ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: BUDOWNICTWO z. 93 Nr kol. 1514

Krzysztof GRYGIEREK *
Politechnika Śląska

DWA MODELE KOMPOZYTOWYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU ZAMKNIĘTYM

Streszczenie. W artykule tym przedstawiono opis statyki kompozytowych prętów cienkościennych. Zbudowano dwa modele bazujące na teorii powłok Timoshenki i Kirchhoffa-Love'a. Sformułowano dwa rodzaje elementów skończonych. Poprawność przedstawionych teorii sprawdzono na przykładzie.

TWO MODELS FOR COMPOSITE THIN WALLED BEAMS WITH CLOSED CROSS SECTION

Summary. In this paper the static problems description of the thin-walled composite beams was presented. Two models based on the Timoshenko's and Kirchhoffa-Love's shell theory were built. Two kinds of beam finite elements were formulated. The correctness of the theories was checked on the example.

1. Wstęp

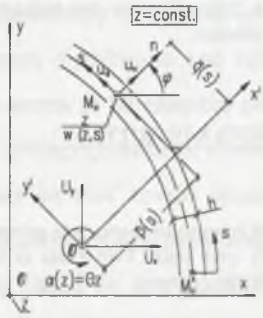
Kompozytowe pręty cienkościenne, ze względu na swe znakomite własności wytrzymałościowe i małą masę, bardzo szybko znalazły liczne zastosowania; w szczególności w przemyśle lotniczym. Prace naukowe tyczące się opisu statyki rozpatrywanych ustrojów bazują na teorii powłok cienkich, warstwowych. Możemy tutaj wyróżnić prace związane z teorią powłok: a) Kirchhoffa-Love'a, por. np.: N. R. Bauld i L-S. Tzeng [1] czy B. Omidwar i A. Ghorbanpoor [4] oraz b) Timoshenki np.: L. W. Rehfield, A. R. Atilgan, D. H. Hodges [7]. W obu tych przypadkach uwzględnia się dodatkowo deplanację. Celem tej pracy jest porównanie rezultatów otrzymywanych z wykorzystaniem tych dwóch modeli. Dążąc do tego zbudowano model kompozytowego pręta cienkościennego o profilu zamkniętym, bazując na teorii powłok Timoshenki. Równania równowagi belki typu Bernoulliego przedstawiono jako szczególny przypadek teorii Timoshenki. Rozwiązania problemu uzyskano wykorzystując

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski.

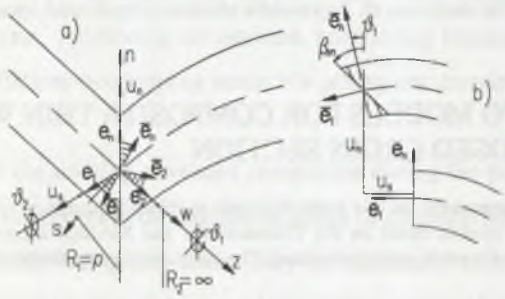
MES, budując oddzielne elementy skończone dla każdego modelu. Rezultaty otrzymywane w ten sposób porównano z wynikami programu ANSYS 5.4, gdzie zastosowano elementy 3D.

2. Pole przemieszczeń i odkształceń

Przemieszczenie dowolnego punktu M_o powierzchni środkowej pręta – powłoki będziemy określać, por. rys. 1, w odniesieniu do dwóch prawoskrętnych układów współrzędnych, a mianowicie globalnego $Oxyz$ i lokalnego $M_o nsz$.



Rys. 1. Konfiguracja pręta cienkościennego
Fig. 1. Thin-walled beam configuration



Rys. 2. Przemieszczenia powłoki
Fig. 2. Shell displacement

Niech dowolny punkt O' płaszczyzny sztywno związanej z przekrojem pręta wykonuje ruch płaski, określony współrzędnymi translacyjnymi U_x, U_y (układ $Oxyz$) oraz obrotem o kąt α. Niech dalej u_n i u_s określają składowe przemieszczenia dowolnego punktu M_o linii środkowej przekroju pręta (układ $M_o nsz$), które są normalnymi i stycznymi do tej linii. Na podstawie rys. 1 ustalimy zależność między tymi współrzędnymi:

$$u_n(z,s)=U_x \cos\varphi+U_y \sin\varphi-\alpha\overline{q}, \quad u_s(z,s)=-U_x \sin\varphi+U_y \cos\varphi+\alpha\overline{p}. \tag{1}$$

Celem zdefiniowania odkształceń w kompozytowym pręcie cienkościennym rozpatrywać będziemy powłokę cienkościenną, warstwową i zamkniętą, por. rys. 2. W powłoce tej określimy, za R. B. Rikardsem [6], składowe stanu odkształcenia warstwy powierzchni środkowej w powłokach typu Timoshenki, w dostosowanej do przyjętej tutaj notacji:

$$\begin{gathered}\varepsilon_s^o=\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{u_n}{\rho}\cong 0, \quad \varepsilon_z^o=\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zs}^o=\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial z}, \quad \kappa_s^o=\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}\cong 0, \quad \kappa_z^o=\frac{\partial \vartheta_2}{\partial z},\\ \kappa_{sz}^o=\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s}-\frac{\vartheta_n}{\rho}\cong 0, \quad \kappa_{zs}^o=\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}, \quad \beta_{zn}=\vartheta_2+\frac{\partial u_n}{\partial z}, \quad \beta_{sn}=\vartheta_1+\frac{\partial u_n}{\partial s}-\frac{u_s}{\rho}\cong 0.\end{gathered} \tag{2}$$

W równaniach (2) przyjęto oznaczenia: ε_s^o, ε_z^o, γ_{zs}^o - składowe odkształcenia; κ_z^o, κ_{sz}^o, κ_{zs}^o - składowe zmiany krzywizny I skręcenia powierzchni środkowej; β_{zn}, β_{sn} - uśrednione odkształcenia poprzecznego ścinania; $\vartheta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial z}\right)$ - kąt obrotu.

Dokonując prostych przekształceń, otrzymamy zależność pomiędzy zmianą skręcenia powierzchni środkowej a odkształceniami postaciowymi:

$$\kappa_{zs}^o = \frac{\gamma_{zs}^o}{2\rho}. \tag{3}$$

Całkowite odkształcenia postaciowe γ_{zs}^o możemy przedstawić jako sumę odkształceń postaciowych: γ_{zs}^z - związanych ze zginaniem i ścinaniem i γ_{zs}^s - wywołanych skręcaniem.

$$\gamma_{zs}^o = \gamma_{zs}^z + \gamma_{zs}^s. \tag{4}$$

Zależność pomiędzy odkształceniami postaciowymi (związanymi ze zginaniem) odpowiednio w układach współrzędnych $Oxyz$ i $M_o nsz$ po uwzględnieniu odpowiednich wzorów transformacyjnych przyjmie postać:

$$\gamma_{zs}^z = -\gamma_{zx} \sin\varphi + \gamma_{zy} \cos\varphi, \tag{5}$$

gdzie przyjęto: γ_{zx}, γ_{zy} - odkształcenia postaciowe związane z siłami poprzecznymi w układzie $Oxyz$.

Przejdźmy dalej do wyznaczenia przemieszczenia osiowego $w(z,s)$. Związek taki otrzymamy z warunku określającego odkształcenia postaciowe $(2)_3$. W tym celu porównujemy stronami równania $(2)_3$ i (4), a następnie podstawiamy do tak uzyskanej równości zależności $(1)_2$ i całkujemy, a wówczas otrzymamy następującą funkcję:

$$w(z,s) = W - \beta_y x + \beta_x y + \psi\alpha'; \tag{6}$$

w równaniu powyższym wprowadzono nowe funkcje:

$$W = W(z),\ \beta_x = (\gamma_{zy} - U_y'),\ \beta_y = (U_x' - \gamma_{zx}),\ \psi = \int_0^s \left(\frac{\gamma_{zs}^o}{\alpha} - \overline{p}\right) ds, \tag{7}$$

gdzie: W - jest składową osiową przemieszczenia; $\beta_x = \beta_x(z)$, $\beta_y = \beta_y(z)$ - są kątami obrotu płaszczyzny przekroju pręta względem osi: Ox i Oy; $\psi(s,n)$ - jest funkcją deplanacji.

Niezerowe składowe stanu odkształcenia (2), po uwzględnieniu (1), (3), (6), przyjmą postać:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\varepsilon_p\}, \tag{8}$$

gdzie:

$$\{\varepsilon_p\}=\{W' \quad U'_x-\beta_y \quad U'_y+\beta_x \quad \beta'_x \quad \beta'_y \quad \alpha' \quad \alpha''\}^T, \tag{9a}$$

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_z^o \quad \gamma_{zs}^o \quad \kappa_z^o \quad \kappa_{sz}^o\}^T, \tag{9b}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & -x & 0 & \psi \\ 0 & -sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 & \frac{\partial\psi}{\partial x}+\overline{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sin\varphi & -cos\varphi & 0 & \overline{q} \\ 0 & -\frac{1}{2\rho}sin\varphi & \frac{1}{2\rho}cos\varphi & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\overline{p}\right) & 0 \end{bmatrix}. \tag{9c}$$

W równaniu (8) wyrażono odkształcenia typu powłokowego - $\{\varepsilon\}$, jako funkcję odkształceń typu prętowego - $\{\varepsilon_p\}$.

3. Związki konstytutywne w materiale wielowarstwowym

Pręty cienkościenne scharakteryzowane są małą grubością ścianki w stosunku do pozostałych wymiarów; w związku z czym możemy przyjąć założenie, że pracują one w płaskim stanie naprężenia oraz każda z warstw kompozytu, z których pręt jest zbudowany, będzie zbrojona jednokierunkowo (ortotropowa). Uwzględniając powyższe, por. np.: A. Kelly [Ed] [3], niezerowymi składowymi tensora naprężenia będą $\sigma_s, \sigma_z, \tau_{zs}$. Dla przypadku prętów cienkościennych przyjmujemy dalsze założenie, iż naprężenia obwodowe σ_s są w przybliżeniu równe zeru $(\sigma_s=0)$. Po uwzględnieniu tego założenia stwierdzamy, że zależność określająca wektor naprężenia pojedynczej, k-tej warstwy pręta-powłoki w relacji naprężenie-odkształcenie przyjmie postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix} \overline{Q}_{33}-\frac{\overline{Q}_{23}^2}{\overline{Q}_{22}} & \overline{Q}_{34}-\frac{\overline{Q}_{23}\overline{Q}_{24}}{\overline{Q}_{22}} \\ \overline{Q}_{34}-\frac{\overline{Q}_{23}\overline{Q}_{24}}{\overline{Q}_{22}} & \overline{Q}_{44}-\frac{\overline{Q}_{24}^2}{\overline{Q}_{22}} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{Bmatrix}_k. \tag{10}$$

Siły wewnętrzne typu powłokowego, dla naszego przypadku możemy zapisać następująco:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_{zs} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_z^o \\ \gamma_{zs}^o \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{34} & B_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_z^o \\ \kappa_{zs}^o \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_z \\ M_{zs} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{34} & B_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_z^o \\ \gamma_{zs}^o \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} D_{33} & D_{34} \\ D_{34} & D_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_z^o \\ \kappa_{zs}^o \end{Bmatrix}, \quad \{N\}=[S]\{\varepsilon\}, \tag{11}$$

gdzie wprowadzono macierze:

$$[S]=\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ [B] & [D]\end{bmatrix},\quad \{N\}=\{N_z \quad N_{zs} \quad M_z \quad M_{zs}\}^T; \tag{11a}$$

przez $[A],[B],[D]$ oznaczono, znane z teorii powłok cienkich, warstwowych, macierze sztywności tarczowej, sprzężeń i zginania.

4. Równania równowagi i warunki brzegowe

Równania równowagi oraz warunki brzegowe otrzymamy z warunku minimalizacji funkcjonału całkowitej energii potencjalnej.

Składnik funkcjonału Lagrange'a określający energię wewnętrzną sił sprężystości w pręcie, po wykorzystaniu równań (11), por [2], możemy przedstawić w postaci następującej:

$$W[u]=\frac{1}{2}\int_V \sigma^{kl}\varepsilon_{kl}dV=\frac{1}{2}\int_0^L dz\int_0^l ds\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{kl}\varepsilon_{kl}dn=\frac{1}{2}\int_0^L dz\int_0^l \{N\}^T\{\varepsilon\}ds. \tag{12}$$

Energię potencjalną obciążeń zewnętrznych, masowych określimy jako:

$$\int_V \overline{X}^t u_i dV=\int_0^L\left(\overline{n}W+\overline{m}_x\beta_x+\overline{m}_y\beta_y+\overline{m}_z\alpha+\overline{b}\alpha'+\overline{f}_xU_x+\overline{f}_yU_y\right)dz. \tag{13}$$

W równaniu (13) wprowadzono obciążenia masowe, które występują w konstrukcjach prętowych cienkościennych; poszczególne składniki występujące w wyrażeniu podcałkowym określają: $\overline{n},\overline{f}_x,\overline{f}_y$ - siły masowe: osiowa i poprzeczne; $\overline{m}_x,\overline{m}_y,\overline{m}_z$ - momenty masowe: zginające i skręcający; $\overline{b}$ - masowy bimoment.

Analogicznie do sił masowych (13), występujących w składowej funkcjonału Lagrange'a, zapiszemy trzeci składnik tego funkcjonału, w którym występują obciążenia brzegowe:

$$\int_{\partial V}\hat{X}^t u_i df=\left(\hat{n}W+\hat{m}_x\beta_x+\hat{m}_y\beta_y+\hat{m}_z\alpha+\hat{b}\alpha'+\hat{f}_xU_x+\hat{f}_yU_y\right)\Big|_0^L. \tag{14}$$

Równania definiujące siły wewnętrzne typu prętowego w zależności od sił wewnętrznych powłokowych przyjmą postać:

$$N=\int_0^l N_z ds,\ M_x=\int_0^l(N_z y+M_z\sin\varphi)ds,\ M_y=-\int_0^l(N_z x+M_z\cos\varphi)ds,\ B=\int_0^l(N_z\psi+M_z\overline{q})ds,$$

$$K=\int_0^l\left(-N_z'\psi-M_z'\overline{q}+\left(N_{zs}+\frac{1}{2\rho}M_{zs}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}+\overline{p}\right)\right)ds,\ Q_x=\int_0^l\left(-N_{zs}\sin\varphi-\frac{1}{2\rho}M_{zs}\sin\varphi\right)ds,$$

$$Q_y = \int_0^l \left(N_{zs} \cos\varphi + \frac{1}{2\rho} M_{zs} \cos\varphi \right) ds, \tag{15}$$

gdzie występują: siła osiowa N, momenty zginające: M_x, M_y, moment skręcający: K, bimoment: B, siły poprzeczne: Q_x, Q_y.

Lokalne równania równowagi otrzymamy przyrównując do zera wariację funkcjonału Lagrange'a, po uprzednim zastosowaniu tam twierdzenia Greena. Uzyskane w ten sposób równania, w liczbie sześciu, po wykorzystaniu sił wewnętrznych typu prętowego (równania (15)), przyjmą postać:

$$\begin{aligned} &N' + \bar{n} = 0, && M_x' - Q_y + \bar{m}_x = 0, \\ &Q_x' + \bar{f}_x = 0, && M_y' + Q_x + \bar{m}_y = 0, \\ &Q_y' + \bar{f}_y = 0, && -B'' + M_s' - \bar{b}' + \bar{m}_z = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

Warunki brzegowe, w liczbie siedmiu na każdym brzegu, otrzymane podobnie będą spełniały następujące związki na brzegach $z = 0$ i $z = L$:

$$N = \hat{n}, \; M_x = \hat{m}_x, \; M_y = \hat{m}_y, \; M_s - B' = \hat{m}_z + \bar{b}, \; B = \hat{b}, \; Q_x = \hat{f}_x, \; Q_y = \hat{f}_y. \tag{17}$$

W równaniach (15) przedstawiono siły wewnętrzne typu prętowego jako funkcje sił wewnętrznych powłokowych. Wprowadzając tam siły typu powłokowego (11), a dalej odkształcenia powierzchni środkowej powłoki (8), otrzymamy w rezultacie siły typu prętowego w funkcjach przemieszczeń; na tej samej drodze możemy otrzymać lokalne warunki równowagi w relacji przemieszczeniowej.

5. Belka Bernoulliego

Model bazujący na hipotezie Kirchhoffa-Love'a, zakłada, iż odcinek materialny prostoliniowy, prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej pozostaje prostoliniowy i prostopadły do powierzchni odkształconej, a jego długość się nie zmienia. Założenie to uwzględnimy w powyższym opisie, przyjmując, iż uśrednione odkształcenia poprzecznego ścinania dla belki Timoshenki są równe zeru:

$$\beta_{zn} = \beta_{sn} \equiv 0. \tag{18}$$

Stąd zależności pomiędzy kątami obrotu i przemieszczeniami pręta opisane równaniami:

$$\beta_x = -U_y', \; \beta_y = U_x'. \tag{19}$$

Równości (19) opisują, znaną z wytrzymałości materiałów, hipotezę Bernoulliego wykorzystywaną w teorii prętów o przekroju zwartym.

Zależności definiujące siły wewnętrzne typu prętowego są analogiczne do uzyskanych dla przypadku belki Timoshenki (15). Wyjątek stanowią siły poprzeczne, które obliczymy w funkcji sił powłokowych wg następujących zależności:

$$Q_x = \int_0^l \left(N'_z x + M'_z \cos\varphi\right) ds, \quad Q_y = \int_0^l \left(N'_z y + M'_z \sin\varphi\right) ds. \tag{19a}$$

Porównując równania (19) z $(15)_{2,3}$ otrzymamy charakterystyczne zależności, w modelu belki Bernoulliego, pomiędzy siłami poprzecznymi i momentami zginającymi:

$$Q_x = -M'_y, \quad Q_y = M'_x. \tag{20}$$

W analizie tego rodzaju belki występują cztery lokalne warunki równowagi:

$$\begin{aligned} &N' + \bar{n} = 0, && M''_y + \bar{m}'_y - \bar{f}_x = 0, \\ &B'' - M'_s + \bar{b}' - m_z = 0, && M''_x + \bar{m}'_x + \bar{f}_y = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Na tym zakończymy rozpatrywanie modelu belki Bernoulliego. Wszystkie pozostałe obliczenia są analogiczne do modelu Timoshenki (po przyjęciu tam zależności (18) i (19)).

6. Metoda elementów skończonych

Określmy związek opisujący wariację energii wewnętrznej sił sprężystości w pręcie. W tym celu rozpatrzymy równanie (12), do którego wprowadzimy zależności (11) i (8), skąd kolejno otrzymamy:

$$\delta W = \int_0^L dz \int_0^l \{\delta\varepsilon\}^T [S]\{\varepsilon\} ds = \int_0^L dz \int_0^l \{\delta\varepsilon_p\}^T [B]^T [S][B]\{\varepsilon_p\} ds = \int_0^L \{\delta\varepsilon_p\}^T [K]\{\varepsilon_p\} dz. \tag{22}$$

W równaniu tym wyodrębnimy macierz charakterystyk geometryczno-wytrzymałościowych, zdefiniowaną jako:

$$[K] = \int_0^l [B]^T [S][B] ds. \tag{23}$$

Całkowitą wariację funkcjonału Lagrange'a zapiszemy:

$$\delta I_L = \int_0^L \{\delta\varepsilon_p\}^T [K]\{\varepsilon_p\} dz - \int_0^L \{\delta u\}^T \{\bar{f}\} dz - \{\delta u\}^T \{\hat{f}\}_0^L. \tag{24}$$

W równaniu (24) wprowadzono macierze wektory, kolejno wariacji przemieszczeń, obciążeń masowych i brzegowych:

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \{W \quad U_x \quad U_y \quad \beta_x \quad \beta_y \quad \alpha \quad \alpha'\}^T, \\
\{\bar{f}\} &= \{\bar{n} \quad \bar{f}_x \quad \bar{f}_y \quad \bar{m}_x \quad \bar{m}_y \quad \bar{m}_z \quad -\bar{b}\}^T, \\
\{\hat{f}\} &= \{\hat{n} \quad \hat{f}_x \quad \hat{f}_y \quad \hat{m}_x \quad \hat{m}_y \quad \hat{m}_z + \bar{b} \quad \hat{b}\}^T.
\end{aligned} \tag{25}$$

Do rozwiązania zadania brzegowego rozpatrywanego problemu wykorzystamy MES, w którym zastosujemy element belkowy o dwóch węzłach. Wektor przemieszczeń węzłowych k-tego węzła w postaci wektora możemy zapisać:

$$\{d_k\} = \{W \quad U_x \quad U_y \quad \beta_x \quad \beta_y \quad \alpha \quad \alpha'\}_k, \; k = 1,2. \tag{26}$$

Ze względu na analogie w budowie elementu skończonego belek zwartych i cienkościennych, ograniczymy się tutaj do podania przyjętych funkcji aproksymujących:

a) belki Timoshenki (dla belek zwartych, izotropowych J. S. Przemieniecki [5]):

$$\begin{aligned}
W(z) &= N_2 W_1 + N_1 W_2, \\
U_x(z) &= N_4^y U_{x1} - N_6^y \beta_{y1} + N_3^y U_{x2} + N_5^y \beta_{y2}, \\
U_y(z) &= N_4^x U_{y1} + N_6^x \beta_{x1} + N_3^x U_{y2} - N_5^x \beta_{x2}, \\
\beta_x(z) &= N_7^x U_{y1} + N_9^x \beta_{x1} - N_7^x U_{y2} + N_8^x \beta_{x2}, \\
\beta_y(z) &= -N_7^y U_{x1} + N_9^y \beta_{y1} + N_7^y U_{x2} + N_8^y \beta_{y2}, \\
\alpha(z) &= N_{10}\alpha_1 + N_{11}\alpha_1' + N_{12}\alpha_2 + N_{13}\alpha_2',
\end{aligned} \tag{27}$$

b) belki Bernoulliego

$$\begin{aligned}
W(z) &= N_2 W_1 + N_1 W_2, \\
U_x(z) &= N_{10} U_{x1} + N_{11}\beta_{y1} + N_{12} U_{x2} + N_{13}\beta_{y2}, \\
U_y(z) &= N_{10} U_{y1} - N_{11}\beta_{x1} + N_{12} U_{y2} - N_{13}\beta_{x2}, \\
\alpha(z) &= N_{10}\alpha_1 + N_{11}\alpha_1' + N_{12}\alpha_2 + N_{13}\alpha_2',
\end{aligned} \tag{28}$$

W związkach (27) i (28) przez $N_\alpha^i \; (i = x, y; \alpha = 1 \div 13)$ określono następujące funkcje kształtu:

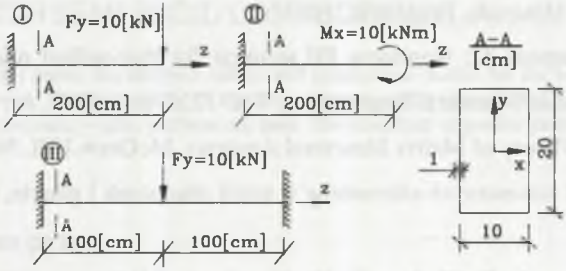
$$\begin{aligned}
&N_1 = \frac{x}{L_e}, N_2 = 1 - \frac{x}{L_e}, N_3^i = N_1\left(3N_1 - 2N_1^2 + 12\eta_i\right)\zeta_i, \quad (i = x, y) \\
&N_4^i = N_2\left(3N_2 - 2N_2^2 + 12\eta_i\right)\zeta_i, \; N_5^i = L_e\left(N_1^2 - (1 - 6\eta_i)N_1 - 6\eta_i\right)N_1\zeta_i, \\
&N_6^i = L_e\left(N_2^2 - (1 - 6\eta_i)N_2 - 6\eta_i\right)N_2\zeta_i, \; N_7^i = \frac{6}{L_e}N_1 N_2 \zeta_i, \\
&N_8^i = N_1\left(3N_1 - 2(1 - 6\eta_i)\right)\zeta_i, \; N_9^i = N_2\left(3N_2 - 2(1 - 6\eta_i)\right)\zeta_i, \; N_{10} = 1 - 3N_1^2 + 2N_1^3, \\
&N_{11} = L_e\left(N_1 - 2N_1^2 + N_1^3\right), \; N_{12} = 3N_1^2 - 2N_1^3, \; N_{13} = L_e\left(-N_1^2 + N_1^3\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

w których, przyjęto następujące oznaczenia:

$$\zeta_i = \frac{1}{(1+12\eta_i)}, \quad (i = x, y),$$
$$\eta_x = \frac{K_{44}}{k_y K_{33} L_e^2}, \quad \eta_y = \frac{K_{55}}{k_x K_{22} L_e^2}. \tag{30}$$

7. Analiza przykładu

Przeprowadzimy obliczenia rozpatrując trzy belki o profilu prostokątnym, por. rys 3. Ścianki profilu składają się: w przypadku: A - z jednej warstwy o grubości $t = 1\,cm$, ustawionej pod kątem 25°; B – z trzech warstw o grubości $t_i = 0.33\,cm$ i kodzie [25,0,25]. W obu przypadkach materiałem jest kompozyt szkło E/epoksyd o następujących charakterystykach materiałowych: $E_1 = 45\,GPa$, $E_2 = 12\,GPa$, $G = 5.5\,GPa$, $\nu_{12} = 0.28$.



Rys. 3. Schemat zadania
Fig. 3. Schematic of the problem

Wyniki otrzymane autorskim programem, napisanym w Matlab-ie, zostały porównane z rezultatami uzyskanymi za pomocą pakietu Ansys 5.4. W programie tym rozwiązanie otrzymano stosując warstwowe elementy skończone typu powłokowego (3D). Maksymalne ugięcia i kąty obrotu zostały zestawione w tabeli.

Tabela 1

Maksymalne ugięcia i kąty obrotu

	I		II				III	
	A	B	A		B		A	B
	Uy [mm]	Uy [mm]	Uy [mm]	θx [rad]	Uy [mm]	θx [rad]	Uy [mm]	Uy [mm]
ANSYS 5.4	-33,09	-25,34	-24,6	2,47E-02	-18,6	1,91E-02	-0,65	-0,54
Timoshenko	-30,04	-24,86	-23,1	2,25E-02	-18,4	1,83E-02	-0,61	-0,53
błąd [%]	9,22	1,89	6,10	8,91	1,08	4,19	6,15	1,85
Bernoulli	-25,52	-25,8	-19,4	1,95E-02	-17,2	1,68E-02	-0,4	-0,37
błąd [%]	22,88	-1,82	21,14	21,05	7,53	12,04	38,46	31,48

8. Wnioski

Analizując otrzymane wyniki stwierdzamy, iż belka Timoshenki lepiej odzwierciedla pracę kompozytowych belek cienkościennych. W odróżnieniu od belki Bernoulliego, uwzględnia ona sprzężenie odkształceń poprzecznych ze zginającymi. Zaleta ta szczególnie uwypukla się dla przypadku belek jednokierunkowo zbrojonych (przypadek A), gdzie max. błąd w belce Timoshenki wynosi 6%, a Bernoulliego 38%. Dla belek warstwowych (B), ze względu na występującą kompensatę sprzężeń, błędy w belce Bernoulliego są mniejsze.

LITERATURA

1. Bauld N.R., Tzeng Jr., Tzeng L-S.: A Vlasov theory for fibres-reinforced beams with thin-walled open cross section, Int. J. Solids Structures, Vol. 20, No.3, 1984, 277-297.
2. Grygierek K.: Opis wariacyjny kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym, Zeszyty Nauk. Pol. Śl., seria Budownictwo nr 1440, Gliwice 1999, 69-79.
3. Kelly A.: Composite Materials, Pergamon, 1994.
4. Omidvar B.; Ghorbanpoor A.: Nonlinear FE solution for thin-walled open-section composite beams, Journal of Structural Engineering, Vol. 122,No.11,1996, str. 1369-1378
5. Przemieniecki J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968
6. Rikards R. B.: Metod koniecznych elementow w teorii obołoczek i płastin, Riga „Zinatne", 1988.
7. Rehfield L.W., Atilgan A. R., Hodges D. H.: Nonclassical behavior of thin-walled composite beams with closed cross sections, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 35, No. 2, 1990, s. 42-50.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał, prof. PO

Abstract

In this paper the static problems description of the thin-walled composite beams was presented. The beam was modelled with the closed cylindrical multilayered shell. Two models based on the Timoshenko's and Kirchhoffa-Love's shell theory were built. Two kinds of beam finite elements were formulated. The correctness of the theories was checked on the example. Timoshenko's and Bernoulli's solution was compared with the results obtained by the used Ansys 5.4 programme in which the 3D-shell element was used.