

Magdalena ATAMAN*
Politechnika Warszawska

ANALIZA DYNAMICZNA BELKI POD INERCYJNYM OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

Streszczenie. Przedmiotem pracy jest analiza dynamiczna belki swobodnie podpartej obciążonej ruchomym punktem materialnym, poruszającym się ze stałą prędkością. Belka modelowana jest jednym stopniem swobody. W zadaniu uwzględniono wpływ tłumienia.

DYNAMIC ANALYSIS OF BEAM UNDER INERTIAL MOVING LOAD

Summary. The paper deals with dynamic analysis of simply supported beam under inertial load. The concentrated mass is moving with constant velocity along one-degree-of-freedom beam. Viscoelastic damping of beam is taken into account in the analysis. Forced and free vibrations are considered. Numerical examples are presented in the paper.

1. Wstęp

Analizując zagadnienie belki swobodnie podpartej obciążonej ruchomym punktem materialnym, poruszającym się ze stałą prędkością wyprowadzono metodą analityczną równanie ruchu drgającego belki. Do rozwiązania tego liniowego równania różniczkowego o zmiennych współczynnikach zastosowano program Mathematica. Za pomocą tego samego oprogramowania wykonano również przykłady obliczeniowe, w wyniku których uzyskano ugięcia dynamiczne belki przy różnych wartościach prędkości i różnych proporcjach wartości masy obciążenia inercyjnego do masy konstrukcji. Ponadto przeprowadzono analizę drgań swobodnych rozważanej konstrukcji.

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Wacław Szcześniak.

2. Drgania belki modelowanej jednym stopniem swobody wymuszone ruchomym, skupionym obciążeniem inercyjnym

Rozpatrujemy belkę swobodnie podpartą (rys. 1), o długości l i sztywności na zginanie EJ , obciążoną ruchomym punktem materialnym o masie M , poruszającym się ze stałą prędkością v . Masa belki M_b jest skupiona w środku jej rozpiętości. Analizujemy, zatem układ o jednym stopniu swobody z niewiadomym ugięciem środka belki $w\left(\frac{l}{2}, t\right)$, wywołanym ruchomym obciążeniem skupionym. Zakładamy, że w układzie występuje tłumienie wi-skotyczne według modelu reologicznego Kelvina–Voigta.

Zgodnie z rysunkiem 1 poszukiwane ugięcie dynamiczne belki w środku rozpiętości wyrazimy znanym wzorem korzystając z zasady superpozycji:

$$w\left(\frac{l}{2}, t\right) = -\delta_{11}(B_b + R) + (P - B)\delta_{10}, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$B_b = M_b \frac{d^2 w}{dt^2} - \text{siła bezwładności belki,}$$

$$P = Mg - \text{ciężar ruchomej masy,}$$

$$B = M \left. \frac{d^2 w}{dt^2} \right|_{x=vt} - \text{siła bezwładności d'Alemberta ruchomej masy } M,$$

$$R = c \frac{dw}{dt} - \text{siła tłumienia.}$$

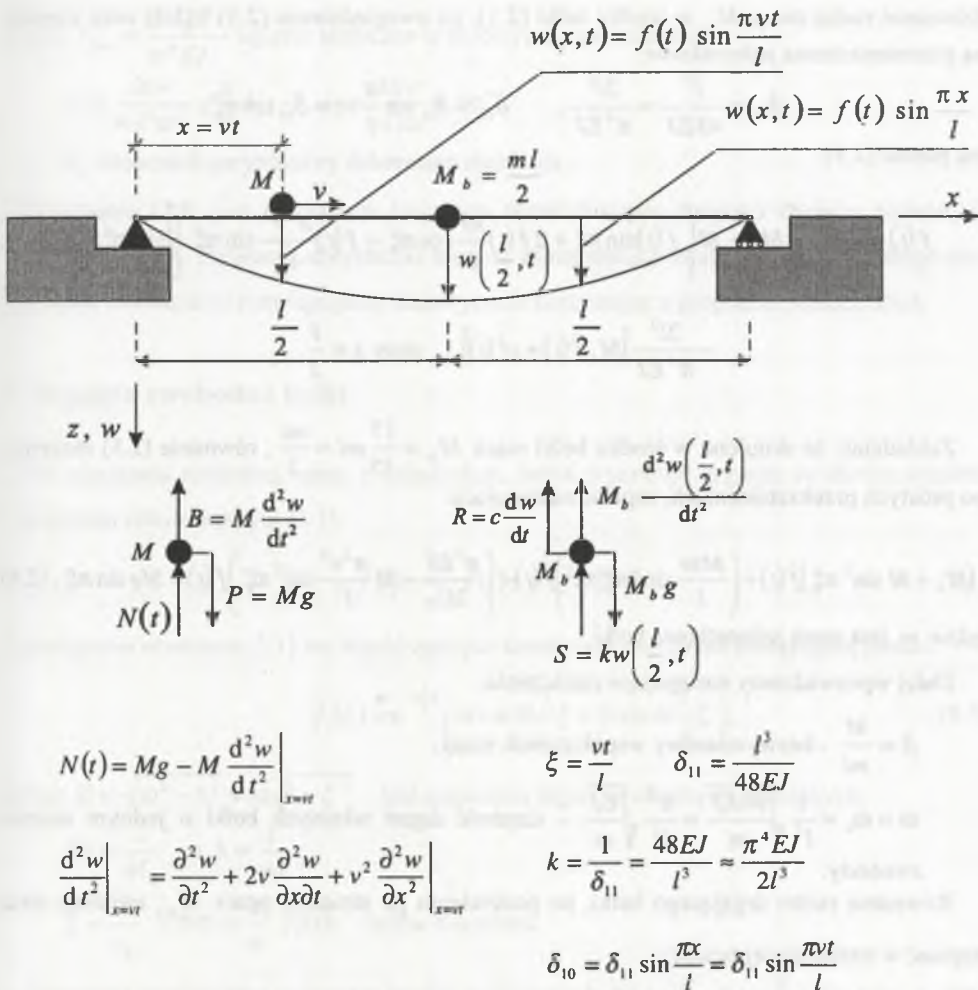
Dalej w pracy przyjmujemy model belki Renaudota, w wyniku czego druga pochodna $\left. \frac{d^2 w}{dt^2} \right|_{x=vt}$ jest pochodną materialną opisaną wzorem:

$$v = \text{const,}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=vt},$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=vt}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=vt}.$$



Rys. 1. Schemat belki o jednym stopniu swobody pod ruchomym obciążeniem inercyjnym
 Fig. 1. One-degree-of-freedom beam under inertial moving load

Zakładając rozwiązanie zadania w postaci funkcji

$$w(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{2.3}$$

siłę bezwładności ruchomego obciążenia B , zgodnie z wzorami Renaudota (2.1) i (2.2), możemy zapisać w następującej formie

$$B = M \left[\ddot{f} \sin \pi \xi + 2 \dot{f} \frac{\pi v}{l} \cos \pi \xi - f \left(\frac{\pi v}{l} \right)^2 \sin \pi \xi \right], \tag{2.4}$$

gdzie $\xi = \frac{vt}{l}$.

Równanie ruchu masy M_b w środku belki (2.1), po uwzględnieniu (2.3) i (2.4) oraz wzorów na przemieszczenia jednostkowe:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ} = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ}, \quad \delta_{10} = \delta_{11} \sin \frac{\pi}{l} vt = \delta_{11} \sin \pi \xi,$$

ma postać (2.5)

$$f(t) = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \left[Mg - M \left(\ddot{f}(t) \sin \pi \xi + 2\dot{f}(t) \frac{\pi v}{l} \cos \pi \xi - f(t) \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \sin \pi \xi \right) \right] \sin \pi \xi +$$

$$- \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} [M_b \ddot{f}(t) + c\dot{f}(t)], \quad \text{przy } x = \frac{l}{2}. \quad (2.5)$$

Zakładając, że skupiona w środku belki masa $M_b = \frac{17}{35} ml \approx \frac{ml}{2}$, równanie (2.5) możemy, po prostych przekształceniach, zapisać następująco:

$$(M_b + M \sin^2 \pi \xi) \ddot{f}(t) + \left(\frac{M\pi v}{l} \sin 2\pi \xi + c \right) \dot{f}(t) + \left(\frac{\pi^4 EJ}{2l^3} - M \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \sin^2 \pi \xi \right) f(t) = Mg \sin \pi \xi, \quad (2.6)$$

gdzie m jest masą jednostkową belki.

Dalej wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\beta = \frac{M}{ml} - \text{bezwymiarowy współczynnik masy,}$$

$$\omega = \omega_b = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{96EJ}{m}} \approx \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} - \text{częstość drgań własnych belki o jednym stopniu swobody.}$$

Równanie ruchu drgającego belki, po podzieleniu go stronami przez M_b , możemy teraz zapisać w następującej postaci:

$$(1 + 2\beta \sin^2 \pi \xi) \ddot{f}(t) + \left(\frac{2\pi v}{l} \beta \sin 2\pi \xi + \frac{2c}{ml} \right) \dot{f}(t) + \left(\omega^2 - \frac{2\pi^2 v^2}{l^2} \beta \sin^2 \pi \xi \right) f(t) = 2\beta g \sin \pi \xi. \quad (2.7)$$

Wymiarem funkcji $f(t)$ jest [m], funkcji $\dot{f}(t)$ [m/s], a funkcji $\ddot{f}(t)$ [m/s²].

Po wprowadzeniu bezwymiarowej funkcji $f_1(\xi) = \frac{f(t)}{f_{stat}}$, ($w_{stat} = f_{stat} \sin \frac{\pi}{2}$) oraz współczynnika $\kappa^2 = \frac{v^2}{l^2 \omega^2}$, równanie ruchu (2.7) zapisujemy w postaci bezwymiarowej w następujący sposób:

$$\kappa^2 (1 + 2\beta \sin^2 \pi \xi) \frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + (2\pi \kappa^2 \beta \sin 2\pi \xi + \Delta) \frac{d f_1(\xi)}{d\xi} + (1 - 2\pi^2 \beta \kappa^2 \sin^2 \pi \xi) f_1(\xi) = \sin \pi \xi, \quad (2.8)$$

gdzie, $f_{stat} = \frac{2Mgl^3}{\pi^4 EJ}$ - ugięcie statyczne w środku rozpiętości belki,

$$\Delta = \frac{2cv}{ml^3 \omega^2} = \frac{\kappa}{\pi} \delta_1 \rightarrow \delta_1 = \frac{2\pi c}{m l \omega} = 2\pi \zeta,$$

δ_1 oznacza logarytmiczny dekrement tłumienia.

Równanie (2.8) jest równaniem liniowym różniczkowym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Ponieważ dotychczas nie jest znana metoda analityczna jego ścisłego rozwiązania, równanie to rozwiązujemy numerycznie korzystając z programu Mathematica.

3. Drgania swobodne belki

Po zjechaniu ruchomej masy z konstrukcji, belka wykonuje drgania swobodne opisane równaniem różniczkowym (3.1)

$$\ddot{\tilde{f}}(t) + \frac{2c}{ml} \dot{\tilde{f}}(t) + \omega^2 \tilde{f}(t) = 0. \tag{3.1}$$

Rozwiązanie równania (3.1) we współrzędnych bezwymiarowych ma następującą postać:

$$\tilde{f}_1(\xi) = e^{-h \frac{l}{v} \xi} \left(A \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \xi + B \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} \xi \right), \tag{3.2}$$

gdzie: $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ - jest częstością drgań swobodnych tłumionych,

$$2h = \frac{c}{M_b} \rightarrow h = \frac{c}{ml},$$

$$\zeta = \frac{c}{c_v} \cdot 100\% = \frac{h}{\omega} \cdot 100\% \text{ - liczba tłumienia.}$$

Ponieważ analizujemy ugięcie w środku rozpiętości belki ($w_1 = f_1 \sin \frac{\pi}{2}$), funkcje f_1 oraz \tilde{f}_1 są sobie równe, jeśli $\xi = 1$. Zatem warunki początkowe, które musi spełniać funkcja ugięcia \tilde{f}_1 w chwili zjazdu masy z konstrukcji ($\xi = 1$), zapisujemy w postaci:

$$\tilde{f}_1 \Big|_{\xi=1} = f_1 \Big|_{\xi=1} \quad \text{oraz} \quad \dot{\tilde{f}}_1 \Big|_{\xi=1} = \dot{f}_1 \Big|_{\xi=1}. \tag{3.3}$$

Korzystając z warunków (3.3) oraz z równań (2.8) i (3.2) wyznaczamy stałe całkowania A i B . Ponieważ równania ruchu (2.8) nie można rozwiązać analitycznie, układ równań (3.3) rozwiązujemy numerycznie posługując się programem Mathematica.

4. Przykład obliczeniowy

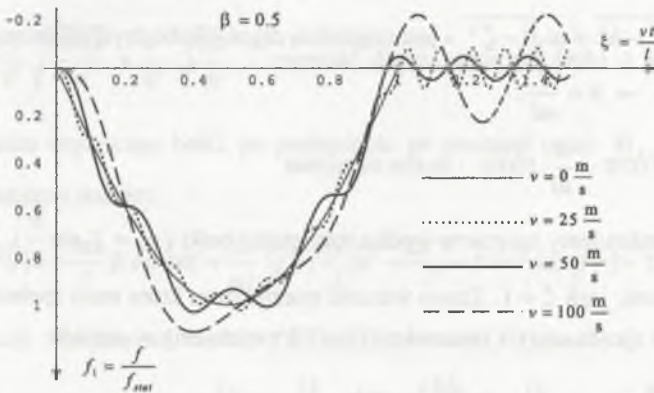
Przykład obliczeniowy belki swobodnie podpartej modelowanej jednym stopniem swobody obciążonej skupioną, ruchomą masą wykonano za pomocą programu Mathematica. W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe:

- długość belki - $l = 6 \text{ m}$,
- masa jednego metra belki - $m = 141 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$,
- moduł Younga - $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$,
- moment bezwładności przekroju belki $J = 6874 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$,
- prędkość ruchomej masy $v = \text{const}$.

Wyniki uzyskano przy różnych wartościach prędkości v , współczynnika β i współczynnika tłumienia ζ . Wielkość ruchomej masy M przyjęto zgodnie z wzorem

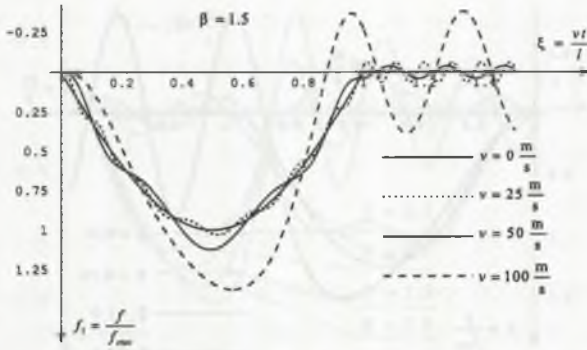
$\beta = \frac{M}{ml}$. Rezultaty przedstawiono w formie wykresów ugięć środka belki, zarówno

w przypadku drgań wymuszonych, jak i drgań swobodnych po zjeździe ruchomej masy z belki.



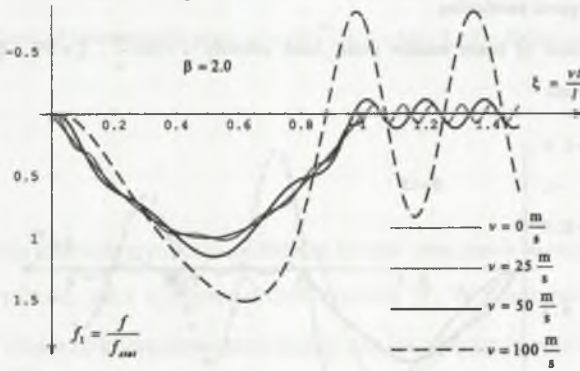
Rys. 2. Ugięcie dynamiczne środka belki przy $\beta = 0.5$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 2. Dynamic deflection of beam middle point $\beta = 0.5$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - forced vibrations, $\xi > 1$ - free vibrations



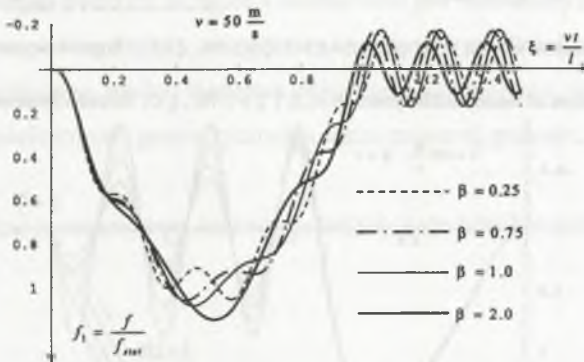
Rys. 3. Ugięcie dynamiczne środka belki przy $\beta = 1.5$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 3. Dynamic deflection of beam middle point $\beta = 1.5$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ forced vibrations, $\xi > 1$ - free vibrations



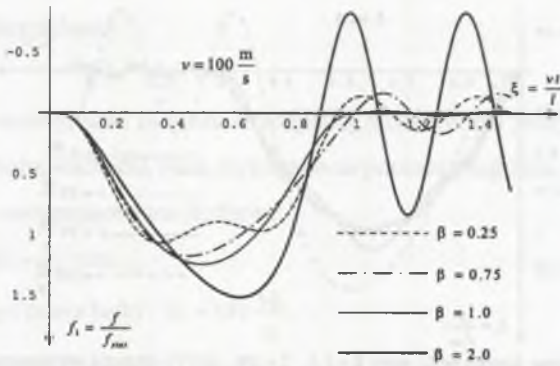
Rys. 4. Ugięcie dynamiczne środka belki przy $\beta = 2.0$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 4. Dynamic deflection of beam middle point $\beta = 2.0$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - forced vibrations, $\xi > 1$ - free vibrations



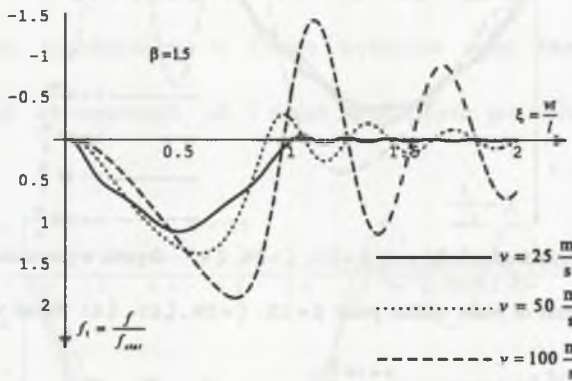
Rys. 5. Ugięcie dynamiczne środka belki przy prędkości obciążenia $v = 50 \frac{m}{s}$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 5. Dynamic deflection of beam middle point, load velocity $v = 50 \frac{m}{s}$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ forced vibrations, $\xi > 1$ - free vibrations



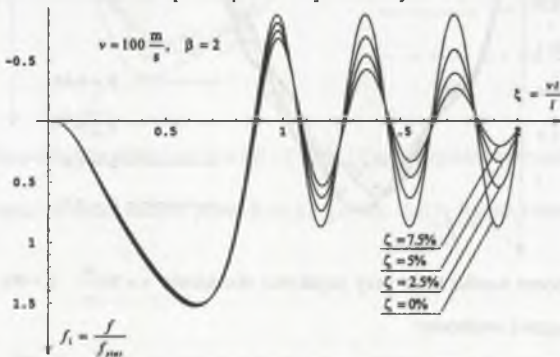
Rys. 6. Ugięcie dynamiczne środka belki przy prędkości obciążenia $v = 100 \frac{m}{s}$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 6. Dynamic deflection of beam middle point, load velocity $v = 100 \frac{m}{s}$, $\zeta = 0\%$, $\xi \leq 1$ forced vibrations, $\xi > 1$ free vibrations



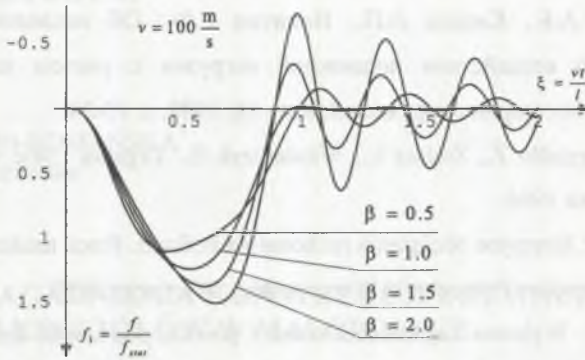
Rys. 7. Ugięcie dynamiczne środka belki przy $\beta = 1.5$ i $\zeta = 7.5\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 7. Dynamic deflection of beam middle point, $\beta = 1.5$ i $\zeta = 7.5\%$, $\xi \leq 1$ forced vibrations, $\xi > 1$ free vibrations



Rys. 8. Wpływ tłumienia na ugięcie dynamiczne belki, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 8. Damping influence for dynamic deflection of beam, $\xi \leq 1$ forced vibrations, $\xi > 1$ free vibrations



Rys. 9. Ugięcie dynamiczne środka belki przy $v = 100 \frac{m}{s}$ i $\zeta = 5\%$, $\xi \leq 1$ - drgania wymuszone, $\xi > 1$ - drgania swobodne

Fig. 9. Dynamic deflection of beam middle point, $v = 100 \frac{m}{s}$ i $\zeta = 5\%$, $\xi \leq 1$ - forced vibrations, $\xi > 1$ - free vibrations

5. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników widać, że istotne znaczenie w rozwiązywanym zadaniu ma zarówno prędkość, jak i wielkość współczynnika β . W pracy nie przedstawiono porównania z belką o masie równomiernie rozłożonej, ale jak wskazują obliczenia, w przypadku ugięć wyniki praktycznie pokrywają się ze sobą, jeśli uwzględnimy jeden wyraz szeregu w rozwiązaniu analitycznym. Niemniej jednak, jak wynika z rozprawy [2], wpływ wyższych częstości i postaci drgań własnych na ugięcia środka belki jest nieznaczny (około 2%).

Dalszymi etapami analizy będzie uwzględnienie zmiennej prędkości obciążenia, różnych modeli podłoża sprężystego, modeli tłumienia liniowego i nieliniowego, wpływu umiarkowanie dużych ugięć (nieliniowość geometryczna), a także zmiennej grubości, sztywności i masy belki.

Zadanie ma istotne znaczenie przy testowaniu dużych systemów komputerowych.

LITERATURA

1. Вольпер Д.Б., Моргаевский А.Б.: О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения. Исследования по теории сооружений. XII Москва, 1963, стр. 21-42.

2. Моргаевский А.Б., Карпов Л.П., Никитин Г.Ф.: Об исследовании величины динамического воздействия подвижной нагрузки с учетом высших гармоник. Исследования по теории сооружений, вып. 16, 1968, с. 15-24.
3. Kaliski S., Dzygadło Z., Stolarz L., Włodarczyk E.: Drgania i fale w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1966.
4. Szcześniak W.: Inercyjne obciążenia ruchome na belkach. Prace naukowe, budownictwo z. 112, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1990.
5. Szcześniak W.: Wybrane zagadnienia belek i powłok poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym. Prace naukowe, budownictwo z. 125, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1994.
6. Ataman M., Szcześniak W.: Dynamika belek ciągłych pod obciążeniem ruchomym, Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, z. 2, Radom, 2000, s. 1-22.
7. Zbiciak A., Szcześniak W.: Ruchome obciążenia bezinercyjne na belce modelowanej jednym stopniem swobody. IV Konferencja Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu – TransComp, Zakopane 2000, s. 441-450.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty

Abstract

The paper deals with the simply supported beam, modelled with one degree of freedom. The beam is subjected to the concentrated mass moving with constant velocity. The Kelvin-Voigt model of damping, the influences of velocity and mass magnitude are considered. The differential equation of beam motion is analytically deduced and numerically solved with the aid of Mathematica 4.0. The dynamic deflections of beam in case of various velocities, β factors and damping coefficients are shown.