_{o2})$ i ich środki ciężkości jako funkcje pomiarów. Środki ciężkości wyznaczane są na podstawie Dodatku p.4.

Swobodny model sterowanego układu ma postać:

$$x_{o,k+1} = x_{ok} + w_k \quad ; \quad x_1 = x_{o1}$$

$$z_{ok} = x_{ok} + v_k,$$

gdzie $k\in\mathbb{N}=\{1,2\}$, $x_{ok}, w_k, z_{ok}, v_k \in R$.

Zbiór $T = \{(x_1, w_1, v_1, v_2)\} \subset R^4$ jest wielościanem (przypadek szczególny kompleksu komórkowego) określonym przez następujący układ nierówności:

$$-0.5 \le x_1 \le 0.5$$
$$-0.5 \le w_1 \le 0.5$$
$$-1 \le v_1 \le 1$$
$$-1 \le v_2 \le 1 .$$

Ten sam układ w zapisie macierzowym ma postać:

$$-\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie $\mu_{o1}$ odpowiednio do Def.1 ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ z_{o1} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}\right\} S_1 .$$

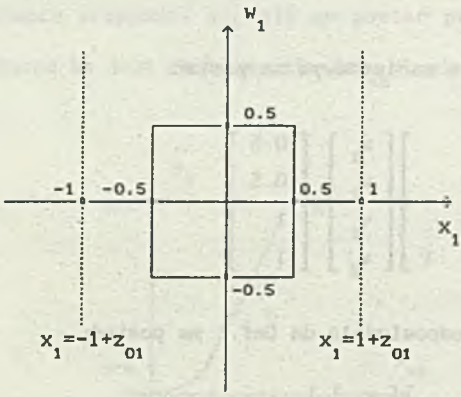
Odwzorowanie $\mu_{o1}^{-1}$ odpowiednio do Tw.1 ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ z_{o1} \end{bmatrix}\right\} S_1 .$$

Zbiór $S_{o1}=\mu_{o1}(T)$ określony jest następującym układem nierówności w zapisie macierzowym:

$$-\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ z_{o1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zbiór warunkowy $S_{o1}|z_{o1}=\pi_{S_{o1}}(S_{o1}$ przy ustalonej wartości $z_{o1})$ przedstawiony jest na rys. 4.




Rys. 4. Przekrój zbioru $S_1|(z_{01}=0)$ płaszczyzną $v_2=0$

Fig. 4. Intersection of the set $S_1|(z_{01}=0)$ by $v_2=0$

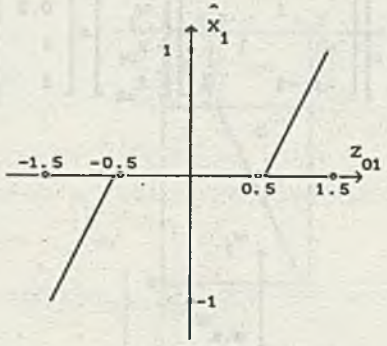
Zależność środka ciężkości zbioru $S_1|z_{01}$ od wartości $z_{01}$ ma postać:

$$\hat{s}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{w}_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\hat{x}_1 = \begin{cases} (0.5+z_{01})/2 & \text{dla } -3/2 \leq z_{01} \leq -1/2 \\ (-0.5+z_{01})/2 & \text{dla } 1/2 \leq z_{01} \leq 3/2 \\ 0 & \text{dla } -1/2 \leq z_{01} \leq 1/2 \end{cases}$$

$$\hat{w}_1 = v_2 = 0 \qquad \text{dla } -3/2 \leq z_{01} \leq 3/2$$




Rys.5. Wykres zależności środka ciężkości $\hat{x}_{01}$ od obserwacji $z_{o1}$

Fig.5. Plot of the center gravity $\hat{x}_{01}$ dependence on measurement $z_{o1}$

Odwzorowanie $\mu_{02}$ odpowiednio do Def.1 określone jest zależnością:

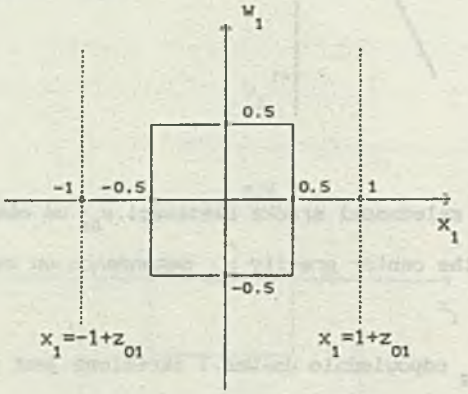
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_{01} \\ z_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowanie $\mu_{02}^{-1}$ ma postac:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_{01} \\ z_{02} \end{bmatrix}.$$

Zbiór $S_2=\mu_{o2}(T)$ określony jest następującym układem nierówności w zapisie macierzowym:

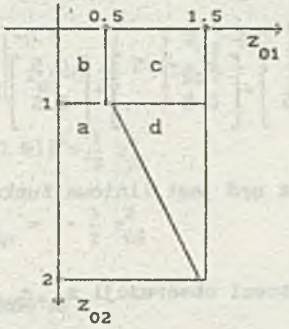
$$-\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_{01} \\ z_{02} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$




Rys.6. Zbiór $S_2|(z_{01}=0,\ z_{02}=0)$

Fig.6. Set $S_2|(z_{01}=0,\ z_{02}=0)$

Wyznaczenie zależności środka ciężkości zbioru $S_2|(z_{01},z_{02})$ od obserwacji $(z_{01},z_{02})$ wymaga rozpatrzenia przypadków a, b, c, d określonych na rys.7. W każdym z wyróżnionych przypadków środek ciężkości może być wyznaczony z definicji przez bezpośrednie całkowanie (porównaj przykład 1 przypadki a), b) ) lub na podstawie Tw.D.4. z Dodatku p.4. Dodatkowo ze względu na symetrię wystarczy wyróżnione przypadki rozpatrywać jedynie dla $z_{01}\geq 0,\ z_{02}\geq 0$.




Rys.7. Przypadki wyróżnione ze względu na wyznaczanie środka ciężkości zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$

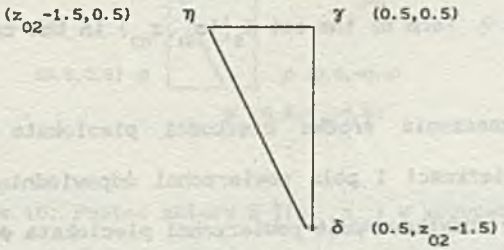
Fig.7. Cases distinguished for determination of the gravity center of the set $S_2|(z_{01}, z_{02})$

Przypadek a

W przypadku tym wartości obserwacji $z_{01}, z_{02}$ spełniają warunki:

$$\begin{cases} z_{01} \leq z_{02} - 0.5 \\ 1 \leq z_{01} \leq 2 . \end{cases}$$

Środek ciężkości zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ zależy jedynie od wartości $z_{02}$, tj. "aktywne" są jedynie ograniczenia zawierające zmienną $z_{02}$. Zbiór $S_2|(z_{01}, z_{02})$ odpowiadający rozpatrywanemu przypadkowi przedstawiony jest na rys.8 jako trójkąt $\eta\gamma\delta$.




Rys.8. Postać zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ w przypadku a.

Fig.8. Form of the set $S_2|(z_{01}, z_{02})$ in the case a

Bezposrednio z definicji srodka ciężkosci sympleksu mamy:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{w}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ z_{02}-1.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_{02}-1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right)= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} z_{02}-0.5 \\ z_{02}-0.5 \end{bmatrix}.$$

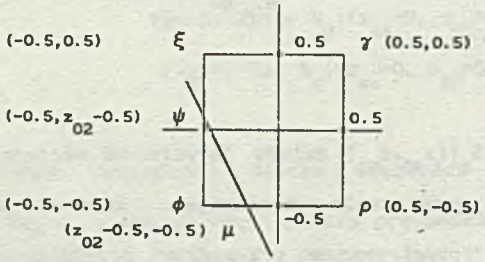
Srodek ciężkosci trójkąta $\eta\gamma\delta$ jest liniową funkcją wartosci $z_{02}$.

Przypadek b

W przypadku tym wartosci obserwacji $z_{01}, z_{02}$ spełniają warunki:

$$\begin{cases} 0 \le z_{01} \le 0 \\ 0 \le z_{02} \le 1. \end{cases}$$

Srodek ciężkosci zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ zależy jedynie od wartosci $z_{02}$, tj. "aktywne" są jedynie ograniczenia zawierające zmienną $z_{02}$. Zbiór $S_2|(z_{01}, z_{02})$ odpowiadający rozpatrywanemu przypadkowi przedstawiony jest n rys. 9 jako pięciokąt $\psi\xi\gamma\rho\mu$.




Rys. 9. Postac zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ w przypadku b

Fig. 9. Form of the set $S_2|(z_{01}, z_{02})$ in the case b

W celu wyznaczenia srodka ciężkosci pięciokąta $\phi\xi\gamma\rho\mu$ wyznaczamy kolejno srodki ciężkosci i pola powierzchni odpowiednio czworokąta $\phi\xi\gamma\rho$, trójkąta $\phi\psi\mu$ oraz dodatkowo pole powierzchni pięciokąta $\phi\xi\gamma\rho\mu$. Mamy kolejno:

$$^{b}_{\phi\xi\gamma\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{\phi\xi\gamma\rho} = 1,$$

$$b_{\phi\psi\mu} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.5\\ z_{02}-0.5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}z_{02}-0.5\\-0.5\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}(z_{02}-1.5)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$P_{\phi\psi\mu} = \frac{1}{2}(z_{02}-0.5-(-0.5))^2 = \frac{1}{2}z_{02}^2,$$

$$P_{\psi\xi\gamma\rho\mu} = P_{\phi\xi\gamma\rho} - P_{\phi\psi\mu} = 1 - \frac{1}{2}z_{02}^2 .$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{w}_1\end{bmatrix} = b_{\psi\xi\gamma\rho\mu} = (P_{\phi\xi\gamma\rho}\, b_{\phi\xi\gamma\rho} - P_{\phi\psi\mu} b_{\phi\psi\mu})/P_{\psi\xi\gamma\rho\mu} = \frac{1}{3}\,\frac{z_{02}^2(z_{02}-1.5)}{z_{02}^2-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

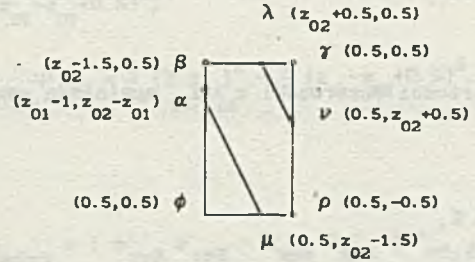
W rozpatrywanym przypadku środek ciężkości $b_{\psi\xi\gamma\rho\mu}$ jest nieliniową funkcją obserwacji $z_{02}$. Łatwo sprawdzić, że zachodzi własność:

$$(d\, b_{\psi\xi\gamma\rho\mu}/d\, z_{02})\big|_{z_{02}=0} = 0.$$

Przypadek c

W przypadku tym wartości obserwacji $z_{01}, z_{02}$ spełniają warunki

$$\begin{cases} 0 \le z_{02} \le 1 \\ 0.5 \le z_{01} \le 1.5 \end{cases}$$




Rys. 10. Postać zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ w przypadku c

Fig. 10. Form of the set $S_2|(z_{01}, z_{02})$ in the case c

Dla wyznaczenia srodka ciężkości sześciokąta $\alpha\beta\lambda\nu\rho\mu$ wyznaczamy kolejno srodki ciężkosci i pola powierzchni prostokąta $\phi\beta\gamma\rho$ trójkątow $\phi\alpha\mu$ $\lambda\gamma\nu$ oraz pole powierzchni szesciokąta $\alpha\beta\lambda\nu\rho\mu$.

$$b_{\phi\beta\gamma\rho} = \begin{bmatrix} (0.5-z_{01}+1)\backslash 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1.5-z_{01} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{\phi\beta\gamma\rho} = 1.5-z_{01},$$

$$b_{\phi\alpha\mu} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} z_{01}-1 \\ -0.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_{01}-1 \\ z_{02}-z_{01} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_{02}-1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2z_{01}+z_{02}-3.5 \\ -z_{01}+z_{02}-1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\phi\alpha\mu} = \frac{1}{2}(z_{02}-z_{01}-0.5)^2,$$

$$b_{\lambda\gamma\nu} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} z_{02}+0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.5 \\ z_{02}+0.5 \end{bmatrix}\right)= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} z_{02}+1.5 \\ z_{02}+1.5 \end{bmatrix},$$

$$P_{\lambda\gamma\nu} = \frac{1}{2}z_{02}^2,$$

$$P_{\alpha\beta\lambda\nu\rho\mu} = \frac{1}{2}(3-2z_{01}-(z_{02}-z_{01}-0.5)^2-z_{02}^2).$$

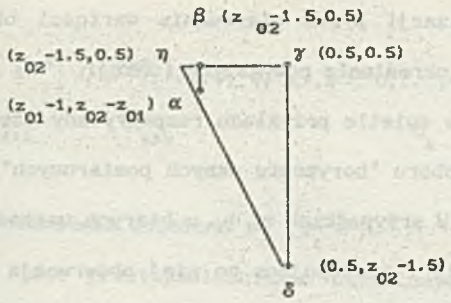
Ostatecznie

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{w}_1 \end{bmatrix} = b_{\alpha\beta\lambda\nu\rho\mu} = (P_{\phi\beta\gamma\rho}\, b_{\phi\beta\gamma\rho} - P_{\phi\alpha\mu}\, b_{\phi\alpha\mu} - P_{\lambda\gamma\nu}\, b_{\lambda\gamma\nu})/P_{\alpha\beta\lambda\nu\rho\mu}.$$

Przypadek d

W przypadku tym wartości obserwacji $z_{01}, z_{02}$ spełniają warunki:

$$\begin{cases} 1 \leq z_{02} \leq 2 \\ 0.5 \leq z_{01} \leq 1.5 \\ z_{01} \leq z_{02}-0.5, \end{cases}$$




Rys. 11. Postać zbioru $S_2|(z_{01}, z_{02})$ w przypadku d

Fig. 11. Form of the set $S_2|(z_{01}, z_{02})$ in the case d

Dla wyznaczenia środka ciężkości czworokąta $\alpha\beta\gamma\delta$ należy wyznaczyć środki ciężkości i pola powierzchni odpowiednio trójkątów $\eta\gamma\delta$, $\eta\beta\alpha$ oraz pole powierzchni czworokąta $\alpha\beta\gamma\eta$. Mamy kolejno:

$$b_{\eta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ z_{02}-1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{02}-1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} z_{02}-0.5 \\ z_{02}-0.5 \end{bmatrix},$$

$$P_{\eta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(2-z_{02})^2,$$

$$b_{\eta\beta\alpha} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} z_{01}-1 \\ z_{02}-z_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{02}-1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{01}-1 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2z_{01}+z_{02}-3.5 \\ -z_{01}+z_{02}+1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\eta\beta\alpha} = \frac{1}{2}(z_{01}-z_{02}+0.5)^2,$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\eta\gamma\delta} - P_{\eta\beta\alpha} = \frac{1}{2}(2-z_{02})^2 - \frac{1}{2}(z_{01}-z_{02}+0.5)^2,$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(b_{\eta\gamma\delta} P_{\eta\gamma\delta} - b_{\eta\beta\alpha} P_{\eta\beta\alpha}\right)/P_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Na zakończenie zauważmy, że potrzeba rozpatrywania przypadków a, b, c, d była wynikiem dążenia do uzyskania analitycznych wyrażeń określających środek ciężkości zbioru $S_{02}|(z_{01}, z_{02})$ w funkcji wartości obserwacji

$z_{01}, z_{02}$. W przypadku realizacji prawa sterowania wartości obserwacji są ustalone i nie ma potrzeby określania powyższych funkcji.

Zauważmy również, że w świetle przykładu rozpatrywany często w aspekcie teoretycznym problem doboru "horyzontu danych pomiarowych" dla regulatora jest bezprzedmiotowy. W przypadkach a, b, w których wartość obserwacji $z_{01}$ jest "mała" w porównaniu z następującą po niej obserwacją $z_{02}$, wartość środka ciężkości zależy jedynie od wartości ostatniej obserwacji (horyzont jednoetapowy). W pozostałych przypadkach, tj.c, d wartość środka ciężkości zależy od wartości obydwu obserwacji $z_{01}, z_{02}$ (horyzont dwuetapowy).

Przykład 3

Opierając się na wynikach przykładu 2 można przypuszczać, że również w przypadku wielowymiarowym środek ciężkości zbioru $S_{ok}|z_o^k$ w dowolnej chwili k rozpatrywanego horyzontu sterowania może zależeć jedynie od ostatniej obserwacji $z_{ok}$, jeżeli wartość tej obserwacji jest "duża" w porównaniu z obserwacjami poprzednimi. Z tego względu dalej rozpatruje się analityczną zależność środka ciężkości zbioru $S_{ok}|z_{ok}$ od pomiaru $z_{ok}$ dla $z_{ok} \in [\underline{z}_{ok}, \bar{z}_{ok}]$, gdzie $\bar{z}_{ok}$ jest jego maksymalną możliwą wartością. Znaczenie wartości $\underline{z}_{ok}$ będzie wyjaśnione dalej.

Ogólny swobodny model bezpośredni określony w horyzomcie $H=\{1,\ldots,N\}$ ma postać:

$$z_o^k = H_p s_k + v^k$$

Ten sam model wyrażony przez parametry modelu swobodnego w zmiennych stanu ma postać:

$$z_o^k = \begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w^N \\ v^{N\setminus k} \\ v^k \end{bmatrix}.$$

Ostatnia składowa blokowa wektora blokowego $z_o^k$ może być przedstawiona w postaci:

$$z_{ok} = \underbrace{[\, C A^{k-1} \,|\, C A^{k-2}, \ldots, C,}_{P_{41k}} \quad \underbrace{0, \ldots, 0}_{\bar{P}_{42k}} \,|\, \underbrace{0, \ldots, 0}_{0_k} \,|\, \underbrace{0, \ldots, 1}_{1_k} \,] \begin{bmatrix} x_1 \\ w^N \\ v^{N\setminus k} \\ v^k \end{bmatrix},$$

gdzie dla uproszczenia założono $z_{ok}, v_k \in R$.

Zbiór $T$ jest prostopadłościanem określonym przez następujący układ nierówności:

$$-a \leq x_1 \leq a$$

$$-b \leq w^{k-1} \leq b$$

$$-d \leq \begin{bmatrix} w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ v^{k-1} \end{bmatrix} \leq d$$

$$-c \leq v_k \leq c .$$

Zbiór $S_{ok}^{\Delta(k-1)}$ określony jest układem nierówności:

$$-a \leq x_1 \leq a$$

$$-b \leq w^{k-1} \leq b$$

$$-c \leq z_{ok} - P_{41k} x_1 + \bar{P}_{42k} w^{k-1} \leq c$$

$$-d \leq \begin{bmatrix} w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ v^{k-1} \end{bmatrix} \leq d .$$

Z powyższej postaci widać, że zbiór $S_{ok}^{\Delta(k-1)}$ może być przedstawiony w postaci $S_{ok}^{\Delta(k-1)} = M_{ok} \times \bar{T}$ gdzie jedynie zbiór $M_{ok}$ zależy od $z_{ok}$, zaś zbiór $\bar{T}$ określony jest układem nierówności

$$-d \leq \begin{bmatrix} w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ v^{k-1} \end{bmatrix} \leq d .$$

Dalej stosujemy uproszczony zapis zastępując $z_{ok}$, $x_1$, $w^{k-1}$ odpowiednio przez z, x, w. Równanie pomiaru w zmienionych oznaczeniach ma postać:

$$z = g'x + h'w.$$

Zbiór $M_{ok}$ ma postać:

$-a \le x \le a$ a, $x \in R^n$

$-b \le w \le b$ b, $w \in R^{n(k-1)}$

$-c \le z-g'x-h'w \le c$ c, $z \in R$.

Oznaczmy przez $C(\beta_o,\beta_1,..,\beta_c)$ prostopadłościan

$-a \le x \le a$

$-b \le w \le b$

o wierzchołkach $\beta_o,\beta_1,...,\beta_c$. Dla celów przykładu wyróżniamy wierzchołek $\beta_i$ określony przez wektor

$$\beta_o = [a_1 \operatorname{sgn} g_1,\ldots,a_n \operatorname{sgn} g_n, b_1 \operatorname{sgn} h_1,\ldots,b_r \operatorname{sgn} h_r]$$

Odpowiada mu dodatnia wartość

$$z_{max\beta_o} = c + [g',\ h']\beta_o.$$

Wprowadźmy zbiór wierzchołków $V(\beta_o)$ będący podzbiorem zbioru V(C) wszystkich wierzchołków prostopadłościanu C. Zbiór $V(\beta_o)$ zawiera wierzchołki sąsiednie względem wierzchołka $\beta_o$. Poszczególne wierzchołki $\beta_i$ i=1,...,n+r należące do zbioru $V(\beta_o)$ określone są następująco:

$$\beta_1 = [-a_1 \operatorname{sgn} g_1,\ldots,\ a_n \operatorname{sgn} g_n, b_1 \operatorname{sgn} h_1,\ldots,b_r \operatorname{sgn} h_r],$$

....

$$\beta_n = [\ a_1 \operatorname{sgn} g_1,\ldots,-a_n \operatorname{sgn} g_n, b_1 \operatorname{sgn} h_1,\ldots,b_r \operatorname{sgn} h_r],$$

$$\beta_{n+1} = [\ a_1 \operatorname{sgn} g_1,\ldots,a_n \operatorname{sgn} g_n,-b_1 \operatorname{sgn} h_1,\ldots,b_r \operatorname{sgn} h_r],$$

....

$$\beta_r = [\ a_1 \operatorname{sgn} g_1,\ldots,a_n \operatorname{sgn} g_n, b_1 \operatorname{sgn} h_1,\ldots,-b_r \operatorname{sgn} h_r].$$

Wartość z odpowiadającą ustalonemu wierzchołkowi $\beta_i$ określamy jako

$$z(\beta_i) = c + [g',\ h']\beta_i.$$

Podobnie określamy

$$z_{maxV} = \max_{\beta_1 \in V(\beta_o)} z(\beta_1).$$

Wierzchołków, w których $z(\beta_1)$, $i=1,\ldots,n+r$ osiąga wartość maksymalną może być więcej niż jeden. Przykładowo, jeżeli a=b oraz g, h, są wektorami jedynek, to

$$z(\beta_j) = \max_{\beta_1 \in V(\beta_o)} z(\beta_1), \quad j=1,\ldots,n+r.$$

Przyjęty dalej do rozważań przedział zmienności z oznaczmy $[\underline{z}, \bar{z}]$, gdzie:

$$\underline{z} = \max ( z_{maxV}, -c + [g', h']\beta_o)$$

$$\bar{z} = c + [g', h']\beta_o.$$

Dla $z \in [\underline{z}, \bar{z}]$ hiperpłaszczyzna H

$$z - g'x - h'w + c = 0$$

"odcina" z prostopadłościanu $C(\beta_o,\beta_1,\ldots,\beta_c)$ sympleks $\Delta(\alpha_o=\beta_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+r})$. Wierzchołki $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+r}$ tego sympleksu są punktami przebicia hiperpłaszczyzny H przez kolejne krawędzie prostopadłościanu $C(\beta_o,\beta_1,\ldots,\beta_c)$ wychodzące z wierzchołka $\beta_o$. Wierzchołki $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+r}$ przedstawić można w postaci:

$$\alpha_i = \beta_i + d_i(z),$$

$$d_i(z) = \begin{cases} [0,\ldots,g_i^{-1}(z-c-[g', h']\beta_o),\ldots,0\ ], & i=1,\ldots,n \\ [0,\ldots,h_{i-n}^{-1}(z-c-[g', h']\beta_o),\ldots,0\ ], & i=n+1,\ldots,r. \end{cases}$$

Odpowiednio do Dodatku p.4 środek ciężkości sympleksu $\Delta(\beta_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+r})$ wyraża się zależnością:

$$b_{\Delta 1} = \begin{cases} \beta_o + \frac{1}{n+r+1} g_i^{-1}(z-c-[g', h']\beta_o), & i=1,\ldots,n \\ \beta_o + \frac{1}{n+r+1} h_{i-n}^{-1}(z-c-[g', h']\beta_o), & i=n+1,\ldots,r \end{cases}$$

Oznaczając $l'=[g',h']$, wyrażenie na środek ciężkości przepisać można w postaci:

$$b_{\Delta i} = \beta_o + \frac{1}{n+r+1} l_i^{-1} (z-c- l'\beta_o) , \quad i=1,\ldots,n+r.$$

W przypadku szczególnym, jeżeli $l'=[1,\ldots,1]$, to

$$\operatorname{sgn} a_i=1, i=1,\ldots,n$$

$$\operatorname{sgn} b_i=1, i=1,\ldots,r$$

$$\beta_o = [a', b'],$$

stąd wyrażenie na środek ciężkości przyjmuje postać:

$$b_{\Delta i} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{n+r+1} (z-c- \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{r} b_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dla $z \in [\underline{z}, \bar{z}]$ zależność środka ciężkości $b_{\Delta i}$ od z jest liniowa i może być przedstawiona w postaci:

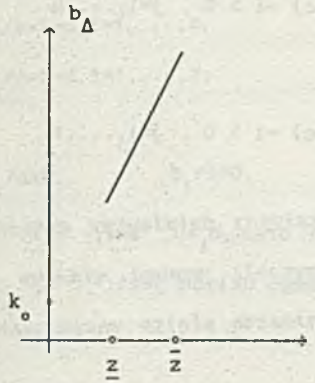
$$b_\Delta (z)= k_1 z + k_o , \quad k_1, k_o \in R^{n+r}$$

$$k_{1i} = \begin{cases} \frac{1}{n+r+1} g_i^{-1} z \\ \frac{1}{n+r+1} h_{i-n}^{-1} z \end{cases}$$

$$k_{oi} = \begin{cases} \frac{1}{n+r+1} g_i^{-1} (c + [g', h']\beta_o) + \beta_{oi} \\ \frac{1}{n+r+1} h_{i-n}^{-1} (c + [g', h']\beta_o) + \beta_{oi} \end{cases}$$

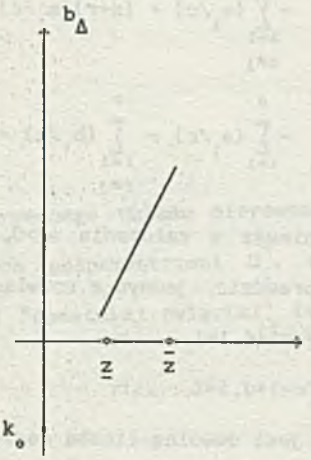
$$i=1,\ldots,n+r$$

Interesujące jest rozróżnienie następujących dwu przypadków $k_{oi}>0$, $k_{oi}<0$. Przypadki te ilustrują graficznie rys. 12. a, b.




Rys. 12. a. Zależność środka ciężkości od z w przypadku $k_{o1}>0$

Fig. 12. a. Dependence of gravity center on z in the case $k_{o1}>0$




Rys. 12. b. Zależność środka ciężkości od z w przypadku $k_{o1}<0$

Fig. 12. a. Dependence of gravity center on z in the case $k_{o1}<0$

Dalej analizując wyróżnione przypadki zakładamy dla uproszczenia oznaczeń $1'=[1,\ldots,1]$.

Przypadek $k_{o1}>0$

W przypadku tym odpowiedni układ nierówności ma postać

$$\begin{cases} -c-\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{r} b_i + (n+r+1)\, a_j > 0\ ,\ j=1,\ldots,n \\ -c-\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{r} b_i + (n+r+1)\, b_j > 0\ ,\ j=1,\ldots,r. \end{cases}$$

Normalizując powyższy układ nierówności względem c, które jest z założenia dodatnie, otrzymujemy układ nierówności względem n+r zmiennych $a_i/c$, gdzie $i=1,\ldots,n$, $b_i/c$, gdzie $i=1,\ldots,r$. Układ ten ma postać:

$$\begin{cases} -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(a_i/c) + (n+r)(a_j/c) - \sum_{i=1}^{r}(b_i/c) - 1 > 0\ , \quad j=1,\ldots,n \\ -\sum_{i=1}^{n}(a_i/c) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(b_i/c) + (n+r)(b_j/c) - 1 > 0\ , \quad j=1,\ldots,r. \end{cases}$$

Ponieważ z założenia $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$ oraz $b_i>0$, $i=1,\ldots,r$, to jak łatwo sprawdzić, jednym z rozwiązań powyższego układu jest:

$a_i/c=1+d$, $i=1,\ldots,n$,

$b_i/c=1+d$, $i=1,\ldots,r$,

gdzie d jest dowolną liczbą dodatnią.

Zbiorem wszystkich rozwiązań rozpatrywanego układu nierówności jest stożek wypukły utworzony przez iloczyn dodatnich półprzestrzeni $\Omega_i^+$, $i=1,\ldots,n+r$, na które hiperpłaszczyzny

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(a_i/c) + (n+r)(a_j/c) - \sum_{i=1}^{r}(b_i/c) - 1 = 0\ , j=1,\ldots,n,$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(a_i/c) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(b_i/c) + (n+r)(b_j/c) - 1 = 0\ , j=1,\ldots,r,$$

dzielą przestrzeń $R^{n+r}$. Wierzchołek tego stożka leży w punkcie $(1,\ldots,1)\in R^{n+r}$.

Przypadek $k_{oi}<0$

W przypadku tym układ nierówności utworzony analogicznie do poprzedniego ma postać:

$$\begin{cases} -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(a_i/c) + (n+r)(a_j/c) - \sum_{i=1}^{r}(b_i/c) - 1 < 0\ , \quad j=1,\ldots,n \\ -\sum_{i=1}^{n}(a_i/c) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(b_i/c) + (n+r)(b_j/c) - 1 < 0\ , \quad j=1,\ldots,r. \end{cases}$$

Jedno z rozwiązań tego układu może być przedstawione jako:

$a_i/c=1-d, i=1,\ldots,n,$

$b_i/c=1-d, i=1,\ldots,r,$

gdzie

$a_i/c>0, \qquad b_i/c>0, \qquad d>0.$

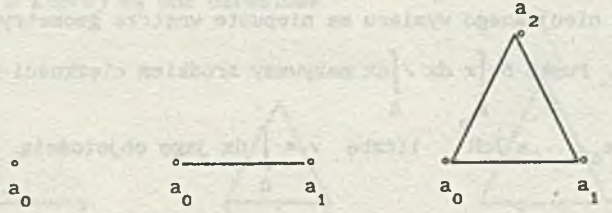
Zbiorem wszystkich rozwiązań rozpatrywanego układu nierówności jest stożek wypukły będący iloczynem ujemnych półprzestrzeni $\Omega_i^-$, na które hiperpłaszczyzny dzielą przestrzeń $R^{n+r}$ i "dodatniej ćwiartki" tej przestrzeni.

## 4. DODATEK

Definicja D.1. [18] Niech punkty $a_0,\ldots,a_m$ przestrzeni euklidesowej $R^n$ tworzą zbiór afinicznie niezależny. Zbiór

$$\Delta(a_0,\ldots,a_m)=\left\{x\in R^n:\ x=\sum_{j=0}^{m} r^j a_j,\ \text{gdzie } r^j\geq 0 \text{ dla } j=0,\ldots,m \text{ oraz } \sum_{j=0}^{m} r^j = 1\right\}$$

nazywamy m-wymiarowym sympleksem o wierzchołkach $a_0,\ldots,a_m$.




Rys. D.1. Sympleksy $\Delta(a_0)$, $\Delta(a_0,a_1)$, $\Delta(a_0,a_1,a_2)$ w przestrzeni $R^2$

Fig. D.1. Simplexes $\Delta(a_0)$, $\Delta(a_0,a_1)$, $\Delta(a_0,a_1,a_2)$ in the space $R^2$.

Wymiar sympleksu $\dim\Delta(a_0,\ldots,a_m)$ jest równy pomniejszonej o 1 liczbie jego wierzchołków.

Bezpośrednio z definicji sympleks jest zbiorem wypukłym. Sympleks jest również zbiorem ograniczonym.

Hiperpłaszczyznę $H(a_0,\ldots,a_m) \subset R^n$ wyznaczoną jednoznacznie przez zbiór wierzchołków $a_0,\ldots,a_m$ nazywamy hiperpłaszczyzną nośną sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_m)$.

Zbiór pusty przyjmujemy za hiperpłaszczyznę nośną sympleksu $\Delta(a_0)$, (-1)-wymiarowego.

Sympleks $\Delta(a_{i0},\ldots,a_{ik})$, $k\leq n$, nazywamy k-wymiarową ścianą sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_m)$. Przykładowo wierzchołki sympleksu są jego ścianami 0-wymiarowymi, krawędzie ścianami 1-wymiarowymi. Sam sympleks $\Delta(a_0,\ldots,a_m)$ jest swoją jedyną ścianą m-wymiarową.

Wnętrzem sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_m)$ względem jego hiperpłaszczyzny nośnej nazywamy zbiór:

$$\operatorname{int}\Delta = \left\{x\in R^n:\ x = \sum_{j=0}^{m} r^j a_j\ ,\ \text{gdzie } r^j > 0 \text{ dla } j=0,\ldots,m \text{ oraz } \sum_{j=0}^{m} r^j = 1\right\}$$

Brzegiem sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_m)$ względem jego hiperpłaszczyzny nośnej nazywamy zbiór $\operatorname{bd}\Delta = \Delta\backslash\operatorname{int}\Delta$.

Sympleks nieujemnego wymiaru ma niepuste wnętrze geometryczne.

Definicja D.2. Punkt $b=\int_{\Delta_n} x\,dx \,/ \int_{\Delta} dx$ nazywamy środkiem ciężkości n-wymiarowego sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_n)\subset R$, liczbę $v = \int_{\Delta} dx$ jego objętością.

Twierdzenie D.1. [18] Dla sympleksu $\Delta(a_0,\ldots,a_n)\subset R^n$ zachodzą związki:

$$b = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j \qquad v = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} a_0,\ldots,a_n \\ 1,\ldots,1 \end{bmatrix}$$

Definicja D.3. [18] Skończoną rodzinę $\mathcal{K}$ sympleksów w przestrzeni $R^n$ nazywamy kompleksem symplicjalnym, jeżeli:

i) rodzina $\mathcal{K}$ wraz z każdym sympleksem zawiera wszystkie jego ściany,

ii) przecięcie każdych dwu sympleksów rodziny $\mathcal{K}$ jest ich wspólną ścianą.

Jeżeli $\mathcal{K}$ jest niepustym kompleksem symplicjalnym, to liczbę $\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \Delta: \Delta \in \mathcal{K}\}$ nazywamy wymiarem, a liczbę $\operatorname{diam} \mathcal{K} = \max\{\operatorname{diam}\Delta: \Delta \in \mathcal{K}\}$ nazywamy średnicą kompleksu $\mathcal{K}$.

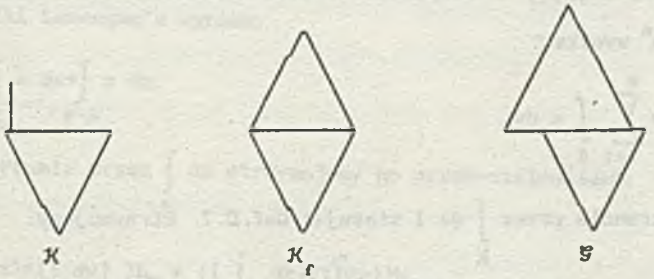
Twierdzenie D.2. [18]. Na to, by skończona rodzina $\mathcal{K}$ sympleksów w przestrzeni $R^n$ była kompleksem symplicjalnym potrzeba i wystarczy by:

i) rodzina $\mathcal{K}$ wraz z każdym sympleksem zawierała wszystkie jego ściany,

ii) wnętrza geometryczne różnych sympleksów rodziny $\mathcal{K}$ były rozłączne.

Definicja D.4. [18] Podzbiór $\mathcal{K}_0$ kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ nazywamy podkompleksem symplicjalnym, jeżeli $\mathcal{K}_0$ wraz z każdym sympleksem zawiera wszystkie jego ściany.

Definicja D.5. Kompleks symplicjalny $\mathcal{K}=\{\Delta_i(a_{0i},\ldots,a_{ni}) \in R^n: \dim \Delta_i = n, i=1,\ldots,k\}$ nazywamy kompleksem pełnowymiarowym, jeżeli wszystkie sympleksy $\Delta_i$ stanowiące kompleks $\mathcal{K}$ mają ten sam wymiar i jest on równy wymiarowi przestrzeni, w której są one określone.




Rys.D.2. Przykłady kompleksów symplicjalnych w $R^2$

Fig.D.2. Examples of simplitial complexes in $R^2$

Definicja D.6. Zbiór $U\{\Delta: \Delta\in\mathcal{K}\}$ nazywamy bryłą kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ i oznaczamy przez $\mathbb{K}$.

Definicja D.7. Niech $\mathcal{K}$ będzie pełnowymiarowym kompleksem symplicjalnym. Punkt $b_{\mathbb{K}}=\int_{\mathbb{K}} x\,dx/\int_{\mathbb{K}} dx$ nazywamy środkiem ciężkości bryły $\mathbb{K}$, zaś liczbę $v_{\mathbb{K}}=\int_{\mathbb{K}} dx$ jej objętością.

Definicja D.8. [18] Każdy podzbiór $\mathbb{X}\subset R^n$, dla którego istnieje kompleks symplicjalny taki, że $\mathbb{K}=\mathbb{X}$, nazywamy wielościanem. Kompleks $\mathcal{K}$ nazywamy triangulacją wielościanu $\mathbb{X}$.

Twierdzenie D.3. Niech $\mathcal{K}$ będzie pełnowymiarowym kompleksem symplicjalnym i niech $V_{\mathbb{K}}$, $b_{\mathbb{K}}$ oznaczają odpowiednio objętość i środek ciężkości bryły $\mathbb{K}$, zaś $V_{\Delta_i}$, $b_{\Delta_i}$, $i=1,\ldots,k$ objętość i środek ciężkości i-tego sympleksu w kompleksie $\mathcal{K}$. Zachodzi związek:

$$b_{\mathbb{K}} = \sum_{i=0}^{k} l_i b_{\Delta_i},$$

gdzie

$$l_j=V_{\Delta_i}/V_{\mathbb{K}}>0, \qquad \sum_{i=0}^{k} l_i=1.$$

Dowod. Z Def.D.6 bryły $\mathbb{K}$ kompleksu $\mathcal{K}$ oraz własności całki Lebesgue'a w przestrzeni $R^n$ wynika:

$$\int_{\mathbb{K}} x\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} x\,dx.$$

Dzieląc obustronnie przez $\int_{\mathbb{K}} dx$ i stosując Def.D.7. otrzymujemy:

$$b_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\left(\int_{\Delta_i} dx\right)/\left(\int_{\mathbb{K}} dx\right)\right)\left(\int_{\Delta_i} x\,dx\right)/\left(\int_{\Delta_i} dx\right).$$

Stąd na podstawie Def.D.7 środka ciężkości sympleksu i przy oznaczeniach:

$$l_i = v_{\Delta_i} / v_K, \qquad v_{\Delta_i} = \int_{\Delta_i} dx, \quad i=1,\dots,k, \qquad v_K = \int_K dx, \ .$$

otrzymujemy podstawową tezę.

Dodatkowo, ponieważ $v_{\Delta_i}$, $v_K$ są miarami, $v_{\Delta_i} > 0$ zaś $v_K$ jest skończona, to $l_i > 0$ oraz zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = \frac{1}{v_K} \sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} dx = \frac{1}{v_K} \int_K dx = 1.$$

Twierdzenie D.4. Niech $\mathcal{K}$ będzie pełnowymiarowym kompleksem symplicjalnym, $\mathcal{K}_0$ jego podkompleksem, zaś $\mathcal{K}\setminus\mathcal{K}_0$ dopełnieniem podkompleksu $\mathcal{K}_0$ do $\mathcal{K}$. Niech $v_K$, $v_{K_0}$, $v_{K\setminus K_0}$ oznaczają objętości, zaś $b_K$, $b_{K_0}$, $b_{K\setminus K_0}$ środki ciężkości odpowiednio brył $K$, $K_0$, $K_0\setminus K$. Zachodzi związek:

$$b_K = l_1 b_{K_0} + l_2 b_{K\setminus K_0},$$

gdzie

$$l_1 = V_{K_0} / V_K,$$

$$l_2 = V_{K\setminus K_0} / V_K,$$

$$l_1 + l_2 = 1.$$

Dowód. Z Def.D.3 kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$, jego podkompleksu $\mathcal{K}_0$ oraz własności całki Lebesgue'a wynika:

$$\int_K x\,dx = \int_{K_0} x\,dx + \int_{K\setminus K_0} x\,dx.$$

Dzieląc obustronnie przez $\int_K dx$ otrzymujemy po przekształceniach:

$$b_K = \left(\left(\int_{K_0} dx\right)/\left(\int_K dx\right)\right) b_{K_0} + \left(\left(\int_{K\setminus K_0} dx\right)/\left(\int_K dx\right)\right) b_{K\setminus K_0},$$

gdzie:

$$l_1 = \left(\int_{K_0} dx\right) / \left(\int_K dx\right), \quad l_2 = \left(\int_{K\setminus K_0} dx\right) / \left(\int_{K\setminus K_0} dx\right),$$

oraz bezpośrednio z powyższych oznaczeń $l_1+l_2=1$.

Definicja D.9. [18] Ograniczony zbiór $Q\subset R^n$ będący przecięciem skończonej liczby półprzestrzeni domkniętych $P_i=\{x\in R^n: c_i'x\leq d_i\}$ $i=1,\ldots,m$ nazywamy komórką.

Ponieważ przestrzeń domknięta jest zbiorem wypukłym i przecięcie skończonej liczby zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, to komórka jest zbiorem wypukłym.

Niech $Q\subset R^n$ będzie komórką, punkty $a_0,\ldots,a_m\in Q$ niech stanowią maksymalnie liczny zbiór afinicznie niezależny zawarty w Q i niech $H(a_0,\ldots,a_m)$ będzie hiperpłaszczyzną określoną przez te punkty. Hiperpłaszczyznę H nazywamy hiperpłaszczyzną nośną komórek Q, a jej wymiar nazywamy wymiarem geometrycznym komórki Q i oznaczamy symbolem dim Q. Zbiór pusty przyjmujemy za hiperpłaszczyznę nośną komórki pustej i przyjmujemy dim $\phi$ = -1.

Wnętrzem geometrycznym intQ i brzegiem bdQ komórki Q rozumiemy jej wnętrze i ograniczenie względem hiperpłaszczyzny nośnej.

Definicja D.10. Skończoną rodzinę $\mathcal{K}$ komórek w przestrzeni $R^n$ nazywamy kompleksem komórkowym, jeżeli:

i) brzeg każdej komórki $Q\in\mathcal{K}$ jest sumą komórek należących do $\mathcal{K}$,

ii) przecięcie każdych dwu komórek $Q_1$, $Q_2\in\mathcal{K}$ należy do $\mathcal{K}$,

iii) wnętrza geometryczne różnych komórek rodziny $\mathcal{K}$ są rozłączne.

Definicja D.11. Zbiór $U\{Q: Q\in\mathcal{K}\}$ nazywamy bryłą kompleksu komórkowego $\mathcal{K}$ i oznaczamy przez K.

Definicja D.12. [18] Kompleks komórkowy $\mathcal{K}_1$ nazywamy podziałem kompleksu komórkowego $\mathcal{K}$, jeżeli:

i) $|\mathcal{K}_1|=|\mathcal{K}|$,

ii) dla każdej komórki $Q_1\in\mathcal{K}_1$ istnieje taka komórka $Q\in\mathcal{K}$, że $Q_1\subset Q$.

Twierdzenie D.5. [18] Każdy kompleks komórkowy ma podział, który jest kompleksem symplicjalnym.

# Rozdział 4

# ZBIORY INFORMACYJNE TYPU R

*Zbiory informacyjne typu R są szczególnie zorientowane na przypadek, w którym model układu dynamicznego podlegającego sterowaniu wyrażony jest w konwencji zmiennych stanu, stąd jedną z "blokowych współrzędnych" przestrzeni wektorowej, w której określone są te zbiory, jest wektor stanu. Jeżeli zbiór R i odpowiadający mu zbior warunkowy spełniają pewne warunki symetrii, to rzut ortogonalny środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń stanów jest równy środkowi ciężkości rzutu ortogonalnego tego zbioru na podprzestrzeń stanów.*

*Przykładowo właściwość taka ma miejsce dla zbiorów elipsoidalnych. Dodatkowo możliwe jest również uzyskanie dla takich zbiorów rekurencyjnych zależności pomiędzy określającymi je parametrami, tj. środkiem ciężkości i dodatnio określoną macierzą odpowiedniej formy kwadratowej. Otrzymane zależności są z dokładnością do czynnika liczbowego identyczne z równaniami filtru Kalmana.*

## 1. Definicje i podstawowe własności

Wyróżnia się niesterowany (swobodny) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{o,k+1} = Ax_{o,k} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{o,k} = Cx_{o,k} + v_k \end{cases} \tag{1}$$

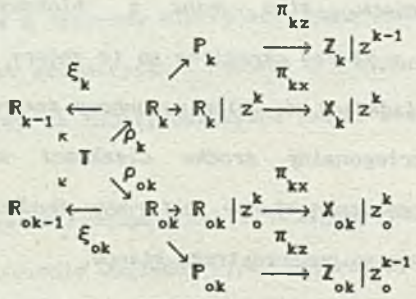
oraz sterowany (wymuszony) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \; ; \; x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{2}$$

gdzie w obydwu przypadkach: $x_{o,k+1}$, $x_k$, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_{o,k+1}$, $z_k$, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje $A^{-1}$.

Rozróżnienie powyższe jest istotne dla liniowego i stacjonarnego układu dynamicznego. Pomiędzy zbiorami informacyjnymi odpowiadającymi wyróżnionym przypadkom zachodzą wtedy proste zależności typu translacji (patrz p.2).

Szczegółową strukturę rodziny zbiorów typu R przedstawia rys.1.




Rys.1. Struktura rodziny zbiorów informacyjnych typu R

Fig.1. Structure of the family of the information sets of type R

Definicja 1. Określone dla każdego $k \in H$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\rho_{ok}: R^d \to R^d$, d=n+nN+pN, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k, v^k) \in R^d$ punkt $(r_{ok}, z_o^k) \in R^d$, gdzie $s_k=(x_1, w^N, v^{N/k})$, $r_{ok}=(x_{ok}, w^N, v^{N/k})$, nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\rho_{ok}$ przekształca dany zbior $T \subset R^d$ w:

$$R_{ok} = \rho_{ok}(T) = \{(r_{ok}, z_o^k): (r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k) \,|\, (s_k, v^k) \in T\} \subset R^d$$

Zbior $R_{ok}$ nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi T zgodnie z odwzorowaniem $\rho_{ok}$.

Twierdzenie 1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1), to dla każdego $k \in H$

i) odwzorowanie $\rho_{ok}$ jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} = \rho_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix},$$

gdzie

$$r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k}) \qquad s_k = (x_1, w^N, v^{N \setminus k})$$

$$G_p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_p = \begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = A^{k-1}$$

$$P_{12} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} A^{k-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]}_{\text{k macierzy}} \quad \underbrace{\phantom{\left[\begin{array}{ccc|ccc} A^{k-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]}}_{\text{N-k macierzy}}$$

$$P_{41} = \left[\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{array}\right] \Big\} \text{ k wierszy macierzowych}$$

$$P_{42} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\text{k kolumn} \\ \text{macierzowych}}} \quad \underbrace{\phantom{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right]}}_{\substack{\text{N-k kolumn} \\ \text{macierzowych}}}$$

ii) odzworowanie odwrotne $\rho_{ok}^{-1}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \rho_{ok}^{-1}(r_{ok}, z_o^k) = \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix},$$

gdzie

$$G_r=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_r=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{42} \end{bmatrix}$$

oraz

$$D_{11}=P_{11}^{-1} \qquad D_{12}=-P_{11}^{-1}P_{12}$$

$$D_{41}=-P_{41}P_{11}^{-1} \qquad D_{42}=P_{41}P_{11}^{-1}P_{12}-P_{42}\ .$$

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika z zależności:

$$x_{ok}=A^{k-1}x_1+\sum_{i=1}^{k-1}A^{k-1-i}w_i,$$

$$z_{oj}=C(A^{j-1}x_1+\sum_{i=1}^{j-1}A^{j-1-i}w_i)+v_j, \quad j=1,\ldots,k,$$

zapisanych w postaci macierzowej. Te same zależności rozwikłane względem $x_1$ i ciągu zmiennych $v^k$ dają postać odwzorowania odwrotnego. Związki pomiędzy macierzami $D_{11}$, $D_{12}$, $D_{41}$, $D_{42}$ a $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{41}$, $P_{42}$ wynikają z tożsamości:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ P_{41} & P_{42} & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ D_{41} & D_{42} & & 1 \end{bmatrix}=1\ .$$

Twierdzenie 2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) to dla każdego $k\in H$ zachodzi

$$|\det J_{\rho_{ok}}|=|\det A^{k-1}|,$$

gdzie

$$J_{\rho_{ok}}=\partial\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix}/\partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\rho_{ok}$.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania $\rho_{ok}$ jest tożsama z macierzą (Tw.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy $P_{11}=A^{k-1}$.

Wniosek 1. Niech $d(r_{ok}, z_o^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie zgodnie z odwzorowaniem $\rho_{ok}$ objętosciami elementów różniczkowych zbiorów $R_k$, T. Dla każdego k∈H zachodzi:

$$d(r_{ok}, z_o^k) = |\det A^{k-1}| d(s_k, v^k).$$

Definicja 2. Określone dla każdego k∈H wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\rho_k: R^d \to R^d$, d=n+nN+pN, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k, v^k) \in T \subset R^d$ punkt $(r_k, z^k) \in R^d$, gdzie $s_k = (x_1, w^N, v^{N\setminus k})$, $r_k = (x_k, w^N, v^{N\setminus k})$, nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\rho_k$ zależy od praw sterowania $u_i(z^i)$, i=1,...,k-1 i przekształca dany zbiór $T \subset R^d$ w:

$$R_k = \rho_k(T) = \left\{ (r_k, z^k) : (r_k, z^k) = \rho_k(s_k, v^k) \mid (s_k, v^k) \in T \right\} \subset R^d.$$

Twierdzenie 3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, i=1,...,k-1 to dla każdego k∈H odwzorowanie $\rho_k$ określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1(z^{k-1}) \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix},$$

gdzie: $(r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k)$,

$$p_1(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i),$$

$$\underline{p}_1'(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} p_1'(z^{k-1}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{Nn+(N-p)p} \end{bmatrix},$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i) \end{bmatrix}.$$

Dowod. Wykorzystując zależnosc

$$x_k = x_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

oraz zależnosc:

$$z_j = z_{oj} + C \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i} B u_i(z^i)$$

dla j=1,...,k otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowej tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania $\rho_k$ wymaga rozwikłania zależności z Tw.3 względem $z^k$, co jest możliwe w pewnych przypadkach. Jednego z nich dotyczy następujące

Twierdzenie 4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) i funkcje $u_k = u_k(z^k)$, $k \in H$ są liniowe, to odwzorowanie $\rho_k$ jest liniowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix},$$

gdzie

$$L_{11} = G_p + N(1-M)^{-1} H_p, \quad L_{12} = N(1-M)^{-1}$$

$$L_{21} = (1-M)^{-1} H_p, \quad L_{22} = (1-M)^{-1}$$

$$N = [\, N_{k,1}, \ldots, N_{k,k-1}, \; 0 \,]$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ M_{21} & & \\ \vdots & & \\ M_{k1} & \ldots & M_{k,k-1} \; 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze $G_p$, $H_p$ określone są jak w Tw.1.

Dowod. Przy założeniu liniowych funkcji $u_k(z^k)$, $k \in H$, składniki, $p(z^{k-1})$, $p(z^{k-1})$, przedstawić można w postaciach:

$$p_1(z^{k-1}) = [N_{k,1},\ldots,N_{k,k-1},\ 0\ ]\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = N\,z^k$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ M_{21} & & \\ \vdots & & \\ M_{k1} & \ldots\ M_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = M\,z^k$$

Wykorzystując powyższe postaci w Tw.3 otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -N \\ 0 & 1-M \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_p + N\,(1-M)^{-1}H_p & N\,(1-M)^{-1} \\ (1-M)^{-1}H_p & (1-M)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 5. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) to dla każdego $k\in H$ i dowolnych funkcji $u_i(z^1)$, $i=1,\ldots,k-1$ zachodzi

$$|\det J_{\rho_k}| = |\det J_{\rho_{ok}}| = |\det A^{k-1}|,$$

gdzie $J_{\rho_k} = \partial\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $p_k$.

Dowód. Wprowadzając pomocnicze odwzorowania $\mu_k$, $\kappa_k$ można macierz Jacobiego $J_{\rho_k}$ przedstawić w postaci $J_{\rho_k} = J_{\kappa_k} J_{\mu_k}$, gdzie:

$$J_{\mu_k} = \partial\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}, \qquad J_{\kappa_k} = \partial\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}.$$

Odwzorowanie $\mu_k$ określone jest niejawnie (por.Tw.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Macierz $H_p$ i funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w Tw.1, 3

$$J_{\mu_k^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1+\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k \end{bmatrix}.$$

Dla założonej struktury informacyjnej praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\ldots,k-1$ mamy:

$$\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k = \begin{bmatrix} & 0 \\ \#0 & \end{bmatrix}.$$

Stąd $\det J_{\mu_k^{-1}} = \det J_{\mu_k} = 1$.

Odwzorowanie $\kappa_k$ określone jest niejawnie (por. Tw.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1(z^{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz $G_p$ jest określona w Tw.1, funkcja wektorowa $\underline{p}_1(z^{k-1})$ w Tw.3

$$J_{\kappa_k} = \begin{bmatrix} G_p & \partial \underline{p}_1(z^{k-1})/\partial z^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det J_{\kappa_k} = \det G_p = \det P_{11} = \det A^{k-1}$$

Ostatecznie $\det J_{\rho_k} = \det J_{\kappa_k} \det J_{\mu_k} = \det A^{k-1}$, co kończy dowód.

Wniosek 2. Niech $d(r_k, z^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie według odwzorowania $\rho_k$ objętościami elementów różniczkowych zbiorów $\mathbb{R}_k$, T. Dla każdego $k \in H$ i dla dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\ldots,k-1$ zachodzi

$$d(r_k, z^k) = d(r_{ok}, z^k_o) = |\det A^{k-1}| d(s_k, v^k).$$

Definicja 3. Niech dla każdego k∈H będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $\xi_{ok}: R^d \to R^d$, d=n+nN+pN, przyporządkowujące punktowi

$$(r_{ok}, z_o^k) = (x_{ok}, w^N, v^{N\setminus k}, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in R_{ok} \subset R^d$$

punkt

$$(r_{ok-1}, z_o^{k-1}) = (x_{ok-1}, w^N, v^{N\setminus k}, v_k, z_o^{k-1}) \in R_{ok-1} \subset R^d.$$

Odwzorowanie $\xi_{ok}$ przekształca dany zbiór $R_{ok}$ w:

$$R_{ok-1} = \xi_{ok}(R_{ok}) = \left\{ (r_{ok-1}, z_o^{k-1}) : (r_{ok-1}, z_o^{k-1}) = \xi_{ok}(r_{ok}, z_o^k) \mid (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok-1} \right\}$$

Twierdzenie 6. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) to dla każdego k∈H odwzorowanie $\xi_{ok}$ ma następującą postać:

$$r_{ok-1}\left\{ \begin{bmatrix} x_{ok-1} \\ w^{k-2} \\ w_{k-1} \\ w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ -C & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-2} \\ w_{k-1} \\ w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} \right\} r_{ok}$$

Dowod. Postać odwzorowania $\xi_{ok}$ wynika bezpośrednio z zależności:

$$x_{ok-1} = A^{-1}x_{ok} - A^{-1}w_{k-1}, \qquad v_k = z_{ok} - Cx_{ok}.$$

Twierdzenie 7. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1), to dla każdego k∈H zachodzi:

$$|\det J_{\xi_{ok}}| = |\det A^{-1}|,$$

gdzie $J_{\xi_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} r_{ok-1} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\xi_{ok}$.

Dowod. Macierz Jacobiego odwzorowania $\xi_{ok}$ jest równa macierzy reprezentującej to odwzorowanie (Tw.6). Jej wyznacznik wynosi:

$$\det A^{-1} = 1/\det A.$$

Wniosek 3. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania $\xi_{ok}$ elementów różniczkowych zbiorów $R_{ok-1}$, $R_{ok}$ zachodzi związek:

$$d(r_{ok-1}, z_o^{k-1}) = |\det A^{-1}| d(r_{ok}, z_o^k).$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $R_{ok-1}|z_o^{k-1}$, $R_{ok}|z_o^{k-1}$, (patrz p.2), zachodzi związek:

$$dr_{ok-1} = |\det A^{-1}| dr_{ok} dz_{ok}.$$

Definicja 4. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\xi_k: R^d \to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące punktowi $(r_k, z^k) = (x_k, w^N, v^{N\setminus k}, z_k, z^{k-1}) \in R_k \subset R^d$ punkt $(r_{k-1}, z^{k-1}) = (x_{k-1}, w^N, v^{N\setminus k}, v_k, z^{k-1}) \in R_{k-1} \subset R^d$.

Odwzorowanie $\xi_k$ przekształca zbiór $R_k$ w zbiór $R_{k-1} = \xi_k(R_k)$ i zależy od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Twierdzenie 8. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie $\xi$ określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ w^{k-2} \\ w_{k-1} \\ w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ v_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ -C & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w^{k-2} \\ w_{k-1} \\ w^{N\setminus k-1} \\ v^{N\setminus k} \\ z_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^{-1}Bu_{k-1}(z^{k-1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dowod. Postać odwzorowania $\xi_k$ wynika z zależności:

$$x_{k-1} = A^{-1}x_k - A^{-1}w_{k-1} - A^{-1}Bu_{k-1}(z^{k-1}),$$

$$v_k = z_k - Cx_k.$$

Twierdzenie 9. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1) to dla każdego $k \in H$ i dla dowolnej funkcji $u_k(z^{k-1})$ zachodzi:

$$|\det J_{\xi_k}| = |\det J_{\xi_{ok}}| = |\det A^{-1}|,$$

gdzie: $J_{\xi_k} = \partial \begin{bmatrix} r_{k-1} \\ z^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\xi_k$.

Dowod. Rozpisując szczegółowo macierz $J_{\xi_k}$ mamy odpowiednio do postaci z Tw.9:

$$J_{\xi_k} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & D(z^{k-1}) \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ -C & & & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $D(z^{k-1}) = -AB\, \partial u_{k-1}(z^{k-1})/\partial z^{k-1}$. Ze struktury macierzy $J_{\xi_k}$ wynika

$$\det J_{\xi_k} = A^{-1},$$

Wniosek 4. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania $\xi_k$ elementów różniczkowych zbiorów $R_{k-1}$, $R_k$ zachodzi związek:

$$d(r_{k-1}, z^{k-1}) = |\det A^{-1}|\, d(r_k, z^k).$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $R_{k-1}|z^{k-1}$, $R_k|z^{k-1}$, (patrz p.2), zachodzi związek:

$$dr_{k-1} = |\det A^{-1}|\, d(r_k, z_k).$$

## 2. ZBIORY WARUNKOWE I RZUTY

Definicja 5. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór $R_{ok}$ o elementach $(r_{ok}, z_o^k)$. Dla ustalonego $z_o^k$ zbiór $R_{ok}|z_o^k = \{(r_{ok}) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru $R_{ok}$ przy warunku $z_o^k$.

Zbiór $R_{ok}|z_o^k$ można interpretować geometrycznie jako rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych $r_{ok}$ "przekroju" danego zbioru $R_{ok}$ hiperpłaszczyzną (w przestrzeni zmiennych $(r_{ok}, z_o^k)$) $z_o^k = \text{const}$.

Definicja 6. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór $R_{ok}$ o elementach $(r_{ok}, z_o^k)$. Zbiór $P_{ok} = \pi_{zk}(R_{ok}) = \{(z_o^k): (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy rzutem ortogonalnym zbioru $R_{ok}$ na przestrzeń zmiennych $z_o^k$.

Zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1} = \{z_{ok}: (z_{ok}, z_o^{k-1}) \in P_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji $z_{ok}$ dla danego ciągu obserwacji $z_o^{k-1}$.

Definicja 7 Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k$ o elementach $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k})$. Zbiór

$$X_{ok}|z_o^k = \pi_{x_{ok}}(R_{ok}|z_o^k) = \{(x_{ok}): r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k}) \in R_{ok}|z_o^k\}$$

nazywamy warunkowym zbiorem stanów.

Pomijając w Def.5-7 indeks "o" otrzymujemy definicje zbiorów $R_k|z^k$, $P_k$, $Z_k|z^{k-1}$, $X_k|z^k$.

Twierdzenie 10. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1), (2), to pomiędzy zbiorami $R_{ok}|z_o^k$, $R_k|z^k$ zachodzi związek:

$$R_k|z^k = \underline{p}_1(z^{k-1}) + R_{ok}|z_o^k,$$

gdzie $z_o^k = z^k - p_4(z^{k-1})$, a funkcje wektorowe $\underline{p}_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w Tw.3.

Dowod. Dla każdego $k \in H$ odwzorowanie $\rho_k$ (Def.2) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1(z^{k-1}) \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Zbiór warunkowy $R_k|z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość $z^k$ już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym $z^k$ również ustalone jest $z^{k-1}$ to $p_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$ są wektorami liczbowymi co prowadzi do słuszności tezy. Zauważmy, że w opisany sposób nie można wyznaczyć zbioru $R_k|z^{k \setminus 1}$ gdzie

$1 \le l \le k$ przy niezmienionej definicji zbioru $R_k$ i funkcji wektorowych $p_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$. Wynika stąd, że przy ustalonym $z^{k\setminus l}$ dla $1 \le l \le k$ nie jest ustalone $z^{k-1}$.

Wniosek 5. Pomiędzy zbiorami $X_k|z^k$, $X_{ok}|z_o^k$ zachodzi związek:

$$X_k|z^k = p_1(z^{k-1}) + X_{ok}|z_o^k.$$

Dowód. Prawdziwość wniosku wynika z Tw.3 i definicji zbiorów $X_{ok}|z_o^k$, $X_k|z^k$ jako rzutów ortogonalnych zbiorów $R_{ok}|z_o^k$, $R_k|z^k$ na przestrzenie zmiennych $x_{ok}$, $x_k$. Rzutem wektora $p_1(z^{k-1})$ na przestrzenie zmiennych $x_{ok}$, $x_k$ jest wektor $p_1(z^{k-1})$.

Twierdzenie 11. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (1), (2), to pomiędzy zbiorami $Z_{ok}|z_o^{k-1}$, $Z_k|z^{k-1}$ zachodzi związek:

$$Z_k|z^{k-1} = p_{4k}(z^{k-1}) + Z_{ok}|z_o^{k-1}$$

gdzie

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u_1(z^i)$$

Dowód. Dla każdego $k \in H$ przy ustalonym $z^{k-1}$, $p_{4k}(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k = z_{ok} + p_{4k}(z^{k-1})$.

## 3. Rzut środka ciężkości zbioru i środek ciężkości rzutu zbioru

Bezpośrednio z definicji środkiem ciężkości zbioru $R_{ok}$ jest wektor blokowy

$$[\hat{x}_{ok}', \hat{w}^{N'}, \hat{v}^{N\setminus k'}] = \int_{R_{ok}|z_o^k} [x_{ok}', w^{N'}, v^{N\setminus k'}]\, dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok}, \tag{3}$$

którego z kolei rzutem na przestrzeń zmiennych $x_{ok}$ jest wektor $\hat{x}_{ok}$. Biorąc pod uwagę wysoką wymiarowość zbioru $R_{ok}|z_o^k$ istotnym uproszczeniem zadania wyznaczania zdefiniowanego jak powyżej wektora $\hat{x}_{ok}$ jest zamiana kolejności

wykonywanych operacji, tj. zbiór $R_{ok}|z_o^k$ najpierw rzutuje się na przestrze zmiennych $x_{ok}$ otrzymując zbiór $X_{ok}$, a następnie wyznacza się środe ciężkości tego zbioru. Przypadek, w którym opisana powyżej zmiana kolejności jest możliwa, nazywamy przypadkiem efektywnym ze względu na zastosowanie techniki przestrzeni stanów [12]. W przypadku efektywnym mamy zatem:

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}\,dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok} = \int_{X_{ok}} x_{ok}\,dx_{ok} \Big/ \int_{X_{ok}} dx_{ok}. \qquad (4)$$

Inaczej, oznacza to, że w przypadku ogólnym do wyznaczenia oceny $\hat{x}_{ok}$ potrzebna jest znajomość pełnego zbioru warunkowego $R_{ok}|z_o^k$, podczas gdy w przypadku efektywnym wystarczy znajomość zbioru $X_{ok}$ będącego rzutem ortogonalnym zbioru $R_{ok}|z_o^k$ na podprzestrzeń zmiennych $x_{ok}$.

Ustalenie warunków, przy których zachodzi (4), jest, przedmiotem dalszych rozważań.

Niech będzie dany zbiór $A = \{(x,y): (x,y)\in R^{n+1}\}$ oraz zdefiniujmy:

i) zbiór $Y|x = \{y: (x,y)\in A\}$ będący przekrojem zbioru A ustaloną wartością x,

ii) zbiór $X = \pi_x(A) = \{x: (x,y)\in A\}$ będący rzutem ortogonalnym zbioru A na przestrzeń zmiennych x.

Na podstawie twierdzenia o całce iterowanej mamy:

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_X x \left(\int_{Y|x} dy\right) dx = \int_X x\,g(x)\,dx\,, \quad \int_A dx\,dy = \int_X \left(\int_{Y|x} dy\right) dx = \int_X g(x)\,dx$$

gdzie $g(x) = \int_{Y|x} dy$ jest interpretowana jako funkcja wagowa.

Lemat 1. Jeżeli środkiem symetrii zbioru X jest punkt $x_s$ i równocześnie dla każdego $x\in X$, $g(x) = g(2x_s - x)$, to

$$\int_X x\,g(x)\,dx \Big/ \int_X g(x)\,dx = \int_X x\,dx \Big/ \int_X dx = x_s.$$

Dowód. Wprowadzając zmienne $z = x - x_s$ umieszczamy początek nowego układu współrzędnych w punkcie $x_s$. Mamy:

$$\int_X xg(x)dx = \int_Z (z+x_s)g(z+x_s)dz = \int_Z zg(z+x_s)\,dz + x_s \int_Z g(z+x_s)dz \qquad (a)$$

$$\int_X g(x)dx = \int_Z g(z+x_s)dz, \qquad (b)$$

gdzie zbiór Z jest symetryczny względem początku układu i dla $z \in Z$, $g(z+x_s) = g(-z+x_s)$. Na tej podstawie:

$$\int_Z z\, g(z + x_s)dz \equiv 0. \qquad (c)$$

Dzieląc wyrażenie (a) przez (b) przy uwzględnieniu warunku (c) otrzymujemy $x_s$. Równocześnie z warunku symetrii zbioru X względem punktu $x_s$, mamy $\int_X x\,dx \,/\, \int_X dx = x_s$ co kończy dowód.

Lemat 1 określa, jakie warunki spełniać muszą zbiór X i funkcja wagowa g(x). Interesujące jest określenie wystarczających warunków dla zbioru A. Dotyczy tego

Lemat 2. Jeżeli środkiem symetrii zbioru A jest punkt $(x_s, y_s)$, to środkiem symetrii zbioru X jest punkt $x_s$ oraz dla każdego $x \in X$, $g(x) = g(2x_s - x)$.

Dowód. Pierwsza część lematu wynika bezpośrednio z definicji symetrii środkowej i rzutu ortogonalnego zbioru A na podprzestrzeń zmiennych x. Dla uzasadnienia drugiej części lematu wystarczy zauważyć, że ze względu na symetrię zbioru A miary zbiorów $Y|x$, $Y|(2x_s - x)$ są równe.

Podsumowując można stwierdzić, że jeżeli zbiór A posiada symetrię środkową, to przy wyznaczaniu środka ciężkości jego rzutu X na podprzestrzeń zmiennych x funkcja wagowa g(x) może być pominięta.

Obecnie możemy sformułować warunki, przy których zachodzi zależność (4). Precyzuje je

Twierdzenie 12. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone $\hat{x}_{ok}$ jak w (3) oraz funkcja

$$g_k(z_o^k, x_{ok}) = \int_{R_{ok}|z_o^k, x_{ok}} d(w^N, v^{N\setminus k}).$$

Jeżeli

i) dla każdego $z_o^k \in P_k = \pi_{z^k}(R_{ok})$ i każdego $x_{ok} \in X_{ok} = \pi_{x_{ok}}(R_{ok}|z_o^k)$ istnieje ustalone $x_s$ takie, że $g_k(z_o^k, x_{ok}) = g_k(z_o^k, 2x_s - x_{ok})$,

ii) $x_s = \int_{X_{ok}} x_{ok}\, dx_{ok} \Big/ \int_{X_{ok}} dx_{ok}$

to $\hat{x}_{ok} = x_s$.

Dowód. Bezpośrednie zastosowanie Lematu 1.

Twierdzenie 13. Jeżeli dla każdego $z_o^k \in P_k = \pi_{z^k}(R_{ok})$ zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k$ posiada symetrię środkową względem punktu $[\hat{x}_{ok}', \hat{w}^{N'}, \hat{v}^{N\setminus k'}]$, to również zbiór $X_{ok} = \pi_{ok}(R_{ok}|z_o^k)$ posiada symetrię środkową względem punktu $\hat{x}_{ok}'$, a funkcja $g_k(z_o^k, x_{ok})$ spełnia warunek i) z Tw. 12.

Dowód. Zastosowanie Lematu 2.

Warunki efektywności techniki przestrzeni stanu przedstawione w Tw. 13 są silne. Przykładowo, warunki te są spełnione, jeżeli zbiór T jest zbiorem elipsoidalnym. Wtedy bowiem zbiory $R_{ok}$, $R_{ok}|z_o^k$ są również elipsoidalne (patrz punkt 4.) i dla zbioru $R_{ok}|z_o^k$ spełnione są warunki symetrii. Kontynuując przykład zauważmy, że jeżeli zbiór T jest wielościanem o symetrii środkowej (patrz rozdz. 3), to symetrię środkową posiada również zbiór $R_{ok}$, jednak nie posiada jej już zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k$ dla każdej wartości $z_o^k$.

## 4. Parametryzacja zbiorów elipsoidalnych

Szczególnym i ważnym przypadkiem rozpatrywanych dotychczas zbiorów są zbiory elipsoidalne. Dalej będziemy je oznaczać symbolem $E(m,M)$, gdzie parametry $m$, $M>0$ odpowiadają kolejno środkowi elipsoidy i istotnie dodatnio określonej macierzy odpowiedniej formy kwadratowej. Wybrane własności zbiorów elipsoidalnych zawiera Dodatek p.6.

Zbiory elipsoidalne posiadają dwie własności podstawowe dla rozpatrywanego w pracy problemu syntezy praw sterowania. Pierwsza z nich polega na tym, że założenie elipsoidalnego zbioru $\bar{T}$ implikuje dla każdego $k\in H$ elipsoidalność zbiorów $\mathbb{R}_{ok}$, $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$, $\mathbb{X}_{ok}$, drugą jest symetria środkowa szczególnie istotna dla zbioru warunkowego $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ (patrz Tw.13). Pierwszej z wymienionych własności dotyczy

Twierdzenie 14.

Jeżeli:

i) układ dynamiczny dany jest w postaci:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases}$$

gdzie $k\in H$ i istnieje $A^{-1}$,

ii) $\bar{T} = E(\bar{t},T)$, gdzie $\bar{t}' = [\bar{x}_1', \bar{w}^{N'}, \bar{v}^{N'}]\in R^d$, $0<T\in R^{dxd}$, $d=n+nN+pN$,

to dla każdego $k\in H$

1) $\mathbb{R}_{ok} = E(m_k, \Gamma_k)$,

gdzie

$$m_k = \begin{bmatrix} G_r & O \\ H_r & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ok|o} \\ z_o^k \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} G_r' & H_r' \\ O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_r & O \\ H_r & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{k|k}^{-1} & G_{k|k} \\ G_{k|k}' & U_{22} \end{bmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad T_{12} = T_{21}', \quad U_{12} = U_{21}',$$

$$U_{11}, T_{11} \in R^{(d-k)x(d-k)}, \quad U_{12}, T_{12} \in R^{(d-k)xk}, \quad U_{22}, T_{22} \in R^{kxk}$$

oraz macierze $G_r, H_r$ określone są jak w Tw.1,

ii) $R_{ok|z_o^k} = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k)R_{k|k})$

gdzie:

$$\hat{r}_{ok|k} = \bar{r}_{ok|o} - R_{k|k} G_{k|k} (z_o^k - \bar{z}_o^k),$$

$$\bar{r}'_{ok|o} = [\bar{x}'_k, \bar{w}^{k-1\prime}, \bar{w}^{N\backslash k-1\prime}, \bar{v}^{N\backslash k\prime}],$$

$$\bar{z}_o^k = P_{41}\bar{x}_1 + \bar{P}_{12}\bar{w}^{k-1},$$

$$c_k(z_o^k) = 1 - (z_o^k - \bar{z}_o^k)'(U_{22} - G'_{k|k} R_{k|k} G_{k|k})(z_o^k - \bar{z}_o^k),$$

$$P_{12} = [\bar{P}_{12}, 0].$$

macierze $R_{k|k}$, $G_{k|k}$, $U_{22}$ określone są jak w i), zaś macierze $P_{12}$, $P_{41}$ jak w Tw.1.

Dowód. Podstawowa idea dowodu jest prosta i opiera się na tym, że dla każdego $k \in H$ zbiór informacyjny $R_{ok}$ jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem liniowym zbioru T oraz że "przekrój" zbioru elipsoidalnego jest nadal zbiorem elipsoidalnym. Jawne natomiast wyznaczenie zależności pomiędzy parametrami zbiorów T, $R_{ok}$, $R_{ok|z_o^k}$ wymaga złożonych zapisów. Na podstawie Def.1; Tw.1 (kolejno określenie i postać odwzorowania $\rho_{ok}$), oraz Tw.D.1 (liniowe przekształcenia zbioru elipsoidalnego) otrzymujemy, że dla każdego $k \in H$ zbiór $R_{ok} = E(m_k, \Gamma_k)$, gdzie

$$m_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{ok} \\ \bar{w}^{k-1} \\ \bar{w}^{N\setminus k} \\ \bar{v}^{N\setminus k} \\ \bar{z}^{k}_{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \bar{P}_{12} & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ P_{41} & \bar{P}_{42} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{w}^{k-1} \\ \bar{w}^{N\setminus k-1} \\ \bar{v}^{N\setminus k} \\ \bar{v}^{k} \end{bmatrix}$$

W powyższym zapisie wykorzystano zmodyfikowane (w stosunku do określonych w Tw.1) postacie macierzy $P_{12}$, $P_{42}$ uwzględniające fakt, że pewne ich bloki są macierzami zerowymi, tj. $P_{12} = [\bar{P}_{12}, 0]$, $P_{42} = [\bar{P}_{42}, 0]$.

Podobnie, wykorzystując postać odwzorowania $\rho_{ok}^{-1}$ (Tw.1), mamy:

$$\Gamma_k^{-1} = \begin{bmatrix} G_r' & H_r' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_r'U_{11}G_r + 2G_r'U_{12}H_r + H_r'U_{22}H_r, & G_r'U_{12} + H_r'U_{22} \\ U_{21}G_r + U_{22}H_r, & U_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_{k|k} & G_{k|k} \\ G_{k|k}' & U_{22} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

gdzie

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

oraz odpowiednio do wartości k, $T_{11}$, $U_{11} \in R^{(d-k)x(d-k)}$, $T_{12}$, $U_{12} \in R^{(d-k)xk}$, $U_{22}$, $T_{22} \in R^{kxk}$, d=n+nN+pN.

Inaczej, macierze T i U przedstawiamy w postaci macierzy blokowych o wymiarach bloków zależnych od aktualnej wartości k. Odpowiednio do tego bloki o takich samych wymiarach występują w macierzy $\Gamma_k^{-1}$ określającej zbiór $R_{ok}$, i dla wygody dalszych zapisów pierwszy z jej bloków oznaczamy przez $R_{k|k}^{-1}$.

Jeżeli zbiór $R_{ok}=E(m_k,\Gamma_k)$, to na podstawie Tw.D.S., p.6 Dodatek zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k$ jest dla każdego $z_o^k\in P_k$ (Def.6) również elipsoidalny, tj.

$$R_{ok}|z_o^k=E(\hat{r}_{ok|k},c_k(z_o^k)R_{k|k}),$$

gdzie

$$\hat{r}_{ok|k} = \bar{r}_{ok|o} - R_{k|k}\,G_{k|k}(z_o^k - \bar{z}_o^k), \tag{6}$$

$$\bar{r}'_{ok|o} = [\bar{x}'_k, \bar{w}^{k-1\prime}, \bar{w}^{N\setminus k-1\prime}, \bar{v}^{N\setminus k\prime}],$$

$$\bar{z}_o^k = P_{41}x_1 + \bar{P}_{12}\bar{w}^{k-1},$$

$$c_k(z_o^k) = 1-(z_o^k - \bar{z}_o^k)'(U_{22}-G'_{k|k}R_{k|k}G_{k|k})(z_o^k - \bar{z}_o^k). \tag{7}$$

Macierze $R_{k|k}$, $G_{k|k}$ określone są jak w (5). Skalarna funkcja $c_k(z_o^k)$ modyfikuje "wielkość" elipsoidy $E(\hat{r}_{ok|k},R_{k|k})$. W przypadku $z_o^k=\bar{z}_o^k$, $c_k(z_o^k)=1$ i $E(\hat{r}_{ok|k},c_k(z_o^k)R_{k|k})=E(\hat{r}_{ok|k},R_{k|k})$. Jeżeli natomiast $z_o^k$ należy do brzegu zbioru $P_k$ (Def.6), to $c_1(z_o^1)=0$ i elipsoida $E(\hat{r}_{ok|k},c_k(z_o^k)R_{k|k})$ "redukuje się" do punktu $\hat{r}_{ok|k}$.

Jeżeli elipsoidalny zbiór T posiada szczególną orientację względem układu współrzędnych $x_1$, $w^N$, $v^N$, to zachodzi

Wniosek 5. Jeżeli macierz T określająca zbiór T w Tw.14 ma postać $T=\mathrm{diag}[X_1,W_1,\ldots,W_N,V_1,\ldots,V_N]$, to dla każdego $k\in H$ informacja pomiarowa $z_o^k$ nie wpływa na $\bar{w}^{N\setminus k-1}$, $\bar{v}^{N\setminus k}$.

Dowod. Zakładając szczególną, blokowo diagonalną postać

$$T=\mathrm{diag}\,[X_1,W_1,\ldots,W_N,V_1,\ldots,V_N],\ X_1>0,\ W_K,\ V_K>0,\ k\in H,$$

macierzy określającej zbiór T, możemy dokładniej rozpisać postacie macierzy $R^{-1}_{k|k}$, $G_{k|k}$ występujących w (5). Mamy:

$$\Gamma_k^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1}_{k|k} & G_{k|k} \\ G'_{k|k} & (V^{-1})^k \end{bmatrix}, \tag{5a}$$

gdzie:

$$R_{k|k}^{-1}=\begin{bmatrix} D_{11}'X_1^{-1}D_{11} & D_{11}'X_1^{-1}\bar{D}_{12}+D_{41}(V^{-1})^k\bar{D}_{42} & 0 & 0 \\ D_{12}'X_1^{-1}D_{11}+\bar{D}_{42}(V^{-1})^kD_{41} & \bar{D}_{12}X_1^{-1}\bar{D}_{12}+D_{42}'(V^{-1})^k\bar{D}_{42}+(W^{-1})^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (W^{-1})^{N\setminus k-1} & \\ 0 & 0 & 0 & (V^{-1})^{N\setminus k} \end{bmatrix}$$

$$G_{k|k}=\begin{bmatrix} D_{41}'(V^{-1})^k \\ \bar{D}_{42}'(V^{-1})^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

oraz

$$D_{12}=[\bar{D}_{12},0],\quad D_{42}=[\bar{D}_{42},0].$$

W powyższych zapisach macierzy $\Gamma_k^{-1}$, $R_{k|k}^{-1}$, $G_{k|k}$ zastosowano dla uproszczenia oznaczenia:

$$(M^{-1})^k=\mathrm{diag}(M_1^{-1},\ldots,M_k^{-1}),\quad (M^{-1})^{N\setminus 1}=\mathrm{diag}(M_{l+1}^{-1},\ldots,M_N^{-1})$$

Zbiór warunkowy

$$R_{ok}|z_o^k=E(\hat{r}_{ok|k},c_k(z_o^k)R_{k|k}),$$

gdzie parametry $\hat{r}_{ok|k}$, $c_k(z_o^k)$, $R_{k|k}$ są określone przez wyrażenia (6)-(7) i (5a).

Odnośnie środka ciężkości $\hat{r}_{ok|k}$ zauważmy, że w wyniku szczególnej struktury macierzy $G_{k|k}$ obserwacja $z_o^k$ modyfikuje jedynie dwie pierwsze składowe blokowe tego wektora, czyli $\hat{x}_{ok|k}$ i $\hat{w}_{|k}^{k-1}$ w porównaniu z $\bar{x}_{k|o}=P_{11}\bar{x}_1+\bar{P}_{12}\bar{w}^{k-1}$, $\bar{w}_{|o}^{k-1}$. Składowe blokowe $\bar{w}_{|o}^{N\setminus k-1}$, $\bar{v}_{|o}^{N\setminus k}$ nie ulegają zmianie.

## 5. Rekurencja parametrów

Wynik zawarty we Wniosku 5 sugeruje, że w przypadku szczególnej postaci zbioru T parametry warunkowych zbiów stanów $R_{ok}|z_{ok}$, $X_{ok}$ mogą być wyznaczone rekurencyjnie. Rzeczywiście zachodzi następujące

Twierdzenie 15. Jeżeli:

i) układ dynamiczny dany jest w postaci

$$\begin{cases} x_{o,k+1} = Ax_{ok} + w_k \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k, \end{cases}$$

gdzie $k \in H$ i istnieje $A^{-1}$,

ii) $T = E(t,T)$,

gdzie

$$t' = [\bar{x}_1', o^{N'}, o^{N'}]$$

$$T = \operatorname{diag}(X_1, W_1, \ldots, W_N, V_1, \ldots, V_N), \qquad X_1 > 0, \quad W_i, V_i > 0, \quad i \in H,$$

to dla każdego $i \in H$

$$X_{oi|i} = E(\hat{x}_{oi|i}\, c_i(z_o^i)\, L_{i|i}),$$

gdzie

$$X_{oi|i} = \pi_{x_{oi}}(R_{oi}|z_o^i)$$

oraz pomiędzy parametrami zbiorów $X_{ok|k}$, $X_{o,k+1|k+1}$ zachodzą związki:

$$\hat{x}_{o,k+1|k+1} = \hat{x}_{o,k+1|k} + L_{k+1|k+1}\, C'\, V_{k+1}^{-1}(z_{o,k+1} - C\bar{x}_{o,k+1|k}),$$

$$\bar{x}_{o,k+1|k} = A\hat{x}_{ok|k}, \qquad \bar{x}_{o1|o} = \bar{x}_{o1},$$

$$L_{k+1|k+1}^{-1} = L_{k+1|k}^{-1} + C' v_{k+1}^{-1} C,$$

$$L_{k+1|k} = A' L_{k|k} A + W_k, \qquad L_{1|o} = X_1,$$

$$c_{k+1}(z_o^{k+1}) = c_k(z_o^k) + (z_{o,k+1} - C\bar{x}_{o,k+1|k})'(V_{k+1} + CL_{k+1|k}C')$$

$$\cdot (z_{o,k+1} - C\bar{x}_{o,k+1|k}).$$

Dowód. Przystępując do dowodu Tw.15 wyznaczymy najpierw zależności rekurencyjne pomiędzy parametrami zbiorów $R_{o,k+1}$, $R_{ok}$ i odpowiednio $R_{o,k+1}|z_o^{k+1}$, $R_{ok}|z_o^k$. Wykorzystamy w tym celu odwzorowanie $\xi_{o,k+1}$ (Def.3, Tw.6) określające związek pomiędzy elementami zbiorów $R_{o,k+1}$, $R_{ok}$. Mamy:

$$\begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\setminus k} \\ v^{N\setminus k+1} \\ v_{k+1} \\ z_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ -C & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok+1} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\setminus k} \\ v^{N\setminus k+1} \\ z_{ok+1} \\ z_o^k \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Pomiędzy elementami zbiorów $\mathbb{R}_{o,k+1}|z_o^k$, $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ istnieje związek:

$$\begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\setminus k} \\ v^{N\setminus k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ -C & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok+1} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\setminus k} \\ v^{N\setminus k+1} \\ z_{ok+1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

lub w zapisie skróconym:

$$r_{ok} = F^{-1}\begin{bmatrix} r_{ok+1} \\ z_{ok+1} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie dowodu Wniosku 5 zbiór $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k = \mathbb{E}(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k)R_{k|k})$, a jego parametry są określone przez (5), (6), (5a).

Dla uproszczenia dalszych zapisów przedstawimy macierz $R_{k|k}$ (porównaj (5a)) w postaci:

$$R_{k|k}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} L_{k|k} & M_{k|k} \\ M'_{k|k} & N_{k|k} \end{bmatrix}^{-1}, W_k^{-1}, (W^{-1})^{N\setminus k}, (V^{-1})^{N\setminus k+1}, V_{k+1}^{-1}\right) \tag{11}$$

oraz wprowadzimy pomocniczą macierz:

$$R_{p,k|k}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} L_{k|k} & M_{k|k} \\ M'_{k|k} & N_{k|k} \end{bmatrix}^{-1}, W_k^{-1}\right) \tag{12}$$

Wykorzystując odwzorowanie (10) oraz Tw. 15 określamy zbiór:

$$\mathbb{R}_{o,k+1}|z_o^k = \mathbb{E}((\bar{r}'_{o,k+1|k}, \bar{z}'_{ok}), c_k(z_o^k)\Gamma_{k+1|k}),$$

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{o,k+1|k} \\ \bar{z}_{o,k+1|k} \end{bmatrix} = F \hat{\Gamma}_{ok|k}, \tag{13}$$

$$\Gamma^{-1}_{k+1|k} = F^{-1'} R^{-1}_{k|k} F^{-1}. \tag{14}$$

Rozpisując szczegółowo prawą stronę (14) łatwo sprawdzić, że macierz $\Gamma^{-1}_{k+1|k}$ może być przedstawiona w postaci:

$$\Gamma^{-1}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} R^{-1}_{k+1|k+1} & G_{k+1} \\ G'_{k+1} & V^{-1}_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

gdzie:

$$R^{-1}_{p,k+1|k+1} = \begin{bmatrix} L_{k+1|k+1} & M^{11}_{k+1|k+1} & M^{12}_{k+1|k+1} \\ M^{11'}_{k+1|k+1} & N^{11}_{k+1|k+1} & N^{12}_{k+1|k+1} \\ M^{12'}_{k+1|k+1} & N^{21}_{k+1|k+1} & N^{22}_{k+1|k+1} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{16}$$

$$R^{-1}_{k+1|k+1} = \mathrm{diag}(R^{-1}_{p,k+1|k+1}, (W^{-1})^{N\setminus k}, (V^{-1})^{N\setminus k+1}), \tag{17}$$

$$G'_{k+1} = \left[-V^{-1}_{k+1} C, 0, 0, 0, 0\right], \tag{18}$$

Na podstawie (14) pomiędzy macierzami $R_{p,k|k}$, $R_{p,k+1|k+1}$ zachodzi związek:

$$R^{-1}_{p,k+1|k+1} = F^{-1}_{p} R^{-1}_{p,k|k} F^{-1'}_{p} + B V^{-1}_{k+1} B', \tag{19}$$

$$F^{-1}_{p} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & -A^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -C' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Stosując do (19) wzór na odwrotność sumy macierzy otrzymujemy:

$$R_{p,k+1|k+1} = R_{p,k+1|k} - \Delta_{k+1|k+1}, \tag{21}$$

$$R_{p,p+1|k} = F'_{p} R_{pk|k} F_{p}, \tag{22}$$

$$\Delta_{k+1|k+1} = F'_p R_{pk|k} F_p B(V_{k+1} + B'F'_p R_{pk|k} F_p B)^{-1} B'F'_p R_{pk|k} F_p. \tag{23}$$

Uwzględniając szczegółową strukturę macierzy $R_{p,k|k}$ mamy:

$$R_{p,k+1|k} = \begin{bmatrix} L_{k+1|k} & AM_{k|k} & W_k \\ M'_{k|k}A' & N_{k|k} & 0 \\ W_k & 0 & W_k \end{bmatrix}, \tag{22a}$$

$$\Delta_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} L_{k+1|k} C' \\ M'_{k|k} A' \; C \\ W_k C' \end{bmatrix} (V_{k+1} + CL_{k+1|k} C')^{-1} \left[ CL_{k+1|k}, CAM_{k|k}, CW_k \right], \tag{23a}$$

gdzie:

$$L_{k+1|k} = A' L_{k|k} A + W_k. \tag{24}$$

Jeżeli zbiór $R_{o,k+1}|z_o^k = E((\hat{r}_{o,k+1|k}, \bar{z}'_{ok}), c_k(z_o^k)\Gamma_{k+1|k})$, to na podstawie Tw.D.5 zbiór

$$R_{o,k+1}|z_o^{k+1} = E(\hat{r}_{o,k+1|k+1}, c_{k+1}(z_o^{k+1})R_{k+1|k+1}),$$

gdzie

$$\hat{r}_{o,k+1|k+1} = \bar{r}_{o,k+1|k} - R_{k+1|k+1} G_{k+1}(z_{o,k+1} - \bar{z}_{o,k+1|k}). \tag{25}$$

W szczególności dla pierwszego z wektorów stanowiących kolejne bloki wektora $\hat{r}_{o,k+1|k+1}$ (jest nim $\hat{x}_{o,k+1|k+1}$) mamy:

$$\hat{x}_{o,k+1|k+1} = \bar{x}_{o,k+1|k} + L_{k+1|k+1} C' V_{k+1}^{-1} (z_{o,k+1} - C\bar{x}_{o,k+1|k}). \tag{25a}$$

Macierz $R_{k+1|k+1}$ określona jest postacią:

$$R_{k+1|k+1} = \mathrm{diag}(R_{p,k+1|k+1}, W^{N\setminus k}, V^{N\setminus k+1}), \tag{26}$$

w której $R_{p,k+1|k+1}$ określa zależność (21) z podstawieniami ogólnymi (22), (23) lub szczegółowymi (22a), (23a).

Odpowiednio do (25a) ograniczymy się do wypisania zależności dla macierzy $L_{k+1|k+1}$, bowiem tylko ona występuje w (25a). Na podstawie (26) z odpowiednimi podstawieniami za $R_{p,k+1|k+1}$ mamy:

$$L_{k+1|k+1} = L_{k+1|k} - L_{k+1|k}C'(V_{k+1}-CL_{k+1|k}C')^{-1}CL_{k+1|k} \qquad (27)$$

gdzie

$$L_{k+1|k} = A'L_{k|k}A + W_k.$$

Zależność (25) przepisać można również w postaci:

$$L^{-1}_{k+1|k+1} = L^{-1}_{k+1|k} + C'V^{-1}_{k+1}C. \qquad (27a)$$

Warunkiem początkowym dla zależności rekurencyjnych (27) lub (27a) jest

$$L_{1|o} = X_1.$$

W charakterze dodatkowego komentarza zauważmy, iż wyrażenie (25) określa również sposób wyznaczenia ocen $\hat{w}^{k}_{k+1|k+1}$, $\hat{v}^{k+1}_{k+1|k+1}$ przez odpowiednią do $z_{o,k+1}$ modyfikację ocen $(\hat{w}^{k-1\prime}, \bar{w}'_k)_{k|k}$, $(\hat{v}', \bar{v}')_{k|k}$, gdzie $\bar{w}_k$, $\bar{v}_k$ są ocenami a priori (porównaj z postacią zbioru $\mathbb{T}=\mathbb{E}(t,T)$). Zauważmy również, że oceny $\hat{x}^{\mathbb{N}\setminus k}_{k+1|k+1}$, $\hat{v}^{\mathbb{N}\setminus k+1}_{k+1|k+1}$ będą równe swoim ocenom a priori, co formalnie wynika ze struktury macierzy $R_{k+1|k+1}$ $G_{k+1}$.

Zależność rekurencyjna dla $c_{k+1}(z_o^{k+1})$ ma postać:

$$c_{k+1}(z_o^{k+1})=c_k(z_o^k)+(z_{o,k+1}-C\bar{x}_{o,k+1|k})'(V_{k+1}+CL_{k+1|k+1}C')(z_{o,k+1}-C\bar{x}_{o,k+1|k}) \qquad (28)$$

Przypominając, że określone są rekurencyjne zależności dla parametrów zbiorów warunkowych

$$R_{ok+1}|z_o^{k+1} = \mathbb{E}(\hat{r}_{ok+1|k+1},\ c_{k+1}(z_o^{k+1})\ R_{k+1|k+1}),\quad k\in H$$

ostatnim krokiem tej części dowodu jest wyznaczenie zależności rekurencyjnych dla zbiorów $X_{ok+1|k+1}$ będących rzutami ortogonalnymi zbiorów $R_{ok+1}|z_o^{k+1}$ na podprzestrzenie zmiennych $x_{ok}$. Na podstawie Tw.D.3 mamy:

$$x_{ok+1|k+1} = \pi_{x_{ok}}(\mathbb{E}(\hat{r}_{ok+1|k+1},\ c_{k+1}(z_o^{k+1})\ R_{k+1|k+1})) =$$

$$= \mathbb{E}(\hat{x}_{ok+1|k+1},\ c_{k+1}(z_o^{k+1})\ L_{k+1|k+1}) \qquad (29)$$

gdzie $\hat{x}_{1k+1|k+1}$ określa zależność (25a), $L_{k+1|k+1}$ zależność (27) lub (27a)

z warunkiem początkowym $L_{1|0} = X_1$, $c_{k+1}(z_o^{k+1})$ określa (28). Tym samym wyrażenie (27) kończy dowód Tw.15.

## 6. Dodatek

Definicja D.1. Zbiór $\{x: (x - m)'M^{-1}(x - m) \leq 1\}$ gdzie $x \in R^n$, $M>0$, nazywamy n-wymiarowym zbiorem elipsoidalnym.

Parametr m określa środek elipsoidy, pojedyncze rzeczywiste i dodatnie wartości własne macierzy M są równe odwrotnościom długości półosi elipsoidy. Parametry m, M jednoznacznie określają zbiór elipsoidalny, stąd stosujemy również, oprócz postaci z Def.D.1., zapisy: $\mathbb{E}(m,M)$, lub $\mathbb{E}$, jeśli nie ma potrzeby jawnego wymieniania parametrów. Zbiór $\mathbb{E}$ jest wypukły i ograniczony.

Twierdzenie D.1. Liniowe nieosobliwe przekształcenie $y = Ax$ zbioru $\mathbb{E}(m,M)$ jest zbiorem $\mathbb{E}(Am, AMA')$.

Dowod. Zbiór $\mathbb{E}(m,M)$ zgodnie z Def.D.1. określony jest nierównością $(x-m)'M^{-1}(x-m) \leq 1$. Podstawiając $x=A^{-1}y$ otrzymujemy $(A^{-1}y-m)'M^{-1}(A^{-1}y-m)\leq 1$, czyli $(y-Am)'A^{-1'}M^{-1}A^{-1}(y-Am)\leq 1$.

Definicja D.2. Funkcją podpierającą wypukłego i ograniczonego zbioru $Z \subset R^n$ nazywamy $\eta(n) = \max_{z\in Z} z'n$.

Twierdzenie D.2. Funkcją podpierającą zbioru $\mathbb{E}(m,M)$ jest

$$\eta(n)=(n'Mn)^{1/2}+n'm.$$

Dowod. Wychodząc z Def.D.1 mamy kolejno:

$$\eta(n) = \max_{x\in\mathbb{E}(m,M)} x'n = \max_{\{x:(x-m)'M^{-1}(x-m)=1\}} x'n =$$

$$= \max_x (x'n + \lambda((x - m)'M^{-1}(x - m) - 1)),$$

gdzie $\lambda$ jest mnożnikiem Lagrange'a. Przyrównując do zera pochodną względem x maksymalizowanego wyrażenia otrzymujemy warunek $n+2\lambda M^{-1}(x-m)=0$, stąd $x=-(Mn/2\lambda)+m$. Wyznaczając z tego samego warunku $\lambda$, a następnie podstawiając do równania ograniczeń otrzymujemy $2\lambda=\pm(n'Mn)^{1/2}$. Obliczając dla

wyznaczonych jak wyżej x, λ iloczyn skalarny x'n otrzymujemy poszukiwaną funkcję podpierającą $\eta(n)$.

Definicja D.3. Rzutem ortogonalnym punktu $[x',y'] \in R^n$, $\dim x = n_1$, $\dim y = n_2$, $n_1+n_2=n$ na podprzestrzeń zmiennych x nazywamy punkt $[x'] \in R^{n_1}$, co zapisujemy $\pi_x([x',y']) = [x']$. Rzutem ortogonalnym zbioru $Z \subset R^n$ na podprzestrzeń zmiennych x nazywamy zbiór rzutów każdego z punktów zbioru Z na tę podprzestrzeń. Zapisujemy:

$$\pi_x(Z) = X = \{x : x = \pi_x([x',y']) \wedge [x',y'] \in Z\}.$$

Twierdzenie D.3. Rzutem ortogonalnym zbioru $E(m,M)$, gdzie $m' = [m'_x, m'_y]$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

$$m_x \in R^{n_1}, \quad m_y \in R^{n_2}, \quad M_{11} \in R^{n_1 \times n_1}, \quad M_{12} = M'_{21} \in R^{n_1 \times n_2}, \quad M_{22} \in R^{n_2 \times n_2},$$

na podprzestrzeń zmiennych x jest zbiór $E(m_x, M_{11})$, co zapisujemy

$$\pi_x(E(m,M)) = E(m_x, M_{11}).$$

Podobnie

$$\pi_y(E(m,M)) = E(m_y, M_{22}).$$

Dowód. Na podstawie Tw.D.2 przy uwzględnieniu $m' = [m'_x, m'_y]$ oraz

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M \\ M' & M_{22} \end{bmatrix}$$

funkcja podpierająca zbioru $E(m,M)$ ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}\right) = \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}' M \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \right)^{1/2} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}.$$

Na podstawie Def.D.2, D.3 funkcja podpierająca zbioru $\pi_x(E(m,M))$ ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}' M \begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{1/2} + \begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} =$$

$$= (n_x' M_{11} n_x)^{1/2} + n_x' m_x$$

Odpowiada jej zbiór $E(m_x, M_{11})$.

Analogicznie, funkcja podpierająca zbioru $\pi_y(E(m,M))$ ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ n_y \end{bmatrix}\right) = (n_y' M_{22} n_y)^{1/2} + n_y' m_y$$

i odpowiada jej zbiór $E(m_y, M_{22})$.

Twierdzenie D.4. Jeżeli macierz M z Tw.D.3 jest blokowo diagonalna, $M_{12} = M_{21}' \equiv 0$, to nierówność określającą zbiór $\pi_x(E(m,M))$ otrzymuje się podstawiając $m_y \equiv 0$, $y \equiv 0$ w nierówności (Def.D.1) określającej zbiór $E(m,M)$. Podstawiając $m_x \equiv 0$, $x \equiv 0$, otrzymuje się nierówność określającą zbiór $\pi_y(E(m,M))$.

Dowód. Jeżeli $M_{12} = M_{21}' \equiv 0$, to

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

zatem zbiór $E(m,M)$ określony jest nierównością:

$$(x-m_x)' M_{11}^{-1} (x-m_x) + (y-m_y)' M_{22}' (y-m_y) \leq 1$$

Podstawiając $m_y \equiv 0$, $y \equiv 0$ otrzymujemy:

$$(x-m_x)' M_{11}^{-1} (x-m_x) \leq 1.$$

Nierówność ta określa zbiór $E(m_x, M_{11})$ który jest rzutem ortogonalnym zbioru $E(m,M)$ na podprzestrzeń zmiennych x (por. Tw.D.3).

Definicja D.4. Niech będzie dany zbiór $Z \subset R^n$ o elementach $[x', y']$. Zbiór $Z|y=\{x: [x, y=\text{const}] \in Z\}$ gdzie $y \in \pi_y(Z)$ nazywamy jego zbiorem warunkowym przy warunku y.

Twierdzenie D.5. Niech będzie dany zbiór $E(m,G^{-1})$, gdzie $m' = [m_x', m_y']$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$$m_x \in R^{n_1},\ m_y \in R^{n_2},\ G_{11} \in R^{n_1 x n_1},\ G_{12} = G_{21}' \in R^{n_1 x n_2},\ G_{22} \in R^{n_2 x n_2},\ n_1+n_2=n.$$

Dla każdego $y \in \pi_y(E(m,G^{-1}))$

$$(E(m,M))|y = E(\hat{m}_x, c(y)G_{11}^{-1}),$$

gdzie

$$\hat{m}_x = m_x - G_{11}^{-1} G_{12} (y - m_y),$$

$$c(y) = 1 - (y - m_y)'(G_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}G_{12})(y - m_y).$$

Dodatkowo dla $y \in \pi_y(E(m,G^{-1}))$, $0 \le c(y) \le 1$.

Dowod. Odpowiednio dla założonych struktur wektora m i macierzy G nierownosc okreslająca zbiór $E(m,G^{-1})$ może być przedstawiona w postaci:

$$(x-m_x)'G_{11}(x-m_x) + 2(x-m_x)'G_{12}(y-m_y) + (y-m_y)'G_{22}(y-m_y) \le 1.$$

Traktując y jako ustalone otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$(x-m_x+G_{11}^{-1}G_{12}(y-m_y))'G_{11}(x-m_x+G_{11}^{-1}G_{12}(y-m_y)) \le 1-(y-m_y)'(G_{22}-G_{21}G_{11}^{-1}G_{12})(y-m_y)$$

Na podstawie Tw.D.3 zbiór $\pi_y(E(m,G^{-1})) = E(m_y, M_{22})$, gdzie ze wzoru na odwrotnosc macierzy blokowej G mamy:

$$M_{22} = (G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})^{-1}$$

Nierownosc okreslająca zbiór $E(m_y, M_{22})$ ma zatem postac:

$$(y - m_y)'(G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})(y - m_y) \le 1$$

czyli $c(y) \ge 0$. Równoczesnie, ponieważ z założenia $G>0$, również $G^{-1}>0$ i

$$(y - m_y)'(G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})(y - m_y) \ge 0.$$

Łącząc powyższe nierownosci otrzymujemy $0 \le c(y) \le 1$.

# Rozdział 5

## INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA

*Ograniczony i mierzalny w sensie Lebesgue'a zbiór* **T** *charakteryzuje a priori zmienne niepewne. Porządek w rodzinie zależnych od praw sterowania obrazów zbioru* **T** *implikuje porządek w zbiorze praw sterowań i pozwala na wybór optymalnego prawa sterowania. Jedną z możliwych jest relacja porządku zgodna z porządkiem naturalnym w zbiorze agregat macierzy drugich momentów zbioru* **L**, *będącego obrazem zbioru* **T** *według danego odwzorowania zależnego od praw sterowania. Minimalizacja względem praw sterowania agregaty macierzy drugich momentów odpowiada dążeniu do uzyskania dobrze skupionego zbioru* **L**. *Jeżeli za* **L** *przyjąć zbiór informacyjny typu* $S_1$ *to przy ustalonym zbiorze* **T** *i liniowym modelu prawa sterowania wpływają na kształt zbioru* **S**, *a tym samym na agregatę drugich momentów, nie mają natomiast wpływu na objętość tego zbioru.*

### 1. Odwzorowanie podstawowe

Definicja 1 Odwzorowanie $\alpha: R^{N_1} \to R^{N_4}$ przekształcające zbiór $T \subset R^{N_1}$ na zbiór $L=\alpha(T)=\{l=\alpha(t) \mid t \in T\} \subset R^{N_4}$ nazywamy odwzorowaniem podstawowym.

Przypominając, że zbiór **T** stanowi informację a priori o zmiennych niepewnych wymagamy, by zbiór **L** będący jego obrazem w odwzorowaniu $\alpha$ posiadał pożądane własności lub był optymalny w sensie porządku przyjętego w rodzinie $\mathcal{L}$ zbiorów **L** (patrz p.2).

Odwzorowanie $\alpha$ jest złożone i zależy zarówno od modelu pomiaru, jak również od praw sterowania i struktury informacyjnej. W pracy ograniczono się do problemu poszukiwania optymalnych praw sterowania przy danym modelu obiektu, danym modelu pomiaru i ustalonej strukturze informacyjnej.

Elementami zbioru $\mathbb{L}$ ogólnie mogą być dowolne funkcje wektorowe argumentów $x^{N+1}, u^N$. W przypadku funkcji liniowych elementami $l \in \mathbb{L}$ są przykładowo $x_{N+1}$, $x^{N+1}$, $(x^{N+1}, u^N)$, $(x^{N+1\setminus k}, u^{N\setminus l})$, $0 \le k \le N+1$, $0 \le l \le N$. Zbiór $\mathbb{L}$ może być również tożsamy ze zbiorem $S_N$ lub $R_N$ i w takim przypadku jego elementami są $(s_N, z^N)$ lub $(r_N, z^N)$ (patrz rozdz. 3, 4). Zbiór $\mathbb{L}$ może być też rzutem ortogonalnym zbiorów $S_N$ lub $R_N$ na dowolnie wybrane podprzestrzenie zmiennych $(s_N, z^N)$ lub $(r_N, z^N)$.

Niejawnie odwzorowanie $\alpha$ określa następujący układ równań:

$$\begin{cases} \alpha(t) = \beta(t, u_{\mathbb{H}_u}) \\ u_i = u_i(z_{D_{zi}}) & i \in \mathbb{H}_u \\ z_j = h_j(t_{D_{tj}}, u_{D_{uj}}), & j \in \mathbb{H}_z \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$ są horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów, $D_t \subset \mathbb{H}_t$, $D_u \subset \mathbb{H}_u$, $D_z \subset \mathbb{H}_z$ ich podzbiorami, $t = t_{\mathbb{H}_t}$. Odwzorowanie $\beta$, prawa sterowania $u_i$, $i \in \mathbb{H}_u$ oraz model bezpośredni $h_j$, $j \in \mathbb{H}_z$ są dane.

W przypadku szczególnym układ określający odwzorowanie $\alpha$ może mieć postać:

$$\begin{cases} \alpha(t) = \beta(t, u^N) \\ u_i = u_i(z^1) & i \in \mathbb{H}_u = \{1, \ldots, N\} \\ z_j = h_j(t^j, u^{j-1}) & j \in \mathbb{H}_z = \{1, \ldots, N\}. \end{cases} \tag{2}$$

Postać (2) można otrzymać z (1), przyjmując $\mathbb{H}_t = \{1, \ldots, N\}$, $D_{tj} = \{1, \ldots, j\}$, $j \le N$, $\mathbb{H}_u = \{1, \ldots, N\}$, $D_{uj} = \{1, \ldots, j-1\}$, $\mathbb{H}_z = \{1, \ldots, N\}$, $D_{zj} = \{1, \ldots, i\}$.

Zakładamy, że układ funkcji

$$\begin{cases} u_i = u_i(z_{D_{zi}}) & i \in H_u \\ z_j = h_j(t_{D_{tj}}, u_{D_{uj}}) & j \in H_z \end{cases} \tag{3}$$

można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} u_i = g_i(t) & i \in H_u \\ z_j = z_j(t) & j \in H_z. \end{cases} \tag{4}$$

W przypadku szczególnym, jeżeli rozpatrywany układ ma postać

$$\begin{cases} u_i = u_i(z^i) & i \in H_u = \{1, \ldots, N\} \\ z_j = h_j(t^j, u^{j-1}) & j \in H_z = \{1, \ldots, N\}, \end{cases}$$

to przekształcenie takie można zawsze wykonać przez następujące postępowanie rekurencyjne. Dla $j=1$ mamy $z_1 = h_1(t^1) = z_1(t^1)$, co po podstawieniu do prawa sterowania $u_1$ daje $u_1 = u_1(h_1(t^1)) = g_1(t^1)$. Wykorzystując otrzymany wynik możemy dla $j=2$ napisać $z_2 = h_2(t^2, g_1(t^1)) = z_2(t^2)$, a następnie $u_2 = u_2(z_1(t^1), z_2(t^2)) = g_2(t^2)$. Takie postępowanie powtarza się dla $j=3, \ldots, N$. Ostatecznie otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} u_i = g_i(t^i) & i \in H_u = \{1, \ldots, N\} \\ z_j = z_j(t^j) & j \in H_z = \{1, \ldots, N\}. \end{cases}$$

Jawną postać odwzorowania $\alpha$ w zmiennych pierwotnych $t$ określa następujący układ:

$$\begin{cases} \alpha(t) = \beta(t, u_{H_u}) \\ u_i = g_i(t), \qquad i \in H_u \end{cases} \tag{5}$$

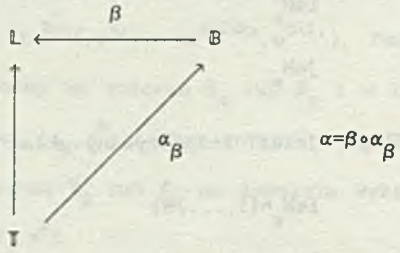
gdzie $H_t$, $H_u$ są horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych i sterowań, $t = t_{H_t}$ oraz odwzorowanie $\beta$ i prawa sterowania $g_i$, $i \in H_u$ są dane.

Oznaczając

$$(t, g_{H_u}(t)) = \alpha_\beta(t),$$

$$\mathbb{B} = \alpha_\beta(\mathbb{T}),$$

możemy zilustrować odwzorowanie $\alpha$ określone układem (5) za pomocą diagramu przedstawionego na rys. 1.




Rys. 1. Diagram odwzorowania $\alpha$ wyrażonego przez odwzorowania $\alpha_\beta$ i $\beta$

Fig. 1. Diagram of the mapping $\alpha$ expressed by mappings $\alpha_\beta$ and $\beta$

W rozpatrywanym przypadku odwzorowanie $\alpha_\beta$ zależy od bezpośrednich praw sterowania $g_i$, $i \in H_u$.

Dla danych praw sterowania $u_i = u_i(z^i)$, $i \in H = \{1, \ldots, N\}$, danego modelu bezpośredniego i ustalonego $i \in H$ określone są wzajemnie jednoznaczne odwzorowania informacyjne $\mu_i$, $\rho_i$ (patrz rozdz. 3, 4). Przykładowo mamy $t = \mu_i^{-1}(s_i, z^i)$, a w szczególności dla $i=N$, $t = \mu^{-1}(s_N, z^N)$.

Jawną postać odwzorowania $\alpha$ z wykorzystaniem zmiennych wtórnych $(s_N, z^N)$ określa następujący układ:

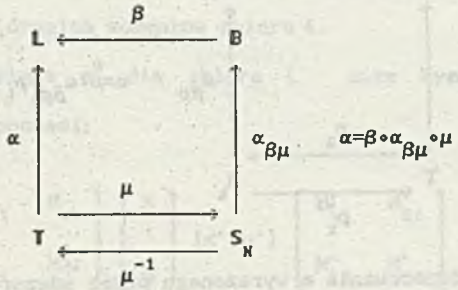
$$\begin{cases} \alpha(t) = \beta(\mu_N^{-1}(s_N, z^N), u^N) \\ u_i = u_i(z^i) \\ (s_i, z^i) = \mu_i(t), \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $H = \{1, \ldots, N\}$, oraz dane są odwzorowania $\beta$, $\mu$ i prawa sterowania $u_i$, $i \in H$.

Oznaczając

$$(\mu_N^{-1}(s_N, z^N), u^N) = \alpha_{\beta\mu}(s_N, z^N),$$

gdzie $u_i=u_i(z^1)$, $i\in H$, możemy zilustrować odwzorowanie $\alpha$ za pomocą diagramu przedstawionego na rys. 2.




Rys. 2. Diagram odwzorowania $\alpha$ wyrażonego przez odwzorowania $\beta$, $\alpha_{\beta\mu}$, $\mu$

Fig.2. Diagram of the mapping $\alpha$ expressed by mappings $\beta$, $\alpha_{\beta\mu}$, $\mu$

W rozpatrywanym przypadku odwzorowania $\mu$, $\alpha_{\beta\mu}$ zależą od wyboru praw sterowania $u_i$, $i\in H_u$.

Wykorzystując odwzorowanie $\rho_i$ mamy $t=\rho_i^{-1}(r_i,z^i)$.

Jawną postać odwzorowania $\alpha$ z wykorzystaniem zmiennych wtórnych $(r_i,z^i)$ określa następujący układ:

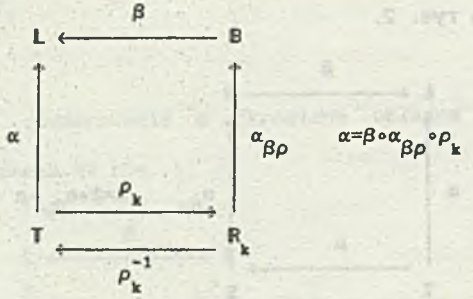
$$\begin{cases} \alpha(t)=\beta(\rho_i^{-1}(r_i,z^i),u^i) \\ u_i=u_i(z^i) \qquad\qquad i\in H \\ (r_i,z^i)=p_i(t), \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $H=\{1,\ldots,N\}$ oraz dane są odwzorowania $\beta$, $\rho_i$ i prawa sterowania $u_i$, $i\in H$.

Oznaczając

$$(\rho_i^{-1}(s_i,z^i),u^i)=\alpha_{\beta\rho}(r_i,z^i),$$

gdzie $u_i=u_i(z^i)$, $i\in H$, możemy zilustrować odwzorowanie $\alpha$ za pomocą diagramu przedstawionego na rys. 3.




Rys. 3. Diagram odwzorowania α wyrażonego przez odwzorowania β, $\alpha_{\beta\rho}$, $\rho_k$

Fig.3. Diagram of the mapping α expressed by mappings β, $\alpha_{\beta\rho}$, $\rho_k$

W rozpatrywanym przypadku odwzorowania $\alpha_{\beta\rho}$, $\rho_k$ zależą od praw sterowania $u_i$, $i\in H$.

## 2. Porządek w rodzinie zbiorów L

Dane odwzorowanie podstawowe α, przykładowo o postaci:

$$\begin{cases} \alpha(t)=\beta(t,u_{H_u}) \\ u_i = g_i(t), \qquad i\in H_u \end{cases}$$

gdzie odwzorowanie β i funkcje $g_i$, $i\in H_u$ są ustalone, przekształca dany zbiór T na L, tj. $\alpha(T)=L$.

Obecnie uzmieniając funkcje $g_i(t)$, $i\in H_u$ będziemy pisać:

$$\alpha(g_{H_u})(T)=L(g_{H_u}).$$

Ustalenie porządku w rodzinie $\mathcal{L}$ zbiorów L indukuje porządek w przestrzeni funkcji $g_{H_u}$ odpowiednio do implikacji:

$$L(g^a_{H_u})<L(g^b_{H_u}) \Rightarrow g^a_{H_u}<g^b_{H_u} \tag{8}$$

i pozwala na sformułowanie problemu wyboru optymalnych funkcji $g^*_{H_u}$.

## 3. PRZYKŁAD

Jedną z możliwych jest relacja porządku zgodna z porządkiem naturalnym agregat macierzy drugich momentów zbioru $\mathbb{L}$.

Ogólnie macierz $m^2$ dla zbioru $\mathbb{L}$ może być w zapisie blokowym przedstawiona w postaci:

$$m^0 m^2 = \int_T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} [x', u'] \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{21} \\ M'_{12} & M'_{22} \end{bmatrix} dt, \tag{9}$$

gdzie

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

jest ortonormalną macierzą obrotu.

Oznaczmy przez $\sum (m^2)$ sumę elementów macierzy $m^2$.

Mamy

$$m^0 \sum (m^2) = \int_T [x', u'] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & J \\ J & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt,$$

gdzie J jest macierzą, której wszystkie elementy są równe 1.

Jeżeli macierz M wybrać tak, że:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & J \\ J & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \text{diag } [P, Q] \tag{10}$$

oraz oznaczyć:

$$P = \text{diag } [P_1, \ldots, P_{N+1}],$$

$$Q = \text{diag } [Q_1, \ldots, Q_N],$$

to zachodzi

$$m^{\circ} \sum (m^2) = m^{\circ} q. \tag{11}$$

Kontynuując geometryczną interpretację przyjętego kryterium optymalności można stwierdzić, że minimalizacja tego kryterium względem praw sterowania $u_k$, $(z^k)$, $k \in H$ odpowiada dążeniu do uzyskania "dobrze skupionego" zbioru $L$.

# Rozdział 6

# WYBRANE PROBLEMY SYNTEZY PRAW STEROWANIA

*Przedstawione w rozdziałach 1-5 pojęcia i własności trzech podstawowych typów zbiorów informacyjnych* **T**, **S**, **R** *umożliwiają formułowanie i rozwiązywanie zadań syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej dla dyskretnych modeli dynamicznych określonych w przestrzeni stanu zarówno dla jednowymiarowego, jak wielowymiarowego argumentu, modeli bezpośrednich, klasycznej i nieklasycznej struktury informacyjnej oraz wybranej relacji porządku w zbiorze obrazów zbioru* **T**. *Analityczne rozwiązania problemu syntezy praw sterowania istnieją dla modelu liniowego względem sterowań, klasycznej struktury informacyjnej oraz porządku naturalnego w zbiorze agregat drugich momentów obrazu zbioru* **T**.

## 1. Problem 1

Model w zmiennych stanu. Centrowany zbiór **T**. Zawierająca się struktura informacyjna.

**Sformułowanie problemu 1**

Zakładamy, że:

1) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $N$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_k + v_k, \end{cases} \tag{1.1}$$

gdzie $k \in H = \{1,\dots,N\}$, $x_k$, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_k$, $v_k \in R^p$,

$A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje $A^{-1}$,

ii) wartosci zmiennych $x_1, w_k, v_k$ dla $k \in H$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t = (x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^d$, gdzie $d=n+nN+pN$, oraz dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} w_k \, dr_{ok} = 0, \tag{1.2}$$

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}' M w_k \, dr_{ok} = 0, \tag{1.3}$$

gdzie (patrz rozdz.4 Def.1) $R_{ok}$ jest obrazem zbioru $T$ poprzez wzajemnie jednoznaczne liniowe przekształcenie $\rho_{ok}$, zaś $R_{ok}|z_o^k$ (patrz rozdz.4 Def.5) jest "przekrojem" zbioru $R_{ok}$ ustaloną wartoscią $z_o^k$. Macierz $M \in R^{nxm}$ w warunku (1.3) jest dowolna, indeks "o" informuje, że zapis dotyczy układu dynamicznego, w którym dla $k \in H$ $u_k \equiv 0$.

iii) wartości sterowań $u_k$ są funkcjami pomiarów $z^N$, gdzie argumenty poszczególnych funkcji (praw sterowania) definiuje przyporządkowanie informacyjne (patrz rozdz.1 Def.1). Zakłada się zawierającą strukturę informacyjną. Najprostszymi prawami sterowania tworzącymi taką strukturę z modelem (1.1) są:

$$u_k = u_k(z^k), \quad k \in H, \tag{1.4}$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_T l_k(x_{k+1}, u_k) \, dt, \tag{1.5}$$

gdzie dla $k \in H$:

$$l_k = x_{k+1}' P_{k+1} x_{k+1} + u_k' Q_k u_k, \tag{1.6}$$

$$m^{\circ} = \int_{T} dt, \tag{1.7}$$

$$Q_k > 0, \qquad P_{k+1} \geq 0, \tag{1.8}$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu dopuszczalnych praw sterowania $u_k^{\bullet}(z^k)$, $k \in H$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium $q^{\bullet}$ jest minimalna.

Podstawowy rezultat uzyskany przy zastosowaniu metody zbiorów informacyjnych typu R przedstawia następujące

Twierdzenie 1.1. Jeżeli spełnione są założenia i)-iv) wymienione w sformułowaniu problemu 1, to optymalne prawo sterowania dla każdego $k \in H$ określone jest zależnościami:

$$u_k^{\bullet} = -(Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \hat{x}_k,$$

$$\hat{x}_k = \int_{R_k | z^k} x_k \, dr_k \Big/ \int_{R_k | z^k} dr_k,$$

$$K_k = A' (K_{k+1} - K_{k+1} B (Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B K_{k+1}) A + P_k,$$

$$K_{N+1} = P_{N+1}.$$

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i,$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok} | z_o^k} x_{ok} \, dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok} | z_o^k} dr_{ok}$$

Dowód. Dowód Tw. 1.1 jest w swej strukturze podobny do dowodu twierdzenia o sterowaniu stochastycznie optymalnym w problemie LQ tj.:

i) pierwotny problem minimalizacji względem funkcji (praw sterowania) przekształca się do problemu optymalizacji parametrycznej względem wartości tych funkcji,

ii) znajduje się rozwiązanie jednoetapowego problemu optymalizacji przy założonej funkcyjnej postaci kryterium $q_k$ ,

iii)pokazuje się prawdziwosc założonej postaci funkcyjnej również dla $q_{k-1}$ oraz niezależnosc "reszty" od wczesniejszych wartosci sterowań.

**Przekształcenie do problemu optymalizacji parametrycznej.**

Przyjęte kryterium optymalnosci zgodnie ze sformułowaniem ma postac:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m^o} \int_{T} l_k(x_{k+1}, u_k)dt$$

W każdej z całek będących składnikami powyższej sumy dokonujemy odpowiedniej zmiany zmiennych połączonej z odwzorowaniem zbioru T w zbiór $R_k$. Na podstawie Tw.5 i Wniosku 3 z rozdziału 4 mamy:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \int_{R_k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k dz^k, \qquad (1.9)$$

gdzie $a_k = |\det A^{-k+1}|\, m_o$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o całce iterowanej możemy przekształcić (1.9) do postaci:

$$q = a_1^{-1} \int_{P_1} \int_{R_1|z^1} l_1(x_2, u_1)dr_1 dz_1 + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{P_k} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k dz^k + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{P_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N)dr_N dz^N =$$

$$= a_1^{-1} \int_{Z_1} \int_{R_1|z_1} l_1(x_2,u_1)dr_1dz_1 + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_1} \ldots \int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1},u_k)dr_kdz_k\ldots dz_1 + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_1} \ldots \int_{Z_N|z^{N-1}} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1},u_N)dr_Ndz_N\ldots dz_1 . \qquad (1.10)$$

Na podstawie (1.10) minimalizacja kryterium q względem funkcji $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$, sprowadza się do rekurencyjnej minimalizacji względem wartości tych funkcji odpowiednich sum częściowych występujących w prawej stronie wyrażenia (1.10). Mamy:

$$q^* = a_1^{-1} \int_{Z_1} \min_{u_1} \left( \int_{R_1|z_1} l_1(x_2,u_1)dr_1 + \ldots \right.$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} \min_{u_k} \left( \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1},u_k)dr_k + \ldots \right.$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \left( \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1},u_N)dr_N \right| dz_N\ldots \left.\right| dz_k\ldots \left.\right| dz_1 . \qquad (1.11)$$

Wyrażenie (1.11) kończy pierwszą fazę dowodu poświęconą przekształceniu problemu optymalizacji funkcyjnej do optymalizacji parametrycznej.

**Jednoetapowy problem minimalizacji**

Zakładamy, że wyrażenie:

$$q_k = a_k^{-1} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k +$$

$$+ a_{k+1}^{-1} \int_{Z_{k+1}|z^{k+2}} \left( \ldots a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N)dr_N dz_N \ldots \right) dz_{k+1} \tag{1.12}$$

podlegające w (1.11) minimalizacji względem $u_k$, przy uwzględnieniu, że $l_i(x_{i+1}, u_i)$, $i \in H$, są dodatnio określonymi formami kwadratowymi zmiennych $(x_{i+1}, u_i)$, może być przedstawione w postaci:

$$q_k = a_k^{-1} \left( \int_{R_k|z^k} (x'_{k+1} K_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k)dr_k + e_k \right), \tag{1.13}$$

gdzie $e_k$ jest niezależne od $u^k$ oraz $K_{k+1} > 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla k=N jest to słuszne i w tym przypadku $K_{N+1}=P_{N+1} > 0$ oraz $e_N \equiv 0$ jest niezależne od $u^N$. Zatem dla indukcyjnego dowodu słuszności (1.13) dla każdego $k \in H$ wystarczy pokazać, że założona postać (1.13) implikuje analogiczną postać $q_{k-1}$.

Wyrażenie $q_k$ podlega minimalizacji parametrycznej względem $u_k$. Forma kwadratowa zmiennej $u_k$ otrzymana w wyniku podstawienia za $x_{k+1}$ równania stanu jest dodatnio określona, stąd wartość $u_k^*$, dla której przyjmuje ona minimum globalne, znajdujemy przyrównując do zera jej gradient względem $u_k$.

Mamy kolejno:

$$a_k q_k = \int_{R_k|z^k} (x'_k A' K_{k+1} A x_k + 2u'_k B' K_{k+1} A x_k +$$

$$+ 2u'_k B'K_{k+1} w_k + 2x'_k A'K_{k+1} w_k +$$

$$+ u'_k (Q_k + B'K_{k+1} B)u_k + w'_k K_{k+1} w_k) dr_k + e_k \qquad (1.14)$$

Można pokazać, że na podstawie założeń odnośnie do zbioru $\mathbb{T}$ przyjętych w sformułowaniu oraz związków między zbiorami $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}_k$, $\mathbb{R}_{ok}$, zachodzi:

$$u'_k B'K_{k+1} \int_{\mathbb{R}_k | z^k} w_k dr_k \equiv 0, \qquad (1.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}_k | z^k} x'_k A'K_{k+1} w_k dr_k \equiv 0. \qquad (1.16)$$

Rzeczywiście, na podstawie Tw.10 z rozdziału 4 mamy:

$$\int_{\mathbb{R}_k | z^k} w_k dr_k = \int_{\mathbb{R}_{ok} | z_o^k} w_k dr_{ok} = 0$$

Podobnie

$$\int_{\mathbb{R}_k | z^k} x'_k A'K_{k+1} w_k dr_k = p'_1 A'K_{k+1} \int_{\mathbb{R}_{ok} | z_o^k} w_k dr_{ok} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_{ok} | z_o^k} x'_{ok} A'K_{k+1} w_k dr_{ok} = 0.$$

Zerowanie się w (1.14) składników (1.15), (1.16) zachodzące przy spełnieniu założeń przyjętych w sformułowaniu problemu 1 powoduje uproszczenie rozważań i wynikowych wzorów określających prawa sterowania.

Obliczając pochodną prawej strony (1.14) względem $u_k$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B'K_{k+1}A \int_{R_k|z^k} x_k dr_k + (Q_k + B'K_{k+1}B)u_k \int_{R_k|z^k} dr_k = 0$$

Stąd

$$u_k^* = -(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k, \tag{1.17}$$

$$\overset{v}{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k, \tag{1.18}$$

$$b_k = \int_{R_k|z^k} dr_k, \tag{1.19}$$

$$\hat{x}_k = x_k/b_k. \tag{1.20}$$

Podstawiając (1.17) do (1.14) otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_k|z^k} (x_k'A'K_{k+1}Ax_k - 2\hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}Ax_k +$$

$$+ \hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k, \tag{1.21}$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji $q_k$, co pozwoliło na określenie optymalnego prawa sterowania $u_k^*(z^k)$ (1.17) oraz odpowiadającej mu postaci $q_k^*$ (1.21).

**Wyznaczenie postaci funkcyjnej dla $q_{k-1}$**

Odpowiednio do struktury wyrażenia (1.11) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} l_{k-1}(x_k, u_{k-1})dr_{k-1} +$$

$$+ 2u_k'B'K_{k+1}w_k + 2x_k'A'K_{k+1}w_k +$$

$$+ u_k'(Q_k+B'K_{k+1}B)u_k + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k \qquad (1.14)$$

Można pokazać, że na podstawie założeń odnośnie do zbioru $\mathbb{T}$ przyjętych w sformułowaniu oraz związków między zbiorami $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}_k$, $\mathbb{R}_{ok}$, zachodzi:

$$u_k'B'K_{k+1}\int_{\mathbb{R}_k|z^k} w_k dr_k \equiv 0, \qquad (1.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}w_k dr_k \equiv 0. \qquad (1.16)$$

Rzeczywiście, na podstawie Tw.10 z rozdziału 4 mamy:

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} w_k dr_k = \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} w_k dr_{ok} = 0$$

Podobnie

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}w_k dr_k = p_1'A'K_{k+1}\int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} w_k dr_{ok} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} x_{ok}'A'K_{k+1}w_k dr_{ok} = 0.$$

Zerowanie się w (1.14) składników (1.15), (1.16) zachodzące przy spełnieniu założeń przyjętych w sformułowaniu problemu 1 powoduje uproszczenie rozważań i wynikowych wzorów określających prawa sterowania.

Obliczając pochodną prawej strony (1.14) względem $u_k$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B'K_{k+1}A \int_{R_k|z^k} x_k dr_k + (Q_k + B'K_{k+1}B)u_k \int_{R_k|z^k} dr_k = 0$$

Stąd

$$u_k^* = -(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k, \tag{1.17}$$

$$\overset{v}{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k, \tag{1.18}$$

$$b_k = \int_{R_k|z^k} dr_k, \tag{1.19}$$

$$\hat{x}_k = x_k/b_k. \tag{1.20}$$

Podstawiając (1.17) do (1.14) otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_k|z^k} (x_k'A'K_{k+1}Ax_k - 2\hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}Ax_k +$$

$$+ \hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k, \tag{1.21}$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji $q_k$, co pozwoliło na określenie optymalnego prawa sterowania $u_k^*(z^k)$ (1.17) oraz odpowiadającej mu postaci $q_k^*$ (1.21).

**Wyznaczenie postaci funkcyjnej dla $q_{k-1}$**

Odpowiednio do struktury wyrażenia (1.11) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} l_{k-1}(x_k, u_{k-1})dr_{k-1} +$$

$$+ \int_{Z_k|z^{k-1}} q_k^* dz_k \qquad (1.22)$$

Ponieważ $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ jest z założenia formą kwadratową zmiennych $x_k, u_{k-1}$, to głównym zadaniem jest przekształcenie drugiego składnika sumy do takiej samej postaci, jaką ma składnik pierwszy.

W tym celu podstawiamy w (1.21):

$$\hat{x}_k = x_k - x_k + \hat{x}_k,$$

$$M_k = A'K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A,$$

Mamy kolejno:

$$a_k q_k^* - \int_{R_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}Ax_k dr_k = \int_{R_k|z^k} (-2(x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k x_k +$$

$$+ (x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k(x_k - x_k + \hat{x}_k) + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k =$$

$$= \int_{R_k|z^k} (-2x_k'M_k x_k + 2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + x_k'M_k x_k + \ldots$$

$$-2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k) + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k +$$

$$+ e_k = \int_{R_k|z^k} -x_k'M_k x_k dr_k + \int_{R_k|z^k} (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k)dr_k +$$

$$+ \int_{R_k|z^k} w_k'K_{k+1}w_k dr_k + e_k$$

Oznaczając

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k,$$

$$e_k^* = e_k + \int_{R_k|z^k} w_k' K_{k+1} w_k dr_k +$$

$$+ \int_{R_k|z^k} \tilde{x}_k' A_k' K_{k+1} B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1} B'K_{k+1} A\tilde{x}_k dr_k \qquad (1.23)$$

otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_k|z^k} x_k' L_k x_k dr_k + e_k^*, \qquad (1.24)$$

$$L_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A.$$

Obecnie należy wykonać odpowiednio do (1.22) całkowanie pierwszej strony wyrażenia (1.24) względem $z_k$ po zbiorze $Z_k|z^{k-1}$. Na podstawie Tw.9 i Wniosku 4 z rozdziału 4 mamy:

$$\int_{Z_k|z^{k-1}} q_k^* dz_k = a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_k|z^k} x_k' L_k x_k dr_k \right) dz_k +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k^* dz_k = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} x_k' L_k x_k dr_{k-1} +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k^* dz_k . \qquad (1.25)$$

Oznaczając

$$e_{k-1} = a_{k-1} a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k^* dz_k \qquad (1.26)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$q_{k-1}=a_{k-1}^{-1}\left(\int_{R_{k-1}|z^{k-1}}(x_k'(L_k+P_k)x_k+u_{k-1}'Q_{k-1}u_{k-1})dr_{k-1}+e_{k-1}\right) \tag{1.27}$$

czyli

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A + P_k,$$

$$K_{N+1} = P_{N+1}.$$

Otrzymana postać (1.27) posiada taką samą strukturę jak (1.13).

Na zakończenie tej fazy dowodu pokażemy, że reszta $e_{k-1}$ nie zależy od żadnego ze sterowań $u^{k-1}$. W tym celu powróćmy do wyrażenia (1.23) z uwzględnieniem (1.26), analizując kolejno składniki sumy określającej $e_{k-1}$.

Mamy:

1) $\int_{Z_k|z^{k-1}} e_k dz$, składnik ten na podstawie Tw.11 rozdz.4 może być przekształcony do postaci $\int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k dz_{ok}$, w której zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od $u^{k-1}$, zaś $e_k$ nie zależy od $u^k$ z założenia,

2) drugi ze składników przekształcamy następująco (Tw.9, Wniosek 4 z rozdziału 4):

$$\int_{Z_k|z^{k-1}}\int_{R_k|z^k} w_k'K_{k+1}w_k dr_k dz_k = |\det A|\int_{R_{k-1}|z^{k-1}} w_k'K_{k+1}w_k dr_{k-1} =$$

$$=|\det A|\int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} w_k'K_{k+1}w_k dr_{ok-1},$$

co pozwala na stwierdzenie jego niezależności od $u^{k-1}$.

3) w ostatnim składniku różnica $\tilde{x}_k=x_k-\hat{x}_k$ nie zależy od $u^{k-1}$, skąd na podstawie Tw.10 i Tw.11 z rozdziału 4:

$$\int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_k|z^k} \tilde{x}'_k M_k \tilde{x}_k dr_k \right) dz_k =$$

$$= \int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_{ok}|z_o^k} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} dr_{ok} \right) dz_k =$$

$$= \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \left( \int_{R_{ok}|z_o^k} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} dr_{ok} \right) dz_{ok},$$

skąd cały składnik nie zależy od $u^{k-1}$.

Czynniki $a_k$, $a_{k-1}$ mają wartości liczbowe i nie zależą od $u^{k-1}$.

Ostatecznie $e_{k-1}$ nie zależy od $u^{k-1}$, co kończy ostatnią fazę dowodu.

Dla dowodu zależności

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i),$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok} dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok},$$

wystarczy wykorzystać określenie:

$$\tilde{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k,$$

a następnie na podstawie Tw. 10 z rozdziału 4 podstawić

$$R_k|z^k = p_1(z^{k-1}) + R_o|z_o^k$$

oraz

$$x_k = x_{ok} + p_1(z^{k-1}),$$

gdzie

$$p_1(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i).$$

**Dyskusja rozwiązania problemu 1**

Zauważmy, że w uzyskanym rozwiązaniu ma miejsce odpowiednik twierdzenia o podziale, optymalne sterowanie w chwili k jest liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego, do wyznaczenia środka ciężkości niezbędny jest "pełny" warunkowy zbiór informacyjny $R_k|z^k$, wystarczy jednak, jeśli jest to swobodny warunkowy zbiór informacyjny $R_o|z_o^k$. Jeżeli zbiór T jest elipsoidalny o osiach równoległych do osi układu współrzędnych, to wyznaczanie środka ciężkości prowadzić można rekurencyjnie według zależności przedstawionych w rozdziale 4 p.5.

## 2. Problem 2

Model w zmiennych stanu. Niecentrowany zbiór T. Zawierająca się struktura informacyjna.

**Sformułowanie problemu 2**

Zakładamy, że:

i)dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie H ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie $k \in H = \{1, \ldots, N\}$, $x_k, w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_k, v_k \in R^p$,
$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ oraz istnieje $A^{-1}$,

ii) wartości zmiennych $x_1, w_k, v_k$ dla $k \in H$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t=(x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^d$, gdzie $d=n+nN+pN$,

iii) struktura informacyjna jest zawierająca się, najprostszymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k = u_k(z^k), \qquad k \in \mathbb{H} \tag{2.2}$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}} l_k(x_{k+1}, u_k)dt, \tag{2.3}$$

gdzie dla $k \in \mathbb{H}$

$$m^o = \int_{\mathbb{T}} dt, \tag{2.4}$$

$$Q_k > 0, \tag{2.5}$$

$$P_{k+1} \geq 0, \tag{2.6}$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k^*(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium $q^*$ jest minimalna.

W pracy do rozwiązania problemu zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych typu R. Polega ona na przekształceniu zbioru $\mathbb{T}$ danego w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ w zbiory $R_k$, dane dla $k \in \mathbb{H}$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_k, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. Dzięki temu zadanie minimalizacji względem funkcji $u_k(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$ może być sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości $z^k$, $k \in \mathbb{H}$.

Ustalonej wartości $z^k$ odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $R_k|z^k$. Niezależność "kształtu" tego zbioru od sterowań $u^{k-1}$ jest podstawową własnością umożliwiającą otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji "oceny" stanu.

Podstawowy rezultat przedstawia następujące

Twierdzenie 2.1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v), to optymalne prawo sterowania dla każdego $k \in \mathbb{H}$ określone jest zależnościami:

$$u_k^* = -(Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A (\hat{x}_k + \hat{c}_k),$$

$$\hat{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k,$$

$$\hat{c}_k = \int_{R_k|z^k} c_k\, dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k,$$

$$c_k = A^{-1}(d_{k+1} + w_k),$$

$$d_k = (1 - K_k^{-1} P_k)\, c_k, \qquad c_{N+1} = 0,$$

$$K_k = A' (K_{k+1} - K_{k+1} B (Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B K_{k+1}) A + P_k, \qquad K_{N+1} = P_{N+1}.$$

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{l=1}^{k-1} A^{k-1-l} B u_l, \qquad \hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok} dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok}.$$

Dowód Tw.2.1 jest podobny do dowodu Tw.1.1 i składa się z następujących etapów

i) pierwotny problem minimalizacji względem funkcji (praw sterowania) przekształca się do problemu optymalizacji parametrycznej względem wartości tych funkcji,

ii) znajduje się rozwiązanie jednoetapowego problemu optymalizacji przy założonej funkcyjnej postaci kryterium $q_k$,

iii) pokazuje się prawdziwość założonej postaci funkcyjnej również dla $q_{k-1}$

Istotną częścią tej fazy dowodu jest pokazanie niezależności "reszty" od wcześniejszych wartości sterowań.

**Przekształcenie do problemu optymalizacji parametrycznej**

Przyjęte kryterium optymalności zgodnie ze sformułowaniem ma postać:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m^o} \int_T l_k(x_{k+1}, u_k)dt.$$

W każdej z całek będących składnikami powyższej sumy dokonujemy

odpowiedniej zmiany zmiennych połączonej z odwzorowaniem zbioru T w zbiór $R_k$. Mamy:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \int_{R_k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k dz^k, \tag{2.7}$$

gdzie $a_k = |\det A^{-k+1}| \, m^o$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o całce iterowanej możemy przekształcić (1.7) do postaci:

$$q = a_1^{-1} \int_{P_1} \int_{R_1|z^1} l_1(x_2, u_1) dr_1 dz_1 + \ldots + a_k^{-1} \int_{P_k} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k dz^k + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{P_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N dz^N = a_1^{-1} \int_{Z_1} \int_{R_1|z_1} l_1(x_2, u_1) dr_1 dz_1 + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_1} \ldots \int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k dz_k \ldots dz_1 + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_1} \ldots \int_{Z_N|z^{N-1}} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N dz_N \ldots dz_1. \tag{2.8}$$

Na podstawie (2.8) minimalizacja kryterium q względem funkcji $u_k = u_k(z^k)$, $k \in H$ sprowadza się do rekurencyjnej minimalizacji względem wartości tych funkcji odpowiednich sum częściowych występujących w prawej stronie wyrażenia (2.8). Mamy:

$$q^* = a_1^{-1} \int_{Z_1} \min_{u_1} \left( \int_{R_1|z_1} l_1(x_2, u_1) dr_1 + \ldots + a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} \min_{u_k} \left( \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k + \ldots \right. \right.$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \left( \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N \right) dz_N \ldots \Big) dz_k \ldots \Big) dz_1 \qquad (2.9)$$

Wyrażenie (2.9) kończy pierwszą fazę dowodu poświęconą przekształceniu problemu optymalizacji funkcyjnej do optymalizacji parametrycznej.

**Jednoetapowy problem minimalizacji**

Zakładamy, że wyrażenie:

$$q_k = a_k^{-1} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k +$$

$$+ a_{k+1}^{-1} \int_{Z_{k+1}|z^{k+2}} \Big( \ldots a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N dz_N \ldots \Big) dz_{k+1} \qquad (2.10)$$

podlegające w (2.9) minimalizacji względem $u_k$, przy uwzględnieniu, że $l_i(x_{i+1}, u_i)$, $i \in H$ są dodatnio określonymi formami kwadratowymi zmiennych $(x_{i+1}, u_i)$, może być dla każdego $k \in H$ przedstawione w postaci:

$$q_k = a_k^{-1} \left( \int_{R_k|z^k} (x_{k+1}+d_{k+1})' K_{k+1} (x_{k+1}+d_{k+1}) + u_k' Q_k u_k) dr_k + e_{pk} \right), \qquad (2.11)$$

gdzie $e_{pk}$, $d_{k+1}$ są niezależne od $u^k$, $K_{k+1} > 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla k=N jest to słuszne i w tym przypadku $K_{N+1}=P_{N+1}>0$ oraz $e_N \equiv 0$, $d_{N+1}=0$ są niezależne od $u^N$. Zatem dla indukcyjnego dowodu słuszności (2.11) dla każdego $k \in H$ wystarczy pokazać, że założona postać (2.11) implikuje analogiczną postać $q_{k-1}$.

Należy w tym celu odpowiednio do (2.9) : i) wykonać parametryczną minimalizację wyrażenia (2.11) względem $u_k$, ii) obliczyć $q_k^*$ odpowiadające

znalezionemu $u_k^*$, iii) wykonać całkowanie po zbiorze $Z_k|z^{k-1}$ względem zmiennej $z_k$, iv) wyznaczyć postać wyrażenia $q_{k-1}$.

Forma kwadratowa zmiennej $u_k$ otrzymana w wyniku podstawienia w (2.11) za $x_{k+1}$ równania stanu jest dodatnio określona, stąd wartość $u_k^*$, dla której przyjmuje ona minimum globalne, znajdujemy przyrównując do zera jej gradient względem $u_k$. Zauważmy również, że minimum formy kwadratowej (2.11) względem $x_{k+1}$ jest przesunięte o $-d_{k+1}$ względem początku układu współrzędnych lub inaczej w formie tej występują wyrazy liniowe zmiennej $x_{k+1}$. Mamy kolejno:

$$a_k q_k = \int_{R_k|z^k} (x_k+c_k)'A'K_{k+1}A(x_k+c_k) + 2u_k'B'K_{k+1}A(x_k+c_k)+$$

$$+ u'(Q_k+B'K_{k+1}B)u_k)dr_k + e_{pk}, \tag{2.12}$$

gdzie :

$$c_k=A^{-1}(d_{k+1} + w_k). \tag{2.13}$$

Obliczając pochodną prawej strony (2.12) względem $u_k$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B'K_{k+1}A \int_{R_k|z^k} (x_k + c_k)dr_k + (Q_k + B'K_{k+1}B)u_k \int_{R_k|z^k} dr_k = 0. \tag{2.14}$$

Stąd:

$$u_k^* = -(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A(\hat{x}_k + \hat{c}_k), \tag{2.15}$$

$$\hat{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k\, dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k, \tag{2.16}$$

$$\hat{c}_k = \int_{R_k|z^k} c_k\, dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k. \tag{2.17}$$

Podstawiając (2.15) do (2.12) otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_k | z^k} (x_k+c_k)A'K_{k+1}A(x_k+c_k) - 2(\hat{x}_k+\hat{c}_k)A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A(x_k+c_k) +$$

$$+ (\hat{x}_k+\hat{c}_k)A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A(\hat{x}_k+\hat{c}_k))dr_k + e_{pk}, \qquad (2.18)$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji $q_k$ co pozwoliło na określenie optymalnego prawa sterowania $u_k^*(z^k)$ (2.15) oraz odpowiadającej mu postaci $q_k^*$ (2.18).

**Wyznaczenie postaci funkcyjnej dla $q_{k-1}$**

Odpowiednio do struktury wyrażenia (2.9) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1} | z^{k-1}} l_{k-1}(x_k, u_{k-1})dr_{k-1} + \int_{Z_k | z^{k-1}} q_k^* dz_k \qquad (2.19)$$

Ponieważ $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ jest z założenia formą kwadratową zmiennych $x_k$, $u_{k-1}$, to głównym zadaniem jest przekształcenie drugiego składnika sumy (2.18) do takiej samej postaci jaką ma składnik pierwszy.

W tym celu podstawiamy w (2.18):

$$y_k = x_k + c_k,$$

$$\hat{y}_k = \hat{x}_k + \hat{c}_k,$$

$$\hat{y}_k = y_k - y_k + \hat{y}_k,$$

$$M_k = A'K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A.$$

Mamy kolejno:

$$a_k q_k^* - \int_{R_k|z^k} y_k' A' K_{k+1} A y_k \, dr_k = \int_{R_k|z^k} (-2(y_k - y_k + \hat{y}_k)' M_k y_k +$$

$$+ (y_k - y_k + \hat{y}_k)' M_k (y_k - y_k + \hat{y}_k)) dr_k + e_k = \int_{R_k|z^k} (-y_k' M_k y_k + (y_k - \hat{y}_k)' M_k (y_k - \hat{y}_k)) dr_k + e_k,$$

$$a_k q_k^* = \int_{R_k|z^k} -y_k' L_k y_k \, dr_k + \int_{R_k|z^k} (y_k - \hat{y}_k)' M_k (y_k - \hat{y}_k) dr_k + e_{pk},$$

gdzie

$$L_k = A' K_{k+1} A - M_k.$$

Obecnie należy wykonać odpowiednio do (2.19) całkowanie prawej strony wyrażenia (2.18) względem $z_k$ po zbiorze $Z_k|z^{k-1}$. Na podstawie Tw.10 i Wniosku 5 z rozdziału 4 mamy:

$$\int_{Z_k|z^{k-1}} q_k^* dz_k = a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_k|z^k} y_k' L_k y_k \, dr_k \right) dz_k + a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e_{pk}^* dz_k$$

$$= a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} y_k' L_k y_k \, dr_{k-1} + a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e_{pk}^* dz_k, \qquad (2.20)$$

gdzie

$$e_{pk}^* = e_{pk} + \int_{R_k|z^k} (y_k - \hat{y}_k)' M_k (y_k - \hat{y}_k) dr_k.$$

Wyrażenie na $e_{pk}$ można przekształcić podstawiając $y_k = x_k + c_k$, $\hat{y}_k = \hat{x}_k + \hat{c}_k$.

Otrzymujemy:

$$e^{*}_{pk} = e_{pk} + \int_{R_k|z^k} \tilde{x}_k' M_k \tilde{x}_k \, dr_k + 2 \int_{R_k|z^k} \tilde{x}_k' M_k \tilde{c}_k \, dr_k + \int_{R_k|z^k} \tilde{c}_k' M_k \tilde{c}_k \, dr_k,$$

gdzie $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$, $\tilde{c}_k = c_k - \hat{c}_k$.

Dodając do (2.20) składnik $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ otrzymujemy kolejno:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} ((x_k'+c_k)' L_k (x_k+c_k) + x_k' P_k x_k + u_{k-1}' Q_{k-1} u_{k-1}) dr_{k-1} +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e^{*}_{pk} dz_k = a_{k-1}^{-1} \Big( \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} ((x_k'+d_k)' K_k (x_k+d_k) + u_{k-1}' Q_{k-1} u_{k-1}) dr_{k-1} +$$

$$+ e_{p,k-1} \Big), \qquad (2.21)$$

$$c_k = A^{-1}(d_{k+1} + w_k),$$

$$d_k = (1 - K_k^{-1} P_k) c_k, \qquad c_{N+1} = 0,$$

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1} B (Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1}) A + P_k, \qquad K_{N+1} = P_{N+1}.$$

$$e_{p,k-1} = a_{k-1} a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} e^{*}_{pk} dz_k + \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} c_k' (L_k - L_k K_k^{-1} L_k) c_k \, dr_{k-1}. \qquad (2.22)$$

Otrzymana postać (2.21) posiada taką samą strukturę jak (2.11). Na zakończenie tej fazy dowodu pokażemy, że reszta $e_{p,k-1}$ nie zależy od żadnego ze sterowań $u^{k-1}$. W tym celu rozpatrzymy kolejno składniki określającego ją wyrażenia (2.22) z uwzględnieniem (2.16). Mamy kolejno:

1) $\int_{Z_k|z^{k-1}} e^{*}_{pk} dz_k$

składnik ten na podstawie Tw.11 z rozdz.4 może byc przekształcony do postaci:

$$\int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e^{*}_{pk}\, dz_{ok},$$

w której zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od $u^{k-1}$, zaś $e_{pk}$ nie zależy od $u^k$ z założenia,

ii) w drugim składniku różnica $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ nie zależy od $u^{k-1}$, stąd na podstawie Tw.10 i Tw.11 z rozdz.4

$$\int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_k|z^k} \tilde{x}'_k M_k \tilde{x}_k \, dr_k \right) dz_k = \int_{Z_k|z^{k-1}} \left( \int_{R_{ok}|z_o^k} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} \, dr_{ok} \right) dz_k =$$

$$= \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \left( \int_{R_{ok}|z_o^k} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} \, dr_{ok} \right) dz_{ok},$$

stąd cały składnik nie zależy od $u^{k-1}$,

iii) podobne rozumowanie stosuje się również do trzeciego składnika rozpatrywanej sumy, bowiem występujący w nim czynnik $\tilde{c}_k = c_k - \hat{c}_k$ nie zależy od $u^{k-1}$,

iv) trzeci ze składników przekształcamy następująco (rozdz.4, Tw.9, oraz Wniosek 4):

$$\int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{R_k|z^k} \tilde{c}'_k M_{k+1} \tilde{c}_k \, dr_k \, dz_k = |\det A| \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} \tilde{c}'_k M_{k+1} \tilde{c}_k \, dr_{k-1} =$$

$$= |\det A| \int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} \tilde{c}'_k K_{k+1} \tilde{c}_k \, dr_{ok-1},$$

co pozwala na stwierdzenie jego niezależności od $u^{k-1}$, ponieważ $\tilde{c}_k$ również nie zależy od $u^{k-1}$,

v) ostatni ze składników wyrażenia (2.22) może być odpowiednio do (Tw. 10 z rozdziału 4) przepisany w postaci:

$$\int_{R_{k-1}|z^{k-1}} c_k'(L_k - L_k K_k^{-1} L_k) c_k \, dr_{k-1} = \int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} c_k'(L_k - L_k K_k^{-1} L_k) c_k \, dr_{k-1},$$

skąd wynika jego niezależność od $u^{k-1}$.

Czynniki $a_k$, $a_{k-1}$ mają wartości liczbowe i nie zależą od $u^{k-1}$. Ostatecznie $e_{p,k-1}$ nie zależy od $u^{k-1}$ co kończy ostatnią fazę dowodu.

Dla dowodu zależności

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i), \quad \hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok} dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok}$$

wystarczy wykorzystać określenie

$$\tilde{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k,$$

a następnie na podstawie Tw. 10 z rozdz. 4 podstawić

$$R_k|z^k = \underline{p}_1(z^{k-1}) + R_o|z_o^k$$

oraz

$$x_k = x_{ok} + p_1(z^{k-1}),$$

gdzie

$$p_1(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i).$$

Rozpatrzmy przypadek, w którym dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$w_k = \int_{R_k | z^k} x_k dr_k = 0 \quad , \qquad \int_{R_k | z^k} x'_k N_k w_k dr_k = 0$$

Uwzględniając powyższe założenia możemy przekształcić (2.21) do postaci:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \Big( \int_{R_{k-1} | z^{k-1}} (x'_k L_k x_k + u'_{k-1} Q_{k-1} u_{k-1}) dr_{k-1} + a_k^{-1} \int_{Z_k | z^{k-1}} e^*_{pk} dz_k ,$$

gdzie

$$e^*_{pk} = e_{pk} + \int_{R_k | z^k} \tilde{x}'_k M_k \tilde{x}_k \, dr_k + \int_{R_k | z^k} w'_k K_k w_k \, dr_k . \qquad (2.22a)$$

Zauważmy, że w powyższym przekształceniu wystarczy uwzględnić tylko składniki związane z $w_k$ w wyrażeniu podcałkowym. Mamy:

$$d'_k K_k d_k + c'_k (L_k - L'_k K_k^{-1} L_k) c_k + c'_k M_k c_k = w'_k A^{-1} L'_k K_k^{-1} L_k A^{-1} w_k +$$

$$+ w'_k A^{-1} ( L_k - L'_k K_k^{-1} L_k ) A^{-1} w_k + w'_k A^{-1} M_k A^{-1} w_k = w'_k K_{k+1} w_k ,$$

Ponieważ $d_{N+1}=0$, $e_{pN}=0$, to wyrażenie (2.22a) jest tożsame dla każdego $k \in H$ z analogicznym wyrażeniem pojawiającym się w przypadku "centrowanego" zbioru $\mathbf{T}$ (patrz problem 1).

**Dyskusja rozwiązania problemu 2**

Problem 2 jest najbardziej ogólny w klasie modeli danych w przestrzeni stanu. Przykładowo, jak pokazano to w końcowej fazie dowodu Tw.2.1, rozwiązanie problemu 1 może być rozpatrywane jako szczególny przypadek, w którym dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$w_k = \int_{R_k | z^k} x_k dr_k = 0 \quad , \qquad \int_{R_k | z^k} x'_k N_k w_k dr_k = 0 .$$

Zauważmy, że pomimo braku jakichkolwiek założeń odnośnie zbioru $\mathbf{T}$ (założenie jego całkowalności w sensie Lebesgue'a nie stanowi ograniczenia praktycznego) nadal obowiązuje odpowiednik twierdzenia o podziale. Optymalne sterowanie jest liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego uzupełnioną o składnik "kompensujący" efekt tego, że środek ciężkości zbioru możliwych w przyszłości realizacji zmiennych niepewnych nie leży w początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie problemu 2 ma bezpośrednie zastosowanie aplikacyjne w powiązaniu z heurystyczną koncepcją kilkuetapowego ruchomego horyzontu optymalizacji i wielościennym zbiorem $\mathbf{T}$ określonym przez zbiór swoich wierzchołków.

## 3. Problem 3

Model w zmiennych stanu. Centrowany zbiór $\mathbf{T}$. Nieaktywne prawo sterowania. Zawierająca się struktura informacyjna.

**Sformułowanie problemu 3**

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_k + v_k, \end{cases}$$

gdzie $k \in H = \{1, \ldots, N\}$, $x_k, w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_k, v_k \in R^p$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ oraz istnieje $A^{-1}$,

ii) wartości zmiennych $x_1, w_k, v_k$ dla $k \in \mathbb{H}$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t = (x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbf{T} \subset R^d$, gdzie $d = n + nN + pN$, zbiór $\mathbf{T}$ jest "centrowany", tj.:

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} w_k \, dr_{ok} = 0, \qquad \int_{R_{ok}|z_o^k} x'_{ok} M w_k \, dr_{ok} = 0,$$

gdzie (patrz rozdz. 4 Def. 1) $R_{ok}$ jest obrazem zbioru $T$,

iii) nieaktywne prawa sterowania posiadają zawierającą się strukturę informacyjna; najprostszymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k = u_{ok}(z_o^k), \qquad k \in H$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_T l_k(x_{k+1}, u_{ok}(z_o^k))dt,$$

gdzie dla $k \in H$

$$l_k = x'_{k+1} P_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k,$$

$$m^o = \int_T dt,$$

$$Q_k > 0,$$

$$P_{k+1} \geq 0,$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu nieaktywnych praw sterowania $u^*_{ok}(z_o^k)$, $k \in H$ takich, że odpowiadająca im wartość kryterium $q^*$ jest minimalna.

W pracy do rozwiązania problemu zastosowano oryginalną metodę swobodnych zbiorów informacyjnych (porównaj problemy 1, 2). Polega ona na przekształceniu zbioru $T$ danego w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ w zbiory $R_{ok}$, dane dla $k \in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_{ok}, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. Dzięki temu zadanie minimalizacji względem funkcji $u_{ok}(z_o^k)$, $k \in H$ może być

sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości $z_o^k$, k∈H.

Ustalonej wartości $z_o^k$ odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $R_{ok}|z_o^k$. Niezależność tego zbioru od sterowań $u^{k-1}$ jest w rozpatrywanym problemie trywialna i umożliwia otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji "oceny" stanu.

Podstawowy rezultat uzyskany przy zastosowaniu metody swobodnych zbiorów informacyjnych przedstawia następujące

Twierdzenie 3.1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v) to optymalne nieaktywne prawo sterowania dla każdego k∈H określone jest zależnościami:

$$u_k^* = -(Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A (\hat{x}_{ok} + p_{o1}(z_o^k)),$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}\, dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok},$$

$$p_{o1}(z_o^k) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z_o^k),$$

$$K_k = A' (K_{k+1} - K_{k+1} B (Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B K_{k+1}) A + P_k, \qquad K_{N+1} = P_{N+1}.$$

Dowód. Dowód Tw.3.1 jest prosty. Synteza nieaktywnych praw sterowania wymaga operowania jedynie swobodnymi zbiorami informacyjnymi $R_{ok}$, k∈H. Kolejne etapy dowodu są następujące:

i) pierwotny problem minimalizacji względem funkcji (praw sterowania) przekształca się do problemu optymalizacji parametrycznej względem wartości tych funkcji,

ii) znajduje się rozwiązanie jednoetapowego problemu optymalizacji przy założonej funkcyjnej postaci kryterium $q_k$,

iii) pokazuje się prawdziwość założonej postaci funkcyjnej również dla $q_{k-1}$ (porównaj z analogicznym etapem dowodów Tw.1.1., 2.1.).

Przyjęte w sformułowaniu kryterium optymalności ma postać:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m_o} \int_{\bar{T}} l_k(x_{k+1}, u_k)dt.$$

W każdej z całek będących składnikami powyższej sumy dokonujemy odpowiedniej zmiany zmiennych połączonej z odwzorowaniem zbioru $\bar{T}$ w zbiór $R_{ok}$. Na podstawie Tw.2 i Wniosku 1 z rozdz.4, mamy:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \int_{R_{ok}} l_k(x_{k+1}, u_{ok})dr_{ok}dz_o^k, \tag{3.1}$$

gdzie $a_k = |\det A^{-k+1}| m_o$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o całce iterowanej możemy przekształcić (3.1) do postaci:

$$q = a_1^{-1} \int_{P_{o1}} \int_{R_{o1}|z^1} l_1(x_2, u_{o1})dr_{o1}dz_o^1 + \ldots + a_k^{-1} \int_{P_{ok}} \int_{R_{ok}|z^k} l_k(x_{k+1}, u_{ok})dr_{ok}dz_o^k + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{P_{oN}} \int_{R_{oN}|z^N} l_N(x_{N+1}, u_{oN})dr_{oN}dz_o^N = a_1^{-1} \int_{Z_{o1}} \int_{R_{o1}|z_{o1}} l_1(x_2, u_{o1})dr_{o1}dz_{o1} + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_{o1}} \ldots \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \int_{R_{ok}|z_o^k} l_k(x_{k+1}, u_{ok})dr_{ok}dz_{ok}\ldots dz_{o1} + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_{o1}} \ldots \int_{Z_{oN}|z_o^{N-1}} \int_{R_{oN}|z_o^N} l_N(x_{N+1}, u_{oN})dr_{oN}dz_{oN}\ldots dz_{o1}. \tag{3.2}$$

Na podstawie (3.2) minimalizacja kryterium q względem funkcji $u_k = u_{ok}(z^k)$, $k \in H$ sprowadza się do rekurencyjnej minimalizacji względem wartości tych funkcji odpowiednich sum częściowych występujących w prawej stronie wyrażenia (3.2). Mamy:

$$q^* = a_1^{-1} \int_{Z_{o1}} \min_{u_1} \left\{ \int_{R_{o1}|z_{o1}} l_1(x_2, u_1) dr_{o1} + \ldots + a_k^{-1} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \min_{u_k} \left\{ \int_{R_{ok}|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_{ok} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots a_N^{-1} \int_{Z_{oN}|z_o^{N-1}} \min_{u_N} \left\{ \int_{R_{oN}|z_o^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_{oN} \right\} dz_{oN} \ldots \right\} dz_{ok} \ldots \right\} dz_{o1}. \qquad (3.3)$$

Wyrażenie (3.3) kończy pierwszą fazę dowodu poświęconą przekształceniu problemu optymalizacji funkcyjnej do optymalizacji parametrycznej.

**Jednoetapowy problem minimalizacji**

Zakładamy, że wyrażenie:

$$q_k = a_k^{-1} \int_{R_{ok}|z_o^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_{ok} +$$

$$+ a_{k+1}^{-1} \int_{Z_{ok+1}|z_o^{k+2}} \left\{ \ldots a_N^{-1} \int_{Z_{oN}|z_o^{N-1}} \min_{u_N} \int_{R_{oN}|z_o^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_{oN} dz_{oN} \ldots \right\} dz_{ok+1}, \qquad (3.4)$$

podlegające w (3.3) minimalizacji względem $u_k$, przy uwzględnieniu, że $l_i(x_{i+1}, u_i)$, $i \in H$ są dodatnio określonymi formami kwadratowymi zmiennych $(x_{i+1}, u_i)$, może być dla każdego $k \in H$ przedstawione w postaci:

$$q_k = a_k^{-1}\left( \int_{R_{ok}|z_o^k} (x'_{k+1}K_{k+1}x_{k+1} + u'_kQ_ku_k)dr_{ok} + e_k \right), \tag{3.5}$$

gdzie $e_k$, jest niezależne od $u^k$ , $K_{k+1}>0$.

Łatwo spradzić, że dla k=N jest to słuszne i w tym przypadku $K_{N+1}=P_{N+1}>0$ oraz $e_N\equiv 0$ jest niezależne od $u^N$. Zatem dla indukcyjnego dowodu słuszności (3.5) dla każdego $k\in\mathbb{N}$ wystarczy pokazać, że założona postać (3.5) implikuje analogiczną postać $q_{k-1}$.

Należy w tym celu odpowiednio do (3.3) :i) wykonać parametryczną minimalizację wyrażenia (3.5) względem $u_k$, ii) obliczyć $q_k^*$ odpowiadające znalezionemu $u_k^*$, iii) wykonać całkowanie po zbiorze $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ względem zmiennej $z_{ok}$, iv) wyznaczyć postać wyrażenia $q_{k-1}$. Forma kwadratowa zmiennej $u_k$ otrzymana w wyniku podstawienia w (3.5) za $x_{k+1}$ równania stanu jest dodatnio określona, stąd wartość $u_k^*$, dla której przyjmuje ona minimum globalne, znajdujemy przyrównując do zera jej gradient względem $u_k$.

$$a_kq_k = \int_{R_{ok}|z_o^k} (x'_kA'K_{k+1}Ax_k + 2u'_kB'K_{k+1}Ax_k + 2u'B'K_{k+1}w_k + 2x'_kA'K_{k+1}w_k +$$

$$+ u'_k(Q_k+B'K_{k+1}B)u_k + w'_kK_{k+1}w_k)dr_{ok} + e_k, \tag{3.6}$$

Można pokazać, że na podstawie założeń odnośnie do zbioru $\mathbf{T}$ zachodzi:

$$u'_kB'K_{k+1}\int_{R_{ok}|z^k} w_k\,dr_{ok} \equiv 0, \tag{3.7}$$

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} x'_kA'K_{k+1}w_k\,dr_{ok} \equiv 0. \tag{3.8}$$

Rzeczywiście, (3.7) wynika bezpośrednio z własności zbioru $\mathbf{T}$, zaś dla (3.8) mamy:

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} x_k' A' K_{k+1} w_k dr_{ok} = p_1' A' K_{k+1} \int_{R_{ok}|z_o^k} w_k dr_{ok} + \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}' A' K_{k+1} w_k dr_{ok} = 0$$

Zerowanie się w (3.6) składników (3.7), (3.8), zachodzące przy spełnieniu założeń przyjętych w sformułowaniu, powoduje uproszczenie rozważań i wynikowych wzorów określających prawa sterowania.

Obliczając pochodną prawej strony (3.6) względem $u_k$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B' K_{k+1} A \int_{R_{ok}|z_o^k} x_k dr_{ok} + (Q_k + B' K_{k+1} B) u_k \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok} = 0. \qquad (3.9)$$

Stąd

$$u_k^* = -(Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \,(\hat{x}_{ok} + p_{o1}(z_o^k)), \qquad (3.10)$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z^k} x_k dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z^k} dr_{ok}, \qquad (3.11)$$

$$p_{o1}(z_o^k) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u_i(z_o^k).$$

Podstawiając (3.10) do (3.6) otrzymujemy:

$$q_k^* = \int_{R_{ok}|z_o^k} (x_k A' K_{k+1} A\, x_k - 2\, \hat{x}_k\, A' K_{k+1} B (Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A\, x_k +$$

$$+ \hat{x}_k\, A' K_{k+1} B (Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A\, \hat{x}_k) dr_{ok} + e_k, \qquad (3.12)$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji $q_k$ co pozwoliło na określenie optymalnego neutralnego prawa sterowania $u_{ok}^*(z_o^k)$ (3.10) oraz odpowiadającej mu postaci $q_k^*$ (3.12).

**Wyznaczenie postaci funkcyjnej dla $q_{k-1}$**

Odpowiednio do struktury wyrażenia (3.3) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} l_{k-1}(x_k, u_{k-1})dr_{ok-1} + \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} q_k^* dz_{ok} \qquad (3.13)$$

Ponieważ $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ jest z założenia formą kwadratową zmiennych $x_k, u_{k-1}$, to głównym zadaniem jest przekształcenie drugiego składnika sumy (3.13) do takiej samej postaci jaką ma składnik pierwszy.

W tym celu podstawiamy w (3.12):

$$\hat{x}_k = x_k - x_k + \hat{x}_k,$$

$$M_k = A'K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A. \qquad (3.14)$$

Mamy kolejno:

$$a_k q_k^* - \int_{R_{ok}|z_o^k} x_k'A'K_{k+1}Ax_k dr_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} (-2(x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k x_k +$$

$$+ (x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k(x_k - x_k + \hat{x}_k) + w_k'K_{k+1}w_k)dr_{ok} + e_k =$$

$$= \int_{R_{ok}|z_o^k} (-2x_k'M_k x_k + 2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + x_k'M_k x_k + \ldots$$

$$-2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k) + w_k'K_{k+1}w_k)dr_{ok} +$$

$$+ e_k = \int_{R_{ok}|z_o^k} -x_k'M_k x_k dr_{ok} + \int_{R_{ok}|z_o^k} (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k)dr_{ok} + \int_{R_{ok}|z_o^k} w_k'K_{k+1}w_k dr_{ok} + e_k.$$

Oznaczając

$$\bar{x}_k = x_k - \hat{x}_k,$$

$$e_k^* = e_k + \int_{R_{ok}|z_o^k} w_k' K_{k+1} w_k dr_{ok} +$$

$$+ \int_{R_{ok}|z_o^k} \tilde{x}_k' A_k' K_{k+1} B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1} B'K_{k+1} A\tilde{x}_k dr_{ok}, \qquad (3.15)$$

otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_k' L_k x_k dr_{ok} + e_k^* \qquad (3.16)$$

$$L_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A.$$

Obecnie należy wykonać odpowiednio do (3.14) całkowanie pierwszej strony wyrażenia (3.16) względem $z_{ok}$ po zbiorze $Z_{ok}|z_o^{k-1}$. Na podstawie Tw.7 i Wniosku 3 z rozdz.4, mamy:

$$\int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} q_k^* dz_{ok} = a_k^{-1} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \left( \int_{R_{ok}|z_o^k} x_k' L_k x_k dr_{ok} \right) dz_{ok} +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k^* dz_{ok} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} x_k' L_k x_k dr_{ok-1} + a_k^{-1} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k^* dz_{ok}. \qquad (3.17)$$

Oznaczając

$$e_{k-1} = a_{k-1} a_k^{-1} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k^* dz_{ok} \qquad (3.18)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \left( \int_{R_{ok-1}|z_o^{k-1}} (x_k'(L_k+P_k)x_k + u_{k-1}' Q_{k-1} u_{k-1}) dr_{ok-1} + e_{k-1} \right). \qquad (3.19)$$

czyli:

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A + P_k, \qquad K_{N+1} = P_{N+1}.$$

Otrzymana postac (3.19) posiada taką samą strukturę jak (3.5). Reszta $e_{k-1}$ nie zależy od żadnego ze sterowań $u^{k-1}$ ponieważ żadna z występujących funkcji podcałkowych jak również żaden ze zbiorów $Z_{ok}|z_o^{k-1}$, $R_{ok-1}|z_o^{k-1}$, $R_{ok}|z_o^k$ z definicji nie zależą od tych praw sterowania.

**Dyskusja problemu 3**

Problem 3 ma znaczenie poznawczo-dydaktyczne. Pokazano w nim, że niewielka zmiana w sformułowaniu problemu syntezy praw sterowania, polegająca na poszukiwaniu optymalnych pomocniczych praw sterowania, których argumentami są obserwacje z "odliczonym" efektem działania wcześniejszych sterowań, obniża jakościowo stopień trudności dowodu optymalności praw sterowania. Podejście takie może mieć zastosowanie do problemów 1, 2. Pokazuje ono równocześnie w innym świetle mechanizm niezależności "reszt" od wcześniejszych sterowań.

## 4. Problem 4

Model bezpośredni. Zawierająca się struktura informacyjna.

**Sformułowanie problemu 4**

Zakładamy, że:

1) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie H ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, & x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k, \end{cases}$$

gdzie $k \in H = \{1, \ldots, N\}$, $x_k$, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_k$, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ $C \in R^{pxn}$

ii) wartości zmiennych $x_1$, $w_k$, $v_k$ dla $k \in H$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t=(x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^d$, gdzie $d=n+nN+pN$,

iii)struktura informacyjna jest zawierająca się; najprostszymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k = u_k(z^k), \quad k \in H,$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^\circ} \sum_{k=1}^{k=N} \int_T (u_k' Q_k u_k + u_k' y_k) dt,$$

gdzie dla $k \in H$

$$m^\circ = \int_T dt$$

$$Q_k > 0,$$

$$y_k : R^d \to R^m,$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k^*(z^k)$, $k \in H$ takich, że odpowiadająca im wartość kryterium $q^*$ jest minimalna.

Twierdzenie 4.1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v) ze sformułowania problemu 4, to:

i) optymalne prawo sterowania dla każdego $k \in H$ określone jest zależnością:

$$u_k^* = u_k^*(z^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_k | z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k | z^k} ds_k$$

oraz:

$$u_k^* = u_{ok}(z_o^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_{ok} | z_o^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_{ok} | z_o^k} ds_k$$

ii)minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem:

$$q^{*}=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}}\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big)\,Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big)\,ds_k\,dz_o^k,$$

Dowód. Dokonując odpowiedniej zmiany zmiennych (patrz rozdz.3) w każdej z całek będących składnikami sumy określającej q możemy zapisać problem minimalizacji w postaci:

$$q=\int_{Z_1}\min_{u_1(z^1)}\Big(\int_{S_1|z^1}(u_1'Q_1u_1+u_1'y_1)ds_1+\ldots$$

$$+\int_{Z_k|z^{k-1}}\min_{u_k(z^k)}\Big(\int_{S_k|z^k}(u_k'Q_ku_k+u_k'y_k)ds_k+\ldots$$

$$+\int_{Z_N|z^{N-1}}\min_{u_N(z^N)}\Big(\int_{S_N|z^N}(u_N'Q_Nu_N+u_N'y_N)ds_N\Big)dz_N\ldots\Big)dz_k\ldots\Big)dz_1.$$

Zakładamy, że k-ty problem optymalizacji ma postać:

$$\min_{u_k(z^k)}\Big(\int_{S_k|z^k}(u_k'Q_ku_k+u_k'y_k)ds_k+e_k\Big),$$

gdzie $e_k$ nie zależy od $u_i$, $i=1,\ldots,k-1$.

Rozwiązanie k-tego problemu minimalizacji ma postać:

$$u_k^{*}=-\frac{1}{2}Q_k^{-1}\int_{S_k|z^k}y_k(s_k)ds_k\Big/\int_{S_k|z^k}ds_k$$

i odpowiada mu składnik:

$$e_{k-1}=-\frac{1}{4}\int_{Z_k|z^{k-1}}\Big(\int_{S_k|z^k}y_k(s_k)ds_k\Big/\int_{S_k|z^k}ds_k\Big)\,Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_k|z^k}y_k(s_k)ds_k\Big/\int_{S_k|z^k}ds_k\Big)\int_{S_k|z^k}ds_k)dz_k+\int_{Z_k|z^{k-1}}e_kdz_k$$

wchodzący addytywnie do k-1 go problemu minimalizacji. Składnik ten może być również zapisany w postaci:

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{S_k|z^k} \Big( \int_{S_k|z^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big( \int_{S_k|z^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) ds_k dz_k + \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k dz_k .$$

Rozpatrywany składnik nie zależy od żadnego $u_i$, $i=1,\ldots,k-1$, ponieważ na podstawie Tw.11 z rozdz.3 $S_k|z^k = S_{ok}|z_o^k$, zbiór $S_{ok}|z_o^k$ z definicji nie zależy od $u_i$, $i=1,\ldots,k-1$, w konsekwencji wyrażenie podlegające całkowaniu względem $z_k$ jest funkcją $z_{ok}$ i ostatecznie cały składnik $e_{k-1}$ może być zapisany w postaci:

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \int_{S_{ok}|z_o^k} \Big( \int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big( \int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) ds_k dz_k + \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k dz_{ok} .$$

Uwzględniając, że zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od $u_i$, $i=1,\ldots,k-1$, również cały składnik nie zależy od $u_i$, $i=1,\ldots,k-1$.

Ponieważ dla $k=N$, $e_N=0$ i tym samym nie zależy od $u_i$, $i=1,\ldots,N-1$, to postać:

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_k|z^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k$$

jest słuszna dla każdego $k \in H$.

Wykorzystując ponownie Tw.11 z rozdz.3 wyrażenie na optymalne prawo sterowania można przekształcić do postaci:

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k .$$

Składnik o numerze k-tym sumy określającej $q^*$ ma postać:

$$-\frac{1}{4}\int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}}\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big)\, ds_k dz_k =$$

$$-\frac{1}{4}\int_{S_{ok}}\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big)\, d(s_k, z_o^k)$$

Stąd

$$q^* = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}}\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k\Big)\, ds_k\, dz_o^k,$$

co kończy dowód Tw.4.1.

Wniosek 4.1 Jeżeli spełnione są założenia i)-v) ze sformułowania problemu 4 i dodatkowo dla każdego $k\in H$ $y_k(s_k)=L_k s_k$ to optymalne prawo sterowania dla każdego $k\in H$ jest liniową funkcją środka ciężkości $b_{S_{ok}|z_o^k}$ zbioru $S_{ok}|z_o^k$

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} L_k\, b_{S_{ok}|z_o^k},$$

a minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem:

$$q^* = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}} b'_{S_{ok}|z_o^k} Q_k^{-1} b_{S_{ok}|z_o^k}\, d(s_{ok}, z_o^k).$$

Dowód. Podstawiając $y_k(s_k)=L_k s_k$ w wyrażeniu na optymalne prawo sterowania z Tw.4.1 otrzymujemy:

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} L_k\, b_{S_{ok}|z_o^k}.$$

Podobnie, podstawiając $y_k(s_k)=L_k s_k$ w wyrażeniu na minimalną wartość wskaźnika jakości z tego samego Tw.4.1, otrzymujemy:

$$q^* = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}} b'_{S_{ok}|z_o^k} Q_k^{-1} b_{S_{ok}|z_o^k}\, d(s_{ok}, z_o^k).$$

**Dyskusja problemu 4**

Problem 4 przedstawia rozwiązanie problemu syntezy praw sterowania dla modelu bezpośredniego. Występujący w tym problemie model w zmiennych stanu ma tylko znaczenie pomocnicze, pozwala na nadanie zmiennym niepewnym interpretacji fizykalnej i traktowanie modelu bezpośredniego jako przekształconego modelu w zmiennych stanu. Modele bezpośrednie jako źródłowe występują przykładowo w ekonometrii. W przypadku modelu bezpośredniego liniowego względem sterowań sterowanie optymalne jest liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego typu S dla dowolnego całkowalnego zbioru T. Możliwe jest również jawne zapisanie optymalnej postaci wskaźnika jakości.

## 5. Problem 5

Model bezpośredni. Klasyczna struktura informacyjna. Nieaktywne prawo sterowania.

**Sformułowanie problemu 5**

Zakładamy, że:

i)dyskretne, stacjonarne bezpośrednie modele dynamiczne, odpowiednio wymuszony i swobodny, określone w horyzoncie $H_u$, mają postacie:

$$z_k = h_k' t + p_k' u, \tag{5.1}$$

$$z_{ok} = h_k' t, \tag{5.2}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots, N_3\}$,

$t = col(t_i : i \in H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R\ )$,

$u = col(u_i : i \in H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R\ )$,

$h_k \in R^{N_1},\ p_k \in R^{N_2}$,

ii) wartosci zmiennych t nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^d$,

iii)nieaktywne prawo sterowania ma postać,

$$u_k = u_{ok}(z_{o\gamma(k)}), \quad k \in H_u, \tag{5.3}$$

gdzie

$\gamma : H_u \to \mathcal{H}_z,\ \gamma(k) = D_k$

jest danym przyporządkowaniem informacyjnym takim, że prawa sterowania

$u_k = u_k(z_{\gamma(k)}), \quad k \in H_u,$

równoważne nieaktywnym prawom sterowania (patrz rozdz.1 p.3), stanowią łącznie z modelem klasyczną strukturę informacyjną,

iv) kryterium optymalnosci ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N_2} \int_T (a_k u_k^2 + u_k y_k)dt, \tag{5.4}$$

gdzie dla $k \in H_u$

$a_k \in R,\ a_k > 0$

$y_k : R^{N_1 - r} \to R$

$m^o = \int_T dt,$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu nieaktywnych praw sterowania $u^*_{ok}(z_{o\gamma(k)})$, $k \in H_u$, takich, że odpowiadająca im wartosc kryterium $q^*$ jest minimalna.

Definicja 5.1. Kanonicznym problemem syntezy nieaktywnego prawa sterowania nazywamy

$$\min_{u} \int_{S_o} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))dz_{oD}dt_2,$$

gdzie $S_o \subset R^{N_1}$, $s=(z_{oD}, t_2)\in S_o$, $\dim t_2 = N_1 - r$, funkcja y jest dana.

Twierdzenie 5.1. Optymalne nieaktywne prawo sterowania będące rozwiązaniem problemu określonego w Def.5.1 ma postać:

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 \Big/ \int_{S_o|z_{oD}} dt_2$$

i odpowiada mu optymalna wartość wskaźnika q wynosząca:

$$q^* = -\frac{1}{4} a^{-1} \int_{S_o} \Big( \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 \Big/ \int_{S_o|z_{oD}} dt_2 \Big)^2 dz_{oD}dt_2$$

Jeżeli dodatkowo założyć

$$y(t_2) = k' t_2,$$

to

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} k' b_{S_o|z_{oD}}$$

oraz

$$q^* = -\frac{1}{4} a^{-1} \int_{S_o} (b_{S_o|z_{oD}})^2 dz_{oD}dt_2,$$

gdzie $b_{S_o|z_{oD}}$ jest środkiem ciężkości zbioru $S_o|z_{oD}$.

Dowód. Stosując twierdzenie o całce iterowanej mamy:

$$\int_{S_o} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))dz_{oD}dt_2 =$$

$$= \int_{Z_{oD}} \Big( \int_{S_o|z_{oD}} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))\, dt_2 \Big) dz_{oD} =$$

$$= \int_{Z_{oD}} ( u^2(z_{oD})( \int_{S_o|z_{oD}} dt_2 + u(z_{oD}) \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)\, dt_2 ) dz_{oD}.$$

Przyrownując do zera pochodną względem u wyrażenia podcałkowego przy uwzględnieniu $\int_{S_o|z_{oD}} dt_2 > 0$ otrzymujemy:

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 / \int_{S_o|z_{oD}} dt_2,$$

zas wskaźnik jakości otrzymany po podstawieniu powyższego wyrażenia ma postać:

$$q^* = -\frac{1}{4} a^{-1} \int_{S_o} ( \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 / \int_{S_o|z_{oD}} dt_2 )^2 dz_{oD} dt_2.$$

Łatwo sprawdzić, że zakładając liniową postać funkcji $y(t_2)$ tj. $y(t_2) = k' t_2$ otrzymujemy wyrażenia podane w Tw. 5.1.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli spełnione są założenia i)-v), to rozwiązanie problemu 5 sprowadza się do rozwiązania $N_2$ wzajemnie niezależnych problemów postaci:

$$\min_{u_{ok}} \int_{S_{ok}} (a\, u^2(z_{oD_k}) + u(z_{oD_k}) y(t_2)) dz_{oD_k} dt_2,$$

$k = 1, \ldots, N_2$.

Dowód. Dokonując odpowiedniej zmiany zmiennych (patrz rozdz. 3) w każdej z całek będących składnikami sumy, określające q oraz uwzględniając, że żaden z występujących zbiorów nie zależy od praw sterowania, możemy zapisać problem minimalizacji w postaci:

$$q = \min_{u_1(z^1)} ( \int_{S_{o1}} (a\, u^2(z_{oD_1}) + u(z_{oD_1}) y(t_2)) dz_{oD_1} dt_2 ) + \ldots$$

$$+ \min_{u_k(z^k)} ( \int_{S_{ok}} (a\, u^2(z_{oD_k}) + u(z_{oD_k}) y(t_2)) dz_{oD_k} dt_2 + \ldots$$

$$+ \min_{u_N(z^N)} \left( \int_{S_{oN}} (a\, u^2(z_{oD_N}) + u(z_{oD_N})y(t_2))dz_{oD_N}dt_2 \right.$$

Założenie klasycznej struktury informacyjnej nie jest wykorzystywane w powyższym dowodzie, umożliwia natomiast "przeliczenie" nieaktywnych praw sterowania na prawa sterowania postaci $u_k=u_k(z_{\gamma(k)})$, $\gamma(k)=D_k$.

**Dyskusja problemu 5**

Problem 5 przedstawia rozwiązanie zadania syntezy praw sterowania dla modelu bezpośredniego danego jako źródłowy. Dodatkowo, podobnie jak w problemie 3, poszukuje się pomocniczych praw sterowania, tj. funkcji pomiarów z "odliczonym" wpływem wcześniejszych sterowań. Połączenie w jednym problemie modelu bezpośredniego i pomocniczych praw sterowania pozwoliło na jawną dekompozycję wieloetapowego problemu wyjściowego na wzajemnie niezależne problemy jednoetapowe. Otrzymany wynik ma głównie charakter poznawczy, pokazuje bowiem w sposób najbardziej bezpośredni strukturę problemów syntezy praw sterowania z modelem liniowym, niepewnością ograniczoną i klasyczną strukturą informacyjną. W niektórych przypadkach postępowanie przedstawione w problemie może być wykorzystane do uproszczenia rozwiązania praktycznego problemu syntezy praw sterowania.

## 6. Problem 6.

Model bezpośredni. Bezpośrednie prawo sterowania.

**Sformułowanie problemu 6**

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny bezpośredni model dynamiczny określony w horyzoncie $H_u$ ma postać:

$$z_k = h_k(t,u),$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots, N_3\}$,

$t = col(t_i : i \in H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R\ )$,

$u = col(u_i : i \in H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R\ )$,

$h_k : R^{N_1} \times R^{N_2} \to R$,

ii) wartości zmiennych t nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^d$,

iii)prawo sterowania ma postać:

$$u_k = u_k(z_{oD_k}), \quad k \in H_u,$$

gdzie

$$\gamma : H_u \to \mathcal{H}_z,\ \gamma(k) = D_k,\ \mathcal{N}(D_i) = r_i$$

jest danym przyporządkowaniem informacyjnym,

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N_2} \int_T (a_k u_k^2 + u_k y_k)dt,$$

gdzie dla $k \in H_u$

$a_k \in R,\ a_k > 0$,

$y_k : R^{N_1} \to R$,

$m^o = \int_T dt$,

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k = u_k(z_{oD_k})$, $k \in H_u$ takich, że odpowiadająca im wartość kryterium $q^*$ jest minimalna.

Twierdzenie 6.1. Problemowi 6 odpowiada problem wariacyjny o postaci:

$$\begin{cases} \min\limits_{g} \dfrac{1}{m^{o}} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N_2} \int_{T} (a_k g_k^2 + g_k y_k)dt, \\ f(t,g,g_t)=0, \end{cases}$$

gdzie:

$$g_k : R^{N_1} \to R,$$

$$g_{kt} = \mathrm{row}(\partial g_k / \partial t),$$

$$g = \mathrm{col}(g_i : i \in H_u = \{1,\ldots,N_2\}),$$

$$g_t = [g_{it} : i \in H_u = \{1,\ldots,N_2\}],$$

$$f : R^{N_1} \times R^{N_2} \times R^{N_2 \times N_1} \to R^{p}, \quad p = \sum_{k=1}^{k=N_2} (N_1 - r_i)$$

Funkcja f jest p wymiarową funkcją układu ograniczeń, określoną na podstawie modelu 1) i przyporządkowania informacyjnego $\gamma$.

Dowód. Odpowiednio do rozważań z rozdz.1, p.3 funkcja $g_i(t)$ jest równoważna danej funkcji $u_i(z_{D_i})$, jeżeli spełniony jest warunek (13) lub (14). Ten sam warunek otrzymany w inny sposób w rozdz.2 wzór (28) nosi nazwę różniczkowego ograniczenia informacyjnego. Jeżeli zbiór $z_{D_i}$ zawiera $r_i$ pomiarów skalarnych to omawiany warunek stanowi $N_i - r_i$ równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Łącznie warunki, jak omówiony dla $i \in \{1,\ldots,N_2\}$, dają ograniczenie $f(t,g,g_t)=0$ dla całego problemu.

Przykład 1

Dyskretny stacjonarny model dynamiczny określony w horyzoncie $H=\{1,2,3\}$ ma postać:

$$x_2 = x + u_1, \quad x$$
$$x_3 = x_2 + u_2,$$

$$z_1 = x,$$
$$z_2 = x_2 + v, \qquad (a)$$

gdzie wszystkie zmienne są skalarami. Model ten może być przekształcony do następującej postaci bezposredniej:

$$z_1 = x,$$
$$z_2 = x + v + u_1. \qquad (b)$$

Wartości zmiennych $t=(x,v)$ nie są znane, wiadomo natomiast, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $T \subset R^2$.

Prawa sterowania mają postacie:

$u_1 = u_1(z_1)$,

$u_2 = u_2(z_2)$.

Wskaźnik jakości ma postać:

$$q = \int_T (k^2(u_1)^2 + (x_3)^2)dt.$$

Należy znaleźć prawa sterowania $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$ nadające przyjętemu wskaźnikowi wartość minimalną.

Sformułowany jak powyżej problem syntezy praw sterowania jest zmodyfikowaną wersją tzw. "kontrprzykładu Witsenhausena". Modyfikacja polega na zastąpieniu modelu niepewności losowej dla niezależnych i normalnych zmiennych losowych modelem niepewności ograniczonej przy dowolnym zbiorze T. Dodatkowo dla uzyskania jednolitości z oznaczeniami stosowanymi w pracy "przesunięto" o 1 indeksację stanu i pomiarów, a zamiast rownania $x_3 = x_2 - u_2$ przyjęto $x_3 = x_2 + u_2$.

Przyjęty wskaźnik jakości można przekształcić wykorzystując równania stanu do następującej postaci bezpośredniej:

$$q = \int_T ([u_1 \; u_2] \begin{bmatrix} 1+k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + 2 [x \; x] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + x^2)dt.$$

Podstawiając

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

przekształcamy wskaźnik q do postaci odpowiadającej założeniom w sformułowaniu problemu 6.

$$q = \int_T ([p_1 \; p_2] \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + 2 [0 \; x] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + x^2) dt =$$

$$= \int_T (k^2 p_1^2 + p_2^2 + 2xp_2 + x^2) dt.$$

Zastępując minimalizację względem funkcji $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$, minimalizacją względem $g_1(x,v)$, $g_2(x,v)$ wprowadzamy ograniczenia informacyjne. W rozpatrywanym przypadku (patrz rozdz. 2, p. 3 przykład 5) mają one postać:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial v = 0 \\ \partial g_2/\partial x - (\partial g_2/\partial v)(1+(\partial g_1/\partial x)) = 0 \end{cases} \qquad (c)$$

Podstawiając

$g_1 = p_1$,

$g_2 = p_2 - p_1$,

otrzymujemy następujące ograniczenie informacyjne dla funkcji $p_1(x,v)$, $p_2(x,v)$.

$$\begin{cases} \partial p_1/\partial v = 0 \\ \partial p_2/\partial x - \partial p_2/\partial v - (\partial p_1/\partial x)(1+(\partial p_2/\partial v)) = 0. \end{cases} \qquad (d)$$

Dalej dla uproszczenia zapisów będziemy oznaczać:

$\partial p_1(x,v)/\partial x = p_{1x}$,

$\partial p_2(x,v)/\partial x = p_{2x}$,

$\partial p_2(x,v)/\partial v = p_{2v}$.

Rownania charakterystyk dla układu (d) zapisane z wykorzystaniem powyższych oznaczeń mają postać:

$$\begin{cases} dv/dx = -1-p_{1x}(x), \\ dp_{2x}(x,v(x))/dx = p_{1x}(x), \\ dp_{2v}(x,v(x))/dx = 0. \end{cases}$$

oraz dodatkowo zachodzi:

$$p_{2x}(x,v(x))=p_{2v}(x,v(x))+p_{1x}(x)(p_{2v}(x,v(x))+1).$$

Zauważmy, że pierwsze z równań układu (e) określa rodzinę zbiorów zgodnych z pomiarem o numerze 2 (patrz rozdz.2, p.1). Rzeczywiście, biorąc drugie z równań modelu bezpośredniego (a) z uwzględnieniem $u_1=g_1(x)=p_1(x)$ mamy:

$$z_2=x+v+p_1(x).$$

Przyrównując do zera różniczkę $dz_2$ otrzymujemy:

$$0=(1+\partial p_1(x)/\partial x)dx+dv,$$

stąd

$$dv/dx=-1-p_{1x}(x).$$

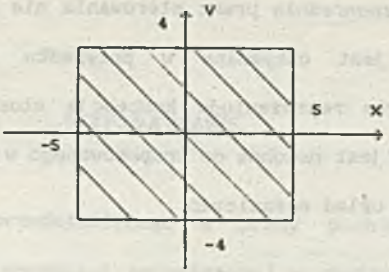
Na podstawie równania (f) "kształt" zbioru zgodnego z pomiarem $z_2$ zależy od prawa sterowania $p_1(x)$. Zbiory $C|z_2$ i $T_0(C|z_2)$ odpowiadające prawom sterowania

$$p_1^a(x) = 0,$$

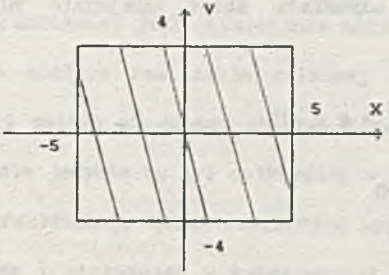
$$p_1^b(x) = -kx, \quad k>0,$$

$$p_1^c(x) = \begin{cases} -kx, & -\Delta\le x\le\Delta, \ \Delta>0 \\ -k\Delta, & x<\Delta \\ k\Delta, & x>\Delta, \end{cases}$$

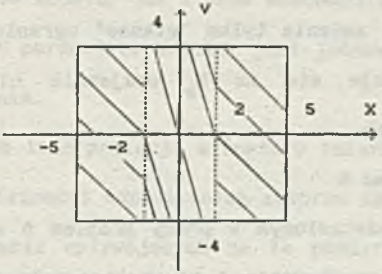
przedstawiają rys.6.1. a, b, c.




a) $p_1(x)=0$




b) $p_1(x)=3x$




c) $p_1(x)=\begin{cases} 3x, & \text{dla } -2\le x\le 2 \\ -6 & x<2 \\ 6 & x>2 \end{cases}$

Rys. 6.1. Wpływu prawa sterowania $p_1(x)$ na postacie zbiorów

$$C|z_2,\ T\cap(C|z_2)$$

Fig. 6.1. Influence of the control law $p_1(x)$ on forms of sets $C|z_2$, $T\cap(C|z_2)$

Przykładowe bezpośrednie prawa sterowania nie są wybrane przypadkowo. Pierwsze z nich jest optymalne w przypadku zawierającej struktury informacyjnej, drugie reprezentuje koncepcję stosowania liniowego prawa sterowania, trzecie jest podobne do proponowanego w [64], [44].

Wniosek 6.1. Jeżeli układ ograniczeń

$$f(t,g,g_t)=0$$

może być przedstawiony w postaci:

$$f_i(t,g_i,g_{it})=0,\ i\in H_u=\{1,\ldots,N_2\},$$

to problemowi 6 odpowiada zbiór wzajemnie niezależnych problemów wariacyjnych

$$\begin{cases} \min\limits_{g_i} \int\limits_T (a_i g_i^2 + g_i y_i)dt \\ f_i(t,g_i,g_{it})=0. \end{cases}$$

$i\in H_u$

Dowód. Funkcje $g_k$ $k\in H_u=\{1,\ldots,N_2\}$ występujące w problemie wariacyjnym z Tw.6.1 mogą być zależne jedynie poprzez ograniczenia $f(t,g,g_t)=0$. Jeżeli ograniczenie to dekomponuje się na zbiór ograniczeń $f_i(t,g_i,g_{it})=0$ takich, że zmiana funkcji $g_i$ zmienia tylko "własne" ograniczenie, to cały problem wariacyjny dekomponuje się na $N_2$ wzajemnie niezależnych częściowych problemów wariacyjnych.

**Dyskusja problemu 6**

W zakresie przedstawionym w pracy problem 6 ma charakter poznawczy. Stanowi go próba uporządkowania i sformalizowania syntezy praw sterowania przy nieklasycznej strukturze informacyjnej. Podejście przedstawione w problemie 6 wykorzystuje tzw. bezpośrednią postać prawa sterowania będącego funkcją wszystkich zmiennych niepewnych rozpatrywanego zadania. Dla uzyskania zgodności z założonym przyporządkowaniem informacyjnym wykorzystywane są wprowadzone w pracy ograniczenia informacyjne. Ilustrację do problemu 6 stanowi znany "kontrprzykład Witsenhausena".

# PODSUMOWANIE

Podstawową cechą przedstawionego w pracy problemu syntezy praw sterowania jest model niepewności ograniczonej w powiązaniu z oryginalną metodą zbiorów informacyjnych i dwiema przykładowymi parametryzacjami zbioru informacyjnego – elipsoidalną i wielościenną.

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właśnie modelu niepewności należą do danego zbioru. Struktura tego zbioru może być dowolna, wymaga się jedynie by był całkowalny w sensie Lebesgue'a.

Model niepewności ograniczonej, można rozszerzyć wprowadzając dowolną miarę określoną na zbiorze i otrzymując w konsekwencji model niepewności losowej. Zbiory informacyjne stają się w tej sytuacji zbiorami z miarą. W przypadku zbiorów typu S i modelu liniowego miara ta jest niezmiennicza zarówno względem parametrów modelu, jak i praw sterowania. Dla zbiorów typu R omawiana miara zależy od parametrów modelu, jest jednak nadal niezmiennicza względem praw sterowania.

W pracy pokazano nową interpretację struktury informacyjnej, opartą w sposób naturalny na niezależności odpowiednich zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami od praw sterowania wpływających na te pomiary. W rozważaniach tych wykorzystywano postacie różniczkowe zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami i wynikające stąd różniczkowe ograniczenia informacyjne. Różniczkowe ograniczenia informacyjne pozwalają na sformułowanie zadania syntezy tzw. bezpośredniego prawa sterowania, niezależnie od założonej struktury informacyjnej. Efektywne wykorzystanie ograniczeń informacyjnych

dla celów syntezy prawa sterowania przy dowolnej strukturze informacyjnej wymaga dalszych badań. W pracy ograniczono się do problemu podobnego do kontrprzykładu Witsenhausena.

Wprowadzone w pracy zbiory informacyjne typów R, S, T zorientowane są na różne przypadki szczególne.

Zbiory informacyjne typu R nadają się do problemów, w których model sterowanego obiektu zapisany jest w konwencji zmiennych stanu. Odpowiednikiem warunkowej oceny wektora stanu jest ogólnie rzut ortogonalny środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu. W przypadku szczególnym, jeśli warunkowy zbiór informacyjny spełnia odpowiednie warunki symetrii, kolejność rzutowania i wyznaczania środka ciężkości może być zamieniona. Wystarczy zatem wyznaczyć środek ciężkości niskowymiarowego warunkowego zbioru stanów, będącego rzutem ortogonalnym warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu.

Dodatkowo w świetle wyników przedstawionych w pracy dla przypadku modelu liniowego wystarczy wyznaczać środki ciężkości tzw. swobodnych zbiorów informacyjnych odpowiadających zerowym wartościom sterowań.

Jeżeli warunki symetrii dotyczące zbioru R o których mowa powyżej nie są spełnione, technika przestrzeni stanu nie jest efektywna i stosowane powinny być zbiory informacyjne typu S.

Zaproponowana w pracy parametryzacja zbiorów informacyjne typu S przez zbiory wieloscienne pozwoliła, dla przypadku liniowego modelu, na wyrażenie srodka ciężkosci odpowiednich warunkowych zbiorów informacyjnych przez wierzchołki tych zbiorow a w konsekwencji na jego jawne wyrażenie przez wartosci pomiarow.

Zbiory informacyjne typu T i związane z nimi tzw. zbiory zmiennych zgodnych z pomiarami pozwalają na formułowanie problemów syntezy prawa sterowania w przypadku nieklasycznej struktury informacyjnej, jak również

na nową interpretację istoty tej struktury przez wprowadzenie tzw. ograniczeń informacyjnych stanowiących układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

Przedstawiona w pracy oryginalna metoda syntezy prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej, oparta na przekształceniach i własnościach zbiorów informacyjnych, pozwala na uzyskanie przedstawionych w rozdziale 6 wyników aplikacyjnych pojęciowo równoważnych uzyskanym w teorii sterowania stochastycznie optymalnego [1], [23], [24], [59-61].

Przedstawiona w rozdziale 5 ogólna interpretacja geometryczna wskazuje na możliwości zastosowania opracowanej metody dla syntezy praw sterowania przykładowo dla agregacji mieszanej typu "maksimum-momenty rzędu drugiego".

Przedstawiona metoda jest kompletna, definicje i własności zbiorów informacyjnych łącznie z rozwiązaniami przykładowych problemów zamieszczonymi w rozdziale 6 i ich dowodami tworzą całość. Nie ma potrzeby odwoływania się do pojęć "zewnętrznych". Jednocześnie sama metoda jak i postać uzyskanych wyników jest prosta, co pozwala na ich bezpośrednią implementację numeryczną.

## LITERATURA


[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21 (1975), pp. 875-863.

[2] Barmish B.R., Sankaran J.: The propagation of parametric uncertainty via polytopes, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1979), pp. 346-349.

[3] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Vehicle response to uncertain terrain by a set-theoretical approach. The 1989 ASME Presure Vessels and Piping Conference, Honolulu, Hawaii 1989.

[4] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Dynamics and failure of structures based on the unknown-but-bounded imperfection model. The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, San Francisco, Kalifornia 1989.

[5] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Non-probabilistic models of uncertainty in the nonlinear bucking of shells with general imperfections: Theoretical estimates of the knockdown factor. Journal of Applied Mechanics. Vol.56. (1989), pp.403-410.

[6] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Vehicle response to uncertain terrain by a set-theoretical approach. The 1989 ASME Presure Vessels and Piping

[7] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MIT, Cambridge, 1971.

[8] Bertsekas D.P., Rhodes I.B.: Recursive state estimation for set-membership description of uncertainty, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 117-128.

[9] Bertsekas D.P., Rhodes I.B.: On the minimax reachability of target sets and target tubes. Automatica, vol.7, 1971 pp.233-247.

[10] Bertsekas D.P.: Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp.604 -613.

[11] Bertsekas D.P.: Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 117-123.

[12] Bertsekas D. P.: "Dynamic Programming and Stochastic Control". Academic Press, 1976.

[13] Billingsley P.: "Probability and measure". John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto 1979. Tłum. polskie "Prawdopodobieństwo i miara", PWN, Warszawa 1987.

[14] Borman V., Shensa M.J.: Polytopes a novel approach to tracking. Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control, Athens 1986, pp.1749-1752.

[15] Borman V., Shensa M.J.: A compact algorithm for the intersection and aproximation of N-dimensional polytopes. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris 1988.

[16] Cwikel M., Gutman P.: Convergence of an algorithm to find maximal state constraint sets for discrete-time linear dynamical systems with bounded controls and states, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-31(1986), pp. 457-459.

[17] Clement T., Gentil S.: Reformulation of parameter identification with unknown-but-bounded errors, Mathematics and Computers in Simulation, 30(1988), pp. 257-270.

[18] Egelking R., Sieklucki K.: "Wstęp do topologii". PWN, Warszawa 1986.

[19] Federer H.: "Geometriczeskaja tieoria miery". Nauka, Moskwa 1987 (tłumaczenie z angielskiego).

[20] Federa G, van Straten, Beck M.B.: Uncertainty and arbitraries in ecosystem modelling: a lake modeling example. Ecological Modeling, 13, (1981), pp.87-110.

[21] Fogel E.: System identification via membership set constraints with energy constrained noise. IEEE Trans. Automatic Control, AC-24(1979), pp. 752-758.

[22] Fogel E., Huang Y.F.: On the value of information in system identyfication-bounded noise case, Automatica, 18(1982), pp. 229-238.

[23] Gessing R.: Stochastic optimal control and its connection with estimation, IEE Proc. vol.131, 1984, pp.165-170.

[24] Gessing R.: Zasada minimalizacja i usredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego, Arch. Automatyki i Telemech. t.XXI, z.4 1976, ss. 447-465.

[25] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[26] Goetz A., Huskowski T., Krasnodębski R., Pidek-Łopuszańska H., Rochowski M.:"Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania". WNT, Warszawa 1965.

[27] Ho Y. C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol.68, (1980), pp.644-654.

[28] Ho Y. C., Kastner M.P., Wong E.: Teams signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[29] Ho Y. C., Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp. 15-22.

[30] Ho Y. C., Hexner G.: Redundancy in team problems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp.439-440.

[31] Ho Y. C., Chang T. S.: Another look at the nonclassical information structure problem. IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1980), pp. 537-540.

[32] Kamke E.: "Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung fur eine Gesuchte Function". Leipzig 1959.

[33] Keesman K.J., van Straten G.: Modified set theoretic identyfication of ill-defined water quality systems from poor data. Proc. of IAWPRC Symp. Systems Analysis in Water Quality Management, Pergamon Press, Oxford 1987, pp.297-308.

[34] Kuncewicz W. M.: Opriedielenije garantirowanych ocenok sostojanija i paramietrow diskrietnych dynamiczieskich sistem. Kibiernietika i Wyczislitielnaja Tiechnika, Wyp.75 (1987), ss.1-6.

[35] Kuncewicz W. M., Lyczak M. M.: Elemienty tieorii mnożestw i ustojczi-wost etich processow. Kibiernetika, No.1, 1983, ss.105-112.

[36] Kurzhanskii A.B.: "Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow 1977.

[37] Kurzhanskii A.B.: On the theory of feedback observation. Izv. AN SSSR, No.5, (1973).

[38] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. I, II. Probl. Control & Information Theory, No.6, 1980, No.1, 1981.

[39] Lasserre J.B.: An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in $R^n$. Journal of Optimization Theory and Applications, vol.39, (1983), pp.363-377.

[40] Lin J.N.: Determination of rechable set for a linear discrete system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[41] Manas M., Nedoma J.: Finding all vertices of a convex polyhedron. Numerische Mathematik 12 (1968), pp.226-229.

[42] Milanese M. Belforte G.: Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in the presence of unknown but bounded errors: linear families of models and estimators, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-27(1982), pp. 408-414.

[43] Molusis J.A., Mookerjee P., Bar-Shalom Y.: Dual adaptiv control based upon sensitivity functions. Proc. of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas 1984, pp.828-829.

[44] Mori S.,Chong C.Y.: Numerical solutions to Witsenhausen problem. Proc. of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas 1984, pp.828-829.

[45] Norton J.P.:Problems in identyfying the dynamics of biological systems from very short records. Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control, Athens, 1986, pp.286-290.

[46] Norton J.P.:Identification and application of bounded-parameter models. Automatica, vol 23, 1987, pp.497-507.

[47] Ovseevich A.I., Trushchenkov V.L.,Chernousko F. L.: Equations of continuous guaranteed state estimation for dynamical systems. Izvestija of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics, No.4, (1984), pp.94-101.

[48] Piet-Lahanier, Walter E.: Practical implementation of an exact and recursive algorithm for characterizing likelihood sets. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris 1988.

[49] Pronzato L., Walter E.: Experiment design for membership set estimation: linear models with homogeneus and heterogeneus measurement errors. Proc. of the First International Conference-Workshop on Optimal Design and Analysis of Experiments, Neuchatel, Switzerland, July 25-28, 1988.

[50] Pronzato L., Walter E.: Some results on experiment design for bounded-error models. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris 1988.

[51] Sandell N.R., Jr., Athans M.: Solution of some nonclassical LQG stochastic decision problems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19 (1974), pp. 108-116.

[52] Schweppe F.C.:Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13(1968), pp. 408-414.

[53] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[54] Sikorski R.:"Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych". PWN, Warszawa 1969.

[55] Stratonovich R.L.:On the theory of optimal control: Sufficient coordinates. Automat. Remonte Control (USSR), vol.23, January 1963.

[56] Striebel C.T.: Sufficient statistics in the optimal control of stochastic systems. J. Math. Anal. Appl., vol.12, 1965 pp.576-592.

[57] Tempo R.: Robust estimation and filtering in the presence of bounded noise. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13(1968), pp. 556-558.

[58] Tse E., Bar-Shalom Y., Meier L.: Wide-sense adaptiv dual control for nonlinear stochastic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 98-108.

[59] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control, IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp. 817-819.

[60] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence -, Trans. SCiE, 12(1976), pp. 89-95.

[61] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp.1-16.

[62] Witsenhausen H.S.: A minimax control problem for sampled linear system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13 (1968), pp. 5-21.

[63] Witsenhausen H.S.: Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13 (1968), pp. 556-558.

[64] Witsenhausen H.S.: Counterexample in stochastic optimal control. SIAM J. Control, Vol.6., 1968, pp. 131-147.

[65] Witsenhausen H.S.: A remark on reachable sets of linear systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[66] Wojciechowski K.W.: Identyfikacja bieżąca liniowego dyskretnego układu dynamicznego na podstawie zadanego horyzontu obserwacji wejścia i wyjścia. Główny Ins. Górn., Symp. Ustroń 16-19.XI 1974 ss. 212-216.

[67] Wojciechowski K.W.: Wyznaczanie stanu obiektu dynamicznego na podstawie zadanego horyzontu obserwacji. Główny Ins. Górn., Symp. Ustroń 16-19.XI 1974, ss. 216-218.

[68] Wojciechowski K.W.: Wyznaczanie stanu liniowego obiektu dynamicznego na podstawie zadanego horyzontu obserwacji. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.35, Gliwice 1976, ss. 48-63.

[69] Wojciechowski K.W.: Wyznaczanie stanu liniowego dyskretnego układu dynamicznego na podstawie zadanego horyzontu obserwacji wejścia i wyjścia układu. Arch. Aut. i Tel. T.XX. Z.2 1975, ss. 157-166.

[70] Wojciechowski K.W.: Wyznaczanie stanu na podstawie obserwacji z zadanego horyzontu. Prac. VII Kraj. Konf. Automatyki. Rzeszów 15-17.IX. 1977, ss.127-133.

[71] Wojciechowski K.W.: Analiza sytuacji metanowej w rejonie ściany wydobywczej. Arch. Górn., Tom 23, 1978, ss.421-432.

[72] Wojciechowski K.W.: Analiza sytuacji metanowej w rejonie ściany F-7. Arch. Górn., Tom 23, 1978, ss.433-447.

[73] Wojciechowski K.W.: Metoda analizy złożonych sytuacji technologicznych. Pol. Tow. Cybernetyczne, WSM, Sopot 24-26.IX.1979, ss.317-327.

[74] Wojciechowski K.W.: Optimistic and pessimistic control of a plant whose estimations of eigenvalue are known. Proc. of Int. Symp., Pol. Łodzka, Zakopane 8-13.X.1979, pp.358-363.

[75] Wojciechowski K.W.: Koncepcja adaptacyjnego modelu rozmytego opisującego sytuację metanową w K.W.K.. Mat. Konf., Inst. Górn., Szklarska Poręba 25-27.X.1979, ss.76-80.

[76] Wojciechowski K.W.: Metoda opisu sytuacji metanowej w rejonie ściany wydobywczej kopalni węgla kamiennego. Proc. of Int. Conf. Katowice, Min. Górn., 12-17.V. 1980, ss.171-178.

[77] Wojciechowski K.W.: Optymalne sterowanie docelowe ciągiem operacji opisanych przez dynamiczny model rozmyty. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.54, Gliwice 1980, ss.172-181.

[78] Wojciechowski K.W.: Optimal tracking problem for a fuzzy model. Proc. S A S, Berlin 1-8.X.1980, pp.163-164.

[79] Wojciechowski K.W., Bacia K.: Problem optymalnego nadążania w przypadku dynamicznego modelu rozmytego. Prac. VIII Kraj. Konf. Automatyki. Szczecin 1981.

[80] Wojciechowski K.W.: Modele ze zmiennymi niepewnymi. Pol. Tow. Mech. Teoret. i Stos. Symp. Wisła, 7-14.II.1983, ss.479-487.

[81] Wojciechowski K.W.: Sterowanie w strukturze ze sprzężeniem, otwartej w horyzoncie delta, wyznaczane przy różnych modelach niepewności. Konf. Cybernetyka w Gosp. Morskiej, Pol. Tow. Cybernetyczne, Sopot 1983, ss.49-57.

[82] Wojciechowski K.W., Cieślak Z.: Wyznaczanie algorytmu sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem w przypadku systemu wodno- gospodarczego. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.68 Gliwice 1983, ss 123-138.

[83] Wojciechowski K.W., Duda Z.: Decentralized resource allocation in large scale system under uncertainty conditions. System Science Vol.9 1883, pp.31-37.

[84] Wojciechowski K.W.: Sterowanie zadawalające w warunkach niepewności ograniczonej. XIII Ogólnopolska Konf. Zast. Matematyki. Sielpia 1984, ss.88-90.

[85] Wojciechowski K.W.: Równoważność praw sterowania optymalnego w strukturach CL i OLF dla procesów dyskretnych przy niepewności ograniczonej. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.74, Gliwice 1984, ss.275-286.

[86] Wojciechowski K.W., Duda Z.: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.76 Gliwice 1984, ss.149-158.

[87] Wojciechowski K.W.: Sterowanie optymalne w warunkach niepewności stanu jako problem optymalizacji wielokryterialnej. Symp. Model. w Mech., Pol. Tow. Mech. Teoret. i Stos., Beskid Śląski 1984, 609-618.

[88] Wojciechowski K.W.: Metoda symulacji układów dynamicznych w warunkach niepewności ograniczonej. SPD-2, Pol. Tow. El. Tech. i Stos. Zakopane, 1985, ss.187-193.

[89] Wojciechowski K.W.: Control and decision making under set-membership model of uncertainty. Analysis and synthesis. Raport, LH Wageningen, 1986.

[90] Wojciechowski K.W.: Sterowanie optymalne przy zbiorowym modelu niepewności i agregacji z funkcjami wagi. ZN Polit. Śl. s. Automatyka z.81 Gliwice 1987, ss.195-208.

[91] Wojciechowski K.W.: Sterowanie optymalne w problemie LQS. ZN Polit. Śl. s. Automatyka Z 81 Gliwice 1987, ss.209-219.

[92] Wojciechowski K.W.: Recursive measurement data filtration with uncertainty described by convex polyhedra, Syst. Anal. Model. Simul. 4(1987), pp. 557-560.

[93] Wojciechowski K.W.: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności. Mat. Konf. RP.I.02, Kazimierz Dolny 1988.

[94] Wojciechowski K.W.: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek centrowanego zbioru T, złożone do publikacji w ZN Polit. Śl. s. Automatyka.

[95] Wojciechowski K.W.: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru T. Przyjęte do publik. w Arch. Automat. i Telemechaniki.

[96] Wojciechowski K.W.: Elipsoidalne zbiory informacyjne. Przyjęte do publik w Arch. Automat. i Telemechaniki.

[97] Yoshikawa T.: Decomposition of dynamic team decision problems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 627-632.

# SYNTEZA PRAW STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ


## STRESZCZENIE

Praca zawiera jednolite podejście do syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej z wykorzystaniem zbiorów informacyjnych. Przedstawiono wybrane pojęcia wstępne występujące w sformułowaniu problemu syntezy praw sterowania. Ze względu na objętość pracy ograniczono się do problemu renumeracji pozwalającej na jednolite traktowanie tzw. modeli 1D i MD, problemu modeli bezpośrednich oraz problemów wzajemnie równoważnych praw sterowania, a w szczególności warunków równoważności dla bezpośredniego prawa sterowania. Kolejno przedstawiono definicje i własności tzw. zbiorów informacyjnych wykorzystywanych w syntezie praw sterowania. W zakresie zbioru **T** przedstawiono zbiory zmiennych zgodnych z pomiarem oraz rodziny tych zbiorów określone przez formy różniczkowe Pfaffa lub równoważne układy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Szczególną uwagę zwrócono na określenie warunków niezależności wspomianych form różniczkowych od praw sterowania lub ich gradientów.

Wykorzystując różniczkową postać zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami określono tzw. różniczkowe ograniczenia informacyjne będące warunkami równoważności klasycznych i bezpośrednich praw sterowania. Podano definicje zbiorów informacyjnych typu $S_k$ $R_k$ $k\in H$ oraz podstawowe własności. Jedną z nich jest słuszna w przypadku modelu liniowego inwariantność miary Lebesgue'a wymienionych zbiorów względem praw sterowania.

Dla zbiorów typu **S** zastosowano parametryzację odpowiadającą zbiorom wielościennym. Jeżeli zbiór **T**, charakteryzujący łącznie warunek początkowy

$x_1$ zakłocenia $w_1,\ldots,w_N$ w równaniu stanu, błędy pomiarowe $v_1,\ldots,v_N$ w równaniu wyjścia jest wielościenny (naprzykład kostka), to również wielościenne są zbiory informacyjne oraz warunkowe zbiory informacyjne. Środek ciężkości wielościennego warunkowego zbioru informacyjnego można przedstawić w postaci analitycznej funkcji jego wierzchołków, a w konsekwencji w funkcji wartości pomiarów. W pracy wykorzystano w tym celu podział symplicjalny zbioru wielościennego (kompleksu komórkowego). Zamieszczono obszerne przykłady ilustrujące wyznaczanie środka ciężkości zbiorów wielościennych i jego zależność od pomiarów.

Dla zbiorów typu R zastosowano parametryzację odpowiadającą zbiorom elipsoidalnym. Jeżeli zbiór T, charakteryzujący łącznie warunek początkowy $x_1$ zakłocenia $w_1,\ldots,w_N$ w równaniu stanu, błędy pomiarowe $v_1,\ldots,v_N$ w równaniu wyjścia jest elipsoidalny, to również elipsoidalne są: zbiory informacyjne, warunkowe zbiory informacyjne oraz ich rzuty ortogonalne na podprzestrzeń zmiennych stanu. W pracy zbiory elipsoidalne parametryzowane są przez środek ciężkości i dodatnio określoną macierz odpowiedniej formy kwadratowej. Dla zbiorów informacyjnych i warunkowych zbiorów informacyjnych przedstawiono zależność ich parametrów od parametrów zbioru T, modelu obiektu oraz ciągu zrealizowanych obserwacji. Elipsoidalne warunkowe zbiory informacyjne posiadają własność symetrii pozwalającą na operowanie ich rzutami ortogonalnymi na podprzestrzeń zmiennych stanu. Rzuty te są warunkowymi zbiorami stanów. Zakładając dodatkowo szczególną, blokowo diagonalną postać macierzy określającej zbiór T uzyskano zależności rekurencyjne pomiędzy parametrami warunkowych zbiorów stanów. Otrzymane zależności posiadają strukturę analogiczną do równań filtru Kalmana. Przedstawiono ogólną geometryczną interpretację problemu syntezy praw sterowania.

Podstawą wyboru optymalnego prawa sterowania jest porządek w rodzinie

obrazów zbioru $\mathbb{T}$, danego jako informacja a priori przez zależne od praw sterowania odwzorowanie podstawowe.

W pracy zamieszczono zbiór przykładowych problemów syntezy praw sterowania, których rozwiązania analityczne znaleziono wykorzystując metodę zbiorów informacyjnych. W przypadku zbiorów typu $\mathbb{R}$ polega ona na przekształceniu dla każdego $k\in H$ zbioru $\mathbb{T}$ danego w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ w zbiór $\mathbb{R}_k$, dany dla $k\in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_k, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. Dzięki temu zadanie minimalizacji względem funkcji $u_k(z^k)$, $k\in H$ może być sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości $z^k$, $k\in H$. Ustalonej wartości $z^k$ odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $\mathbb{R}_k|z^k$. Niezależność "kształtu" tego zbioru od sterowań $u^{k-1}$ jest podstawową własnością umożliwiającą otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego. Podobne postępowanie stosuje się wykorzystując zbiory informacyjne typu $\mathbb{S}$. Różnica polega na tym, że zbiór $\mathbb{T}$ dany w przestrzeni zmiennych $(x_1, w^N, v^N)$ przekształca się w zbiór $\mathbb{S}_k$, dany dla $k\in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_1, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. Nie wprowadza się zatem zmiennej $x_k$ reprezentującej aktualny stan układu, bowiem ze względu na brak wymaganej symetrii zbiór $\mathbb{X}_k$ nie stanowi informacji wystarczającej dla sterowania. Dalszy przebieg syntezy jest analogiczny jak dla zbiorów typu $\mathbb{R}$.

Wykorzystując zbiory informacyje typu $\mathbb{T}$ i związane z nimi ograniczenia informacyjne sformułowano zadanie syntezy praw sterowania dla dowolnej struktury informacyjnej oraz pokazano przyczynę powodującą, że w przypadku klasycznej struktury informacyjnej problem syntezy praw sterowania przy wykorzystaniu modelu bezpośredniego dekomponuje się na odpowiednią liczbę wzajemnie niezależnych problemów statycznych. Dla odpowiednika kontrprzykładu Witsenhausena, sformułowanego przy ograniczonym modelu niepewności, pokazano, dlaczego pomimo liniowych równań stanu i kwadratowego wskaźnika jakości nieliniowe prawa sterowania mogą być lepsze od liniowych.

# СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ


## Р е з ю м е

Работа содержит однородный подход к синтезу законов управления в условиях ограниченной неопределенности с использованием информационных множеств. Представлены избранные вводные понятия выступающие в формулировке проблемы синтеза законов управления. Из-за ограниченного объема работы ее проблематика сведена к проблеме ренумерации допускающей однородную трактовку т.н. моделей 1D и MD, проблемы непосредственных моделей и проблем равноценных законов управления, а в частности условий равноценности дла непосредственного закона управления. Поочередно представлены определения и свойства т.н. информационных множеств, используемых для синтеза законов управления. Для множества U представлены множества переменных соответствующих измерению и семьи этих множеств определенные с помощью дифференциальных форм Фаффа или равноценных систем дифференциальных уравнений с частными производными первой степени. Особое внимание обращено на определение условий независимости упомянутых дифференциальных форм от законов управления или их градиентов.

Используя дифференциальный вид множеств переменных соответствующих измерениям определены т.н. дифференциальные информационные ограничения являющейся условиями равноценности классических и непосредственных законов управления. Даны опре-

деления информационных множеств типа $\mathbb{S}_k$ $\mathbb{R}_k$ $k\in\mathbb{H}$ и их основные свойства. Одно из свойств, верно для линейной модели, это инвариантность меры Лебега названых множеств относительно законов управления.

Для множеств типа $\mathbb{S}$ применена параметризация соответствующая многогранным множествам. Если множество $\mathbb{T}$, характеризирующие совместно начальное условие $x_1$ помехи $w_1,\ldots,w_N$ в уравнении состояния, измерительные ошибки $v_1,\ldots,v_N$ в уравнении выхода является многогранным множеством (например кубик), тогда как информационные множества, так и условные информационные множества являются многогранными. Центр тяжести многогранного условного информационного множества можно представить в виде аналитической функции его вершин, а в результате в функции значений измерений. В работе использована для этой цели симплексная декомпозиция многогранного множества (клеточного комплекса). В работе помещены обширные примеры поясняющие определение центра тяжести многогранных множеств и его зависимость от измерений.

Для множеств типа $\mathbb{R}$ применена параметризация соответствующая эллипсоидальным множествам. Если множество $\mathbb{T}$, характеризирующие совместно начальное условие $x_1$ помехи $w_1,\ldots,w_N$ в уравнении состояния, измерительные ошибки $v_1,\ldots,v_N$ в уравнении выхода является эллипсоидальным множеством, тогда эллипсоидальными множествами являются также: информационные множества, условные информационные множества и их ортогональные проекции на подпространство переменных состояния. В работе используется параметризация эллипсоидальных множеств с помощью центра тяжести и положительно определенной матрицы соответствующей квадратной формы. Для информационных множеств и усло-

вных информационных множеств представлена зависимость их параметров от параметров множества $\mathbb{T}$, модели объекта и последовательности выполненых наблюдений. Эллипсоидальные условные информационные множества обладают свойством симметрии позволяющим действовать их ортогональным проекциям на подпространство переменных состояния. Эти проекции являются условными множествами состояний. Принимая дополнительно особый блок-диагональный вид матрицы определяющей множество $\mathbb{T}$ получены реккурентные зависимости между параметрами условных множеств состояний. Полученные зависимости обладают структурой похожой на уравнения фильтра Кальмана. Представлена общая геометрическая интерпретация проблемы синтеза законов управления.

Основой выбора оптимального закона управления является порядок в семьи образов множества $\mathbb{T}$, данного как априорная информация происходящая от зависимого от законов управления, основного отображения.

В работе помещено множество примерных проблем синтеза законов управления, которых аналитические решения найдены с использованием метода информационных множеств. В случае множеств типа $\mathbb{R}$ метод состоит в преобразовании для каждого $k\in H$ множества $\mathbb{T}$ данного в пространстве переменных $(x_1, w^N, v^N)$ в множество $\mathbb{R}_k$, данное для $k\in H$ соответственно в пространстве переменных $(x_k, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. Благодаря этому задача минимизации относительно функции $u_k(z^k)$, $k\in H$ может быть сведена к задаче минимизации относительно значений этих функции, при установленном значении $z^k$, $k\in H$. Установленому значению $z^k$ соответствует условное информационное множество $\mathbb{R}_k|z^k$. Независимость "формы" этого множества от управлений $u^{k-1}$ является основным свойством позволяющим получить законы управления в виде линейной функции

центра тяжести условного информационного множества. Похожий подход применяется используя информационные множества типа $\mathbb{S}$. Различие состоит в том, что множество $\mathbb{I}$ данное в пространстве переменных $(x_1, w^N, v^N)$ превращается в множество $\mathbb{S}_k$ данное для $k \in \mathbb{N}$ соответственно в пространствах переменных $(x_1, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. Таким образом не вводится переменной $x_k$, представляющей акуальное состояние системы. Из-за недостатрка требуемой симметрии множество $\mathbb{X}_k$ не представляет информации достаточной для управления. Последующий ход синтеза похожий на синтез для множеств типа $\mathbb{R}$.

Используя информационные множества типа $\mathbb{I}$ и связяные с ними информационные ограничения сформулирована задача синтеза законов управления для произвольной информационной структуры и представлена причина того, что в случае классической информационной структуры проблема синтеза законов управления с использованием непосредственной модели разделяется на соответствующие количество взаимонезависимых статических проблем. Для аналога контрпримера Виценгаузена сформулированного при ограниченной модели неопределенности показано, почему несмотря на линейные уравнения состояния и квадратный показатель качества, нелинейные законы управления могут быть лучше линейных.

# CONTROL STRATEGIES DESIGN IN THE PRESENCE OF BOUNDED UNCERTAINTY


## SUMMARY

A unified approach to control strategies design in the presence of bounded uncertainty based on the concept of information sets is proposed. Chosen introductorily notions used in the statement of the design problem are presented. The limited contents of the work imply the application of renumeration procedure which enables a unified treatment of 1D and MD models, the problem of direct models and the problem of mutually equivalent control strategies and particularly equivalence conditions for the directcontrol law. Then definitions and properties of the so called information sets used in the design procedure are presented. As concerns T set the sets of variables consistent with measurements are presented and the families of such sets defined by Pfaffian differential forms or equivalent partial differential first order equations are discussed. Attention is paid to the invariance conditions for such forms in relation to the control strategies or their gradients.

A differential form of the set of variables consistent with measurements is used to define the so called differential information constraints which provide equivalence conditions for classical and direct control laws. Definitions of information sets $S_k$ and $R_k$ $k \in H$ and their properties are given. The Lebesgue measure of these sets has been found to be invariant with respect to the control laws in the case of the linear model.

For $\mathbb{S}$ sets parameterization is used related to the polyhedra sets. If the $\mathbb{T}$ set featuring jointly initial condition $x_1$, disturbances $w_1,\ldots,w_N$ in state equations and noises $v_1,\ldots,v_N$ in the output equations is a polyhedron e.g. a cube then for linear models the information sets as well as conditional information sets are polyhedra too. A gravity center of the polyhedral conditional information set may be found as an analytic function of its vertices and in consequence as a function of the measurements. The simplistic cutting of the polyhedron (cell complex) has been used. Many examples illustrating the searching procedure for the center of gravity of the polyhedra and its relationship with measurements are presented.

For $\mathbb{R}$ sets parameterization relevant to ellipsoidal sets has been used. If $\mathbb{T}$ set featuring jointly initial condition $x_1$, disturbances $w_1,\ldots,w_N$ and noises $v_1,\ldots,v_N$ is ellipsoidal then for linear models, information sets, conditional information sets and their projections onto the state space are ellipsoidal too. The ellipsoidal sets have been parameterized by the gravity center and positive definite matrix of the respective quadratic form. For the information sets and the conditional information sets their parameters are expressed by the parameters of the set $\mathbb{T}$ ,the model of the system and the sequence of observations. The ellipsoidal conditional information sets have symmetric property which enables to operate by their orthogonal projections onto the state space. The projections are conditional sets of states. Assuming a particular block diagonal form of the matrix defining set $\mathbb{T}$, recurrent relationships between parameters of the conditional state sets have been found. They resemble Kalman filter equation in the structure. General geometric interpretation of the problem of control strategies design is presented.

The basis for choice of the control strategy is an order in the family of images of the set $\mathbb{T}$ which is given as *a priori* information by the basic mapping dependent on the control strategies.

A set of exemplary problems of the control law synthesis is presented for which analytical solution can be found using the information sets technique. For $\mathbb{R}$ sets it is based on the mapping of the set $\mathbb{T}$ given for every $k\in\mathbb{H}$ in the space $(x_1, w^N, v^N)$ in the set $R_k$, given for $k\in\mathbb{H}$ respectively in the space of variables $(x_k, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. This enables substitution of the minimization problem with respect to function $u_k(z^k)$ by the minimization with respect to the values of these functions for given value $z^k$. For the given value $z^k$ the conditional information set is $R_k|z^k$. Independence of the shape of this set ofthe control actions $u_{k-1}$ is a principal property enabling the receipt of the control law as a linear function of the gravity center of the conditional information set. Similar approach may be applied for information sets S. The main difference is that the set $\mathbb{T}$ given in the space of variables $(x_1, w_N, v_N)$ converts into the set $S_k$ given for every $k\in\mathbb{H}$ respectively in the spaces of variables $(x_k, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. The state variable $x_k$ is not introduced because the lack of symmetry of set $X_k$ implies that it does not constitute a sufficient information for control. The following steps of the design procedure are similar to the ones for sets $\mathbb{R}$.

Sets $\mathbb{T}$ and related information constraints have been used to formulate a control design problem for an arbitrary information structure . Moreover the reason for the possibility of the decomposition of the design problem while using the direct model onto a number of mutually independent static problems in the case of the classical information structure has been found. For an analog of the Witsenhausen counter example in the case of bounded uncertainty it is shown why in spite of the linear state equations and the quadratic performance index nonlinear control strategies may be better then linear ones.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P.3342/91/104