ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: BUDOWNICTWO z. 93 Nr kol.1514

Jarosław JANUSZEK*

KONSYSTENTNE SFORMUŁOWANIE MES PROBLEMU WYBOCZENIA RAM Z PODATNYMI POŁĄCZENIAMI

Streszczenie. W pracy wyprowadzono macierze sztywności i początkowych naprężeń dla belkowego elementu skończonego, z podatnymi połączeniami. Do budowy macierzy elementu przyjęto funkcje kształtu wynikające ze ścisłego rozwiązania odpowiedniego problemu brzegowego. Wykorzystując model skończenie-elementowy pręta, sformułowano nieliniowy algebraiczny problem własny, który następnie konsekwentnie zlinearyzowano.

CONSISTENT FEM FORMULATION OF THE BUCKLING PROBLEM OF FRAMES WITH SEMI-RIGID CONNECTIONS

Summary. In the paper, the stiffness matrix and geometrical matrix for the beam element with semi-rigid connections is derived. The formulation of the finite-element model is applied. The exact shape functions being the solution of the boundary-value problem are used. The nonlinear eigevalue problem is formulated and consistently linearized.

1. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest wyprowadzenie równań równowagi i wyboczenia dla belkowego elementu skończonego, modelującego podatne połączenie elementu z węzłami konstrukcji. Model skończenie-elementowy pręta zbudowano wykorzystując sformułowanie wariacyjne odpowiedniego problemu brzegowego, dla pręta zginanego z siłą ściskającą [5]. Podatność modelowana jest przez uwzględnienie w naturalnych warunkach brzegowych relacji pomiędzy stopniami swobody węzłów i przemieszczeniami uogólnionymi (obrotowymi i translacyjnymi) przekrojów końcowych elementu. Funkcję ugięcia pręta interpolowano za pomocą funkcji kształtu otrzymanych ze ścisłego rozwiązania równania różnicowego problemu. Przyjęcie takiej interpolacji powoduje, że otrzymany algebraiczny problem własny jest wysoce nieliniowy względem parametru obciążenia. Konsystentna linearyzacja występujących tam macierzy pozwoliła otrzymać odpowiednio liniowe równania równowagi oraz liniowy algebraiczny problem własny, w funkcji parametrów podatności.

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Czesław Cichoń.

Oryginalność pracy polega na konsekwentnym wykorzystaniu postępowania właściwego metodzie elementów skończonych MES, w przeciwieństwie do znanych rozwiązań, w których łączy się postępowanie właściwe metodzie przemieszczeń z postępowaniem MES [2]. Na obecnym etapie rozwoju pracy przyjęto podatności liniowe. Zakres cytowanej literatury został ograniczony jedynie do pozycji wiążących się bezpośrednio z pracą i nie pretenduje do zestawienia literatury opisującej stan wiedzy na temat problemów związanych z teorią i projektowaniem połączeń półsztywnych w konstrukcjach metalowych. Bogaty przegląd literatury na ten temat można np. znaleźć w cytowanej już pracy [2].

Problematyka pracy będzie dalej rozwijana, z wykorzystaniem wyprowadzonych macierzy elementu skończonego, w celu obliczania ścieżek stanów równowagi konstrukcji. Odpowiednie postępowanie przyrostowe w opisie Lagrange a zostanie połączone z efektywną, w przypadku płaskich konstrukcji prętowych, koncepcją tzw. współrzędnych współobrotowych [3].

W części aplikacyjnej autor zamierza również zdefiniować takie połączenia elementów konstrukcyjnych (słupów, belek), w których występuje możliwość ograniczonego obrotu i/lub przesuwu przekrojów przywęzłowych.

2. Skończenie-elementowy model pręta

2.1. Sformułowanie wariacyjne

Równanie różniczkowe problemu utraty stateczności elementu skończonego z siłą osiową ma postać

$$EJ\frac{d^4 v}{dx^4}+S\frac{d^2 v}{dx^2}=0, \qquad x\in(0,l) \tag{1}$$

gdzie:

$v(x)$ - funkcja ugięcia elementu w lokalnym układzie współrzędnych prostokątnych (x,y),

(y,z) - osie główne centralne przekroju poprzecznego,

$EJ \equiv EJ_z$ - sztywność giętna przekroju poprzecznego (przyjęta, dla uproszczenia jako stała dla elementu),

$S(x)$ - siła ściskająca element,

l - długość elementu.

Pierwszym krokiem w skończenie-elementowym procedurze jest zbudowanie sformułowania wariacyjnego w celu zidentyfikowania podstawowych i naturalnych warunków brzegowych. W przypadku równania (1), sformułowanie wariacyjne przyjmuje formę

$$0=\int_0^l w\left[EJ\frac{d^4v}{dx^4}+S\frac{d^2v}{dx^2}\right]dx=\int_0^l\left[EJ\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}-S\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}\right]dx+\left[w\left(EJ\frac{d^3v}{dx^3}+S\frac{dv}{dx}\right)\right]_0^l-\left[EJ\frac{dw}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l \tag{2}$$

gdzie $w(x)\in H^2(0,l)$ jest funkcją testową.

W celu uniknięcia żmudnego całkowania przy obliczaniu macierzy elementu skończonego wykonamy dalsze całkowanie sprowadzając problem jedynie do obliczania wartości brzegowych [4]. Bardziej ogólne sformułowanie tego klasycznego postępowania przy budowaniu różnych metod rozwiązań aproksymacyjnych problemów brzegowych można znaleźć w [1]. Wykonując stosowne obliczenia otrzymamy

$$\begin{aligned}0=\int_0^l w\left[EJ\frac{d^4v}{dx^4}+S\frac{d^2v}{dx^2}\right]dx-w\left[EJ\frac{d^3v}{dx^3}+S\frac{dv}{dx}\right]_0^l+\left[EJ\frac{dw}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l+\\+\left\{\left[w\left(EJ\frac{d^3v}{dx^3}+S\frac{dv}{dx}\right)\right]_0^l-\left[EJ\frac{dw}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l\right\}=-w\left[EJ\frac{d^3v}{dx^3}+S\frac{dv}{dx}\right]_0^l+\left[EJ\frac{dw}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l+\\+\left\{\left[w\left(EJ\frac{d^3v}{dx^3}+S\frac{dv}{dx}\right)\right]_0^l-\left[EJ\frac{dw}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie wykorzystano równanie (1).

Z analizy członów brzegowych ujętych w klamry w równaniu (3) wynika, że warunki brzegowe dla końcowych węzłów (przekrojów) elementu skończonego wynoszą

podstawowe warunki brzegowe

$$v(0)\equiv v_1,\quad \frac{dv}{dx}(0)\equiv v_2,\quad v(l)\equiv v_3\quad \frac{dv}{dx}(l)\equiv v_4, \tag{4a}$$

naturalne warunki brzegowe

$$EJ\frac{d^3v}{dx^3}(0)+S(0)\frac{dv}{dx}(0)=V_1,\quad EJ\frac{d^2v}{dx^2}(0)=M_1,\quad -EJ\frac{d^3v}{dx^3}(l)-S(l)\frac{dv}{dx}(l)=V_2,\quad EJ\frac{d^2v}{dx^2}(l)=M_2. \tag{4b}$$

Wyprowadzone wyżej wielkości można zapisać w formie wektorowej

$$\underline{v}^T=[v_1\ \ v_2\ \ v_3\ \ v_4],\qquad \underline{f}^T=[V_1\ \ M_1\ \ V_2\ \ M_2] \tag{5}$$

gdzie elementami wektora $\underline{v}$ są uogólnione przemieszczenia końców elementu, a w wektorze $\underline{f}$ są zgrupowane odpowiadające tym przemieszczeniom uogólnione siły przekrojowe (siły poprzeczne i momenty zginające).

2.2. Interpolacja funkcji ugięcia.

Przyjmiemy, że funkcja ugięcia $v(x)$ jest wyrażona wzorem interpolacyjnym

$$v(x)=\underline{p}^T(x)\,\underline{a}, \tag{6}$$

gdzie:

$\underline{p}^T(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}$ - wektor wierszowy funkcji bazowych,

$\underline{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}$ - wektor kolumnowy nieznanych współczynników interpolacji.

Możliwość podatnego połączenia elementu skończonego z węzłami konstrukcji uwzględnimy wprowadzając do naturalnych warunków brzegowych (4b) relacje pomiędzy węzłowymi stopniami swobody i uogólnionymi przemieszczeniami końców elementu. Relacje te opisują własności sprężyn modelujących połączenie podatne:

$$\frac{d^3v}{dx^3}(0)=\frac{1}{\alpha_1 l^3}(q_1-v(0)), \qquad \frac{d^2v}{dx^2}(0)=\frac{1}{\beta_1 l}\left(-q_2+\frac{dv}{dx}(0)\right),$$

$$\frac{d^3v}{dx^3}(l)=\frac{1}{\alpha_2 l^3}(-q_3+v(l)), \qquad \frac{d^2v}{dx^2}(l)=\frac{1}{\beta_2 l}\left(q_4-\frac{dv}{dx}(l)\right). \tag{7}$$

gdzie:

$$\alpha_j=\frac{EJ}{l^3k_{vj}}, \quad \beta_j=\frac{EJ}{lk_{\varphi j}}, \quad j=1,2$$

$k_{vj}, k_{\varphi j}$ - współczynniki charakteryzujące podatności połączeń pręta, ze względu na ograniczony przesuw lub obrót przekrojów końcowych.

Występujące we wzorach (7) wielkości $q_i,\ i=1,2,..,4$ tworzą wektor węzłowych stopni swobody elementu (nazywanego też w literaturze superelementem)

$$\underline{q}^T=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3 & q_4\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Dalsze postępowanie polega na wyznaczeniu współczynników $a_i,\ i=1,2,..,4$ z rozwiązania ogólnego równania różniczkowego (1) z wykorzystaniem warunków brzegowych (7). W efekcie równanie (6) przyjmuje postać standardową

$$v(x)=\underline{N}(x,\alpha_j,\beta_j)\,\underline{q} \tag{9}$$

gdzie:

$\underline{N}$ - macierz jednowierszowa tzw. ścisłych funkcji kształtu $(\alpha_j \equiv \alpha_1,\alpha_2,\ \beta_j \equiv \beta_1,\beta_2)$.

2.3. Równanie równowagi krytycznej elementu

Stosownie do przyjętej koncepcji budowy superelementu, funkcję testową należy aproksymować w bazie zwykłych funkcji Hermita

$$w(x) = \underline{H}\,\underline{c} \tag{10}$$

gdzie:

$\underline{H}$ - macierz jednowierszowa wielomianów Hermita stopnia trzeciego,

$\underline{c}$ - wektor stałych współczynników.

Przyjęcie różnych aproksymacji dla funkcji ugięcia $v(x)$ i funkcji testowej $w(x)$ powoduje, że tak sformułowany model skończenie-elementowy odpowiada sformułowaniu Petrowa-Galerkina metody residuów ważonych.

Funkcje $H_i,\ i = 1,2,\ldots,4$ przyjmują w węzłach wartości 0 lub 1, odpowiednio dla funkcji i ich pochodnych. Podstawiając następnie wzory (9) i (10) do równania (3) otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{c}^T \left\{ \left[-EJ \left[\underline{H}^T \frac{d^3 \underline{N}}{dx^3} - \left(\frac{d\underline{H}}{dx} \right)^T \frac{d^2 \underline{N}}{dx^2} \right]_0^l - S \left[\underline{H}^T \frac{d\underline{N}}{dx} \right]_0^l \right] \underline{q} \right\} = \\ &= \underline{c}^T \left\{ \left[\underline{k}(S, \alpha_j, \beta_j) - S\,\underline{g}(S, \alpha_j, \beta_j) \right] \underline{q} \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie zdefiniowano macierze:

$$\begin{aligned} \underline{k} &= -EJ \left[\underline{H}^T \frac{d^3 \underline{N}}{dx^3} - \left(\frac{d\underline{H}}{dx} \right)^T \frac{d^2 \underline{N}}{dx^2} \right]_0^l \\ \underline{g} &= \left[\underline{H}^T \frac{d\underline{N}}{dx} \right]_0^l \end{aligned} \tag{12}$$

Przyjmując, że $\underline{c} \neq \underline{0}$ otrzymamy równanie równowagi krytycznej elementu w postaci jednorodnego układu równań w formie

$$\left(\underline{k} + S\,\underline{g} \right) \underline{q} = \underline{0} \tag{13}$$

Macierze dla elementu ramowego otrzymamy w prosty sposób dodając do wektora $\underline{q}$ stopnie swobody, związane z przemieszczeniem podłużnym osi elementu.

3. Algebraiczny problem własny

Algebraiczny problem własny dla konstrukcji zdyskretyzowanej elementami skończonymi (belki, ramy) otrzymamy dokonując procesu agregacji i uwzględniając, że rozważana konstrukcja jest idealna, co w naszym przypadku oznacza brak obciążenia zewnętrznego, powodującego stan giętny przed wyboczeniem. W ten sposób otrzymamy równanie problemu własnego w formie

$$\left(\underline{K}(\underline{S})+\lambda\underline{G}(S)\right)\underline{Q}=\underline{0}, \tag{14}$$

gdzie przyjęto, że obciążenie wywołujące siły osiowe w konstrukcji jest proporcjonalne

$$\underline{P}=\lambda\underline{P}^{o}, \tag{15}$$

gdzie:

λ - parametr obciążenia,

$\underline{P}^{o}$ - wektor charakteryzujący rozkład obciążenia

oraz wyraźnie zaznaczono zależność macierzy globalnych $\underline{K}$ i $\underline{G}$ od rozkładu sił osiowych $\underline{S}$ (czyli od stanu przemieszczeń).

Algebraiczny problem własny (14) jest silnie nieliniowy ze względu na parametr obciążenia λ, $(\underline{S}=\underline{S}(\lambda))$ i w następnym punkcie przedstawimy konsystentną linearyzację tego problemu.

4. Linearyzacja

W celu otrzymania problemu własnego dla zagadnienia stateczności początkowej [4] zlinearyzujemy wyrażenie w nawiasie (13) otrzymując

$$\underline{k}+S\,\underline{g}=\underline{k}_0+S\underline{k}_g+\ldots \tag{16}$$

gdzie:

$\underline{k}_0$ - macierz sztywności elementu,

$\underline{k}_g$ - macierz sztywności geometrycznej.

Należy zauważyć, że aby uzyskać konsystentną linearyzację, nie można rozwinąć w szereg Taylora oddzielnie macierzy $\underline{k}$ i $\underline{g}$, lecz musi to być wykonane dla sumy $\left(\underline{k}+\lambda\,\underline{g}\right)$, co prowadzi do poprawnego wyniku. W Załączniku podano jawne wzory dla elementów macierzy $\underline{k}_0$ *i* $\underline{k}_g$.

Wykorzystując linearyzację (16) sformułujemy następujące równania MES dla konstrukcji *równania równowagi w stanie przedwyboczeniowym*

$$\underline{K}_o\underline{Q}=\underline{P}^0 \tag{17}$$

gdzie:

$\underline{Q}$ - wektor stopni swobody konstrukcji,

algebraiczny problem własny dla zagadnienia stateczności początkowej

$$\left[\underline{K}_o + \lambda\left(\underline{K}_g\right)\right]\underline{Q} = \underline{0} \tag{18}$$

gdzie obecnie $\underline{Q}$ jest wektorem formy utraty stateczności.

Macierze $\underline{K}_o$ i $\underline{K}_g$ są macierzami globalnymi otrzymanymi w wyniku agregacji macierzy elementowych $\underline{k}_o$ i $\underline{k}_g$.

Macierz sztywności geometrycznej $\underline{k}_g$ otrzymana w wyniku linearyzacji jest równoważna macierzy obliczanej ze wzoru

$$\underline{k}_g = S\int_0^l \left(\frac{d\underline{N}_l}{dx}\right)^T \frac{d\underline{N}_l}{dx}dx \tag{19}$$

w którym macierz funkcji kształtu $\underline{N}_l$ jest otrzymana z warunku granicznego

$$\underline{N}_l = \lim_{s \to 0} \underline{N} \tag{20}$$

lub co jest równoważne, $\underline{N}_l$ jest macierzą wielomianów Hermita dla elementu z podatnymi połączeniami.

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono konsystentne wyprowadzenie macierzy elementu skończonego z podatnymi połączeniami z węzłami konstrukcji. W wyniku konsekwentnej linearyzacji nieliniowego algebraicznego problemu własnego, sformułowano klasyczny problem własny dla zagadnienia stateczności początkowej.

Podziękowanie. Autor dziękuje prof. C. Cichoniowi za pomoc w sformułowaniu problemu i dyskusję w czasie przygotowania pracy.

Załącznik

Jawne postacie wzorów elementów macierzy $\underline{k}_0$

$$\underline{k}_0 = \frac{EJ}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{12} & a_{24} \\ -a_{11} & -a_{12} & a_{11} & -a_{14} \\ a_{14} & a_{24} & -a_{14} & a_{44} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\Delta = 1 + 4(\beta_1 + 3\beta_1\beta_2 + \beta_2) + 12(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \beta_1 + \beta_2)$$

$$a_{11} = \frac{12}{l^3}\left(1 + \beta_j + \beta_i\right)$$

$$a_{12} = \frac{6(1+2\beta_2)}{l^2}$$

$$a_{14} = \frac{6(1+2\beta_1)}{l^2}$$

$$a_{24} = \frac{2-12(\alpha_1+\alpha_2)}{l}$$

$$a_{22} = \frac{4+12(\alpha_1+\alpha_2+\beta_2)}{l}$$

$$a_{44} = \frac{4+12(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1)}{l}$$

Jawne postacie wzorów elementów macierzy $\underline{k}_g$

$$\underline{k}_g = \frac{1}{\Delta^2}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & -b_{11} & b_{14} \\ b_{12} & b_{22} & -b_{12} & b_{24} \\ -b_{11} & -b_{12} & b_{11} & -b_{14} \\ b_{14} & b_{24} & -b_{14} & b_{44} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$b_{11} = \frac{6}{5l}\left[1+(\beta_1+\beta_2)(7+80\beta_1\beta_2)+6\beta_1\beta_2(7+20\beta_1\beta_2)+16\left(\beta_1^2+\beta_2^2\right)\right]$$

$$b_{12} = \frac{-1}{10}\left[-1+(\alpha_1+\alpha_2)\left[300(\beta_1+\beta_2)+60+480\beta_2^2+1200\beta_1\beta_2+1400\beta_2^2\beta_1\right]+4(\beta_1-2\beta_2)+28\beta_1\beta_2-32\beta_2^2\right]$$

$$b_{14} = \frac{-1}{10}\left[-1+(\alpha_1+\alpha_2)\left[300(\beta_1+\beta_2)+60+480\beta_1^2+1200\beta_1\beta_2+1400\beta_1^2\beta_2\right]+4(\beta_2-2\beta_1)+28\beta_1\beta_2-32\beta_1^2\right]$$

$$b_{24} = \frac{l}{30}\left[-1-12(\beta_1+\beta_2)[1+15(\alpha_1+\alpha_2)(1-12(\alpha_1+\alpha_2))]-60(\alpha_1+\alpha_2)-84\beta_1\beta_2+720(1+6\beta_1\beta_2)(\alpha_1+\alpha_2)^2\right]$$

$$b_{22} = \frac{2l}{15}\left[1+(\alpha_1+\alpha_2)(15+90\beta_2)+360(3\beta_2(1+\beta_2)+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2+3\beta_2(3+8\beta_2)\right]$$

$$b_{44} = \frac{2l}{15}\left[1+(\alpha_1+\alpha_2)(15+90\beta_1)+360(3\beta_1(1+\beta_1)+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2+3\beta_1(3+8\beta_1)\right]$$

LITERATURA

1. Brebbia C.A., Dominquez J.: Boundary elements. An intoductory course, McGraw-Hill Comp., 1989.
2. Giżejowski M. A.: Modele obliczeniowe stalowych ram płaskich z węzłami podatnymi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Prace Naukowe – Budownictwo, z.136, Warszawa 2000.

3. Kleiber M.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum, PWN, Warszawa – Poznań 1985.
4. Mechanika budowli - ujęcie komputerowe, t. 2, (wyd. zbiorowe pod red. G. Rakowskiego), Arkady, Warszawa 1992.
5. Reddy J. N.: Applied functional analysis and variational methods in engineering, McGrew–Hill Comp., 1986.
6. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: Stability of structures by finite element methods, Elsevier 1994.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik

Abstract

In the paper, the stiffness matrix and geometrical matrix for the beam element with semi-rigid connections is derived. The formulation of the finite-element Ritz model is applied. The exact shape functions being the solution of the boundary-value problem are used. The nonlinear eigevalue problem is formulated and consistently linearized.