

Roman JASKULSKI*

Politechnika Warszawska, Instytut Budownictwa w Płocku

ZASTOSOWANIE METOD SYMULACYJNYCH W ZAGADNIENIACH INŻYNIERSKICH

Streszczenie. Praca dotyczy analizy probabilistycznej funkcji wielu zmiennych losowych z zastosowaniem metod symulacyjnych. Przedstawiono przykłady analizy sumy i iloczynu dwóch zmiennych losowych oraz model opisujący moment niszczący zginanych belek żelbetowych. Uzyskane wyniki porównano z wynikami obliczonymi metodą momentów. Stwierdzono pełną zgodność dwóch pierwszych parametrów rozkładu (tj. wartości średniej i odchylenia standardowego) oraz pewne rozbieżności dotyczące współczynnika skośności.

APPLICATION OF SIMULATION METHODS IN ENGINEERING PROBLEMS

Summary. The article deals with the probabilistic analysis of functions of many random variables using the simulation method. The examples of the analysis performed for the functions of sum and product of two random variables and for the model of the ultimate strength of reinforced concrete sections under bending have been presented. The comparison of the obtained results with the results calculated using the moment method has shown full agreeability of the first two parameters (mean value and standard deviation) and certain differences in estimating the skewness coefficient.

1. Wprowadzenie

Większość zjawisk zachodzących w przyrodzie należy traktować jako losowe, a więc takie, których parametry początkowe i końcowe nie są zdeterminowane, lecz mogą przyjmować dowolne wartości z określonym prawdopodobieństwem. Przyjmując to założenie, wszystkie zjawiska i procesy spotykane w praktyce inżynierskiej można podzielić dodatkowo na takie, których losowy charakter przejawia się w sposób bezpośredni oraz takie, których prawdziwą naturę przesłania złuda opisujących je deterministycznych modeli matematycznych.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jan Pawlikowski, prof. ITB i PW.

Do pierwszej grupy zaliczyć można np. zmienność wytrzymałości betonu, którą daje się zauważyć już wśród próbek pobranych z jednego zarobu. Losowy charakter wytrzymałości został częściowo uwzględniony w zapisach normy [5] w postaci zaczerpniętych z rachunku prawdopodobieństwa wzorów określających jej wartość średnią oraz odchylenie standardowe. Do drugiej grupy zaliczyć można takie parametry konstrukcji inżynierskich, jak: nośność przekrojów, sztywność, odkształcenia oraz oddziaływania, jakim podlegają. Nie zawsze uświadamiamy sobie ich losowy charakter obliczając ich wartości z gotowych formuł. Złudne przekonanie o ich deterministycznej naturze jest wynikiem powszechnego stosowania w projektowaniu metod półprobabilistycznych, które choć oparte są na fundamentach rachunku prawdopodobieństwa, sprowadzają się jedynie do obliczania konkretnych (tzw. obliczeniowych) wartości i ich porównaniu z wartościami dopuszczalnymi.

Zastosowanie w projektowaniu metod ściśle probabilistycznych wymaga odpowiedzi na następujące pytanie: jak przekłada się zmienność danych wejściowych na wartości wyjściowe dla przyjętego modelu obliczeniowego? Odpowiedzi dostarczyć mogą metody rachunku prawdopodobieństwa, w szczególności zaś metody symulacyjne, których zastosowanie zostało bliżej omówione w niniejszej pracy.

2. Metody symulacyjne

Metody symulacyjne, zwane także metodami Monte Carlo, są wygodnym narzędziem stosowanym m.in. w analizie niezawodności konstrukcji. Dwa podstawowe założenia warunkujące ich stosowanie to sformułowanie modelu obliczeniowego w postaci deterministycznej funkcji wiążącej ze sobą parametry wejściowe, której postać ogólną przedstawia wzór (1)

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (1)$$

gdzie:

X_i – zmienne losowe,

C_i – parametry stałe

oraz znajomość parametrów i typów rozkładów występujących we wzorze zmiennych.

Ogólny algorytm metod symulacyjnych przedstawia się następująco:

- wygenerowanie ciągów niezależnych liczb losowych dla każdej zmiennej występującej w modelu obliczeniowym według ustalonego dla niej wcześniej rozkładu,

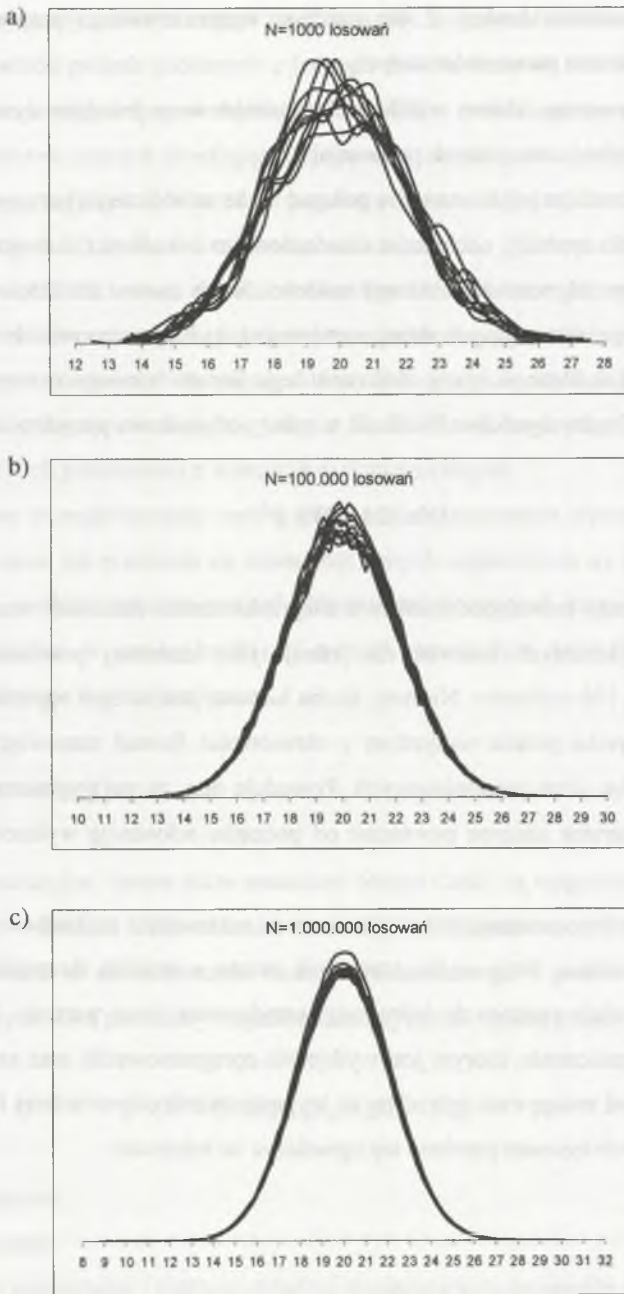
- obliczenie wartości funkcji Z dla każdego wygenerowanego zestawu zmiennych z uwzględnieniem parametrów stałych,
- analiza otrzymanego zbioru wyników, który traktowany jest jako dyskretny rozkład zmiennej losowej o nieznanym parametrach.

Wspomniana w ostatnim punkcie analiza polegać może na obliczeniu parametrów rozkładu funkcji Z (tj. wartości średniej, odchylenia standardowego i skośności) lub określeniu prawdopodobieństwa nieprzekroczenia założonej wartości, które można zdefiniować jako iloraz liczby wyników nieprzekraczających danej wartości (n) do liczby wszystkich wyników (N). Uzyskanie wysokiej dokładności przy obliczaniu tego ilorazu wymaga zazwyczaj dysponowania bardzo dużą liczbą wyników. Wielkość ta zależy od wartości prawdopodobieństwa p i według [7] wynosi:

$$N \geq (25 \div 100) p^{-1} \quad (2)$$

Oznacza to, że przy prawdopodobieństwie nieprzekroczenia założonej wartości równym np. 10^{-6} liczba wykonanych losowań dla jednej tylko zmiennej powinna zawrzeć się w zakresie od 25 do 100 milionów. Niestety, liczba losowań jest na ogół ograniczona od góry. Ograniczenie to wynika przede wszystkim z okresowości formuł stanowiących podstawę działania generatorów liczb pseudolosowych. Powoduje ona, że po wygenerowaniu pewnej liczby wartości generator zaczyna powtarzać od początku sekwencję wylosowanych wcześniej liczb.

W przypadku analizy polegającej na wyznaczeniu parametrów rozkładu liczba wyników może być znacznie niższa. Staje się to szczególnie istotne w analizie skomplikowanych modeli zawierających wiele zmiennych, które mogą przyjmować różne wartości. Pojawia się tu bowiem kolejne ograniczenie, którym jest wydajność oprogramowania oraz zestawu komputerowego. Biorąc pod uwagę czas potrzebny na wygenerowanie odpowiedniej ilości wyników liczbę wykonywanych losowań powinno się ograniczyć do minimum.



Rys. 1. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa otrzymane przy: a) 1000 losowań, b) 100 000 losowań i c) 1 000 000 losowań

Fig. 1. Probability density functions obtained for: a) 1000 results, b) 100 000 results and c) 1 000 000 results

3. Cel i zakres badań

Wobec powyższych stwierdzeń istotną sprawą staje się wyznaczenie optymalnej liczby przeprowadzanych losowań. Jest to wskazane również dlatego, że wraz ze zwiększaniem się tej liczby zmienność parametrów wygenerowanej próby maleje w coraz mniejszym stopniu tak, że wykonanie większej liczby symulacji nie gwarantuje uzyskania proporcjonalnie większej dokładności wyników.

Sytuację tę najlepiej ilustruje rysunek 1. Przedstawiono na nim uzyskany z wykorzystaniem metod symulacyjnych rozkład gęstości prawdopodobieństwa o wartości średniej $z=20$ i odchyleniu standardowym $\sigma=2,12$ wygenerowany dla trzech wartości liczby losowań. Dla każdej wartości wykonano 10 symulacji, których wyniki naniesiono na jeden wykres w postaci krzywych. Na wykresach wyraźnie widać, że przy liczbie losowań równej 1000 otrzymane krzywe charakteryzują się dużą zmiennością. Wartości średnie oscylują w okolicach wartości oczekiwanej, jednak zakres tych oscylacji jest szeroki. Dla wartości 100 000 losowań krzywe aproksymujące rozkład są znacznie bardziej zbieżne. Wyraźnie zawęża się zakres zmienności wartości średnich. Pewne załamania występujące na wierzchołkach krzywych wynikają z niedoskonałości odwzorowania wyników. Dla 1 000 000 losowań krzywe ulegają dalszemu wygładzeniu, a w wielu miejscach pokrywają się.

Na podstawie tej pobieżnej analizy można wysnuć wniosek, że optymalna do oszacowania parametrów wynikowego rozkładu liczba losowań zawiera się w przedziale od 10^5 do 10^6 . W celu potwierdzenia tak postawionej tezy przeprowadzono badanie polegające na symulacji rozkładów trzech funkcji zmiennych losowych i analizie ich wyników. Pierwsze dwie funkcje, wyrażone wzorami (3) i (4), opisują proste operacje arytmetyczne na zmiennych wejściowych, trzecia zaś (5) jest modelem obliczeniowym nośności zginanego przekroju żelbetowego zawartym w pracy [2].

$$Z = X + Y \quad (3)$$

$$Z = X * Y \quad (4)$$

$$Z = 0,5(1 - \exp(-2,5\alpha)) b d^2 f_{cm} \quad (5)$$

gdzie:

$$\alpha = (f_{ym} A_s) / (b d f_{cm})$$

- oznaczenia wg [4].

Jako dane wejściowe przyjęto zmienne losowe opisane rozkładami normalnymi. Ich parametry dla funkcji (3) i (4) zestawiono w tablicach 1 i 2; są to kolejno: wartości oczekiwane,

odchylenia standardowe i współczynniki skośności. Do symulacji funkcji (5) przyjęto przekrój o wymiarach 20 x 40 cm zbrojony stalą A-II ($f_{ym} = 415$ [MPa]). Współczynniki zmienności przyjęto na poziomie odpowiednio: 0,03 dla wymiarów i 0,088 dla wytrzymałości stali. Parametry rozkładów przyjęte dla pozostałych danych, tj. pola powierzchni stali oraz klasy betonu, zestawiono w tablicy 3.

Tablica 1

Parametry danych wejściowych do analizy funkcji (3)

| Nr zestawu | funkcja: $Z = X+Y$ | | |
|------------|--------------------|----------------------|------------|
| | \bar{x}, \bar{y} | σ_x, σ_y | a_x, a_y |
| 1 | 100 | 1,5 | 0,015 |
| 2 | 10 | 1,5 | 0,15 |
| 3 | 1 | 1,5 | 1,5 |

Tablica 2

Parametry danych wejściowych do analizy funkcji (4)

| Nr zestawu | funkcja: $Z = X*Y$ | | |
|------------|--------------------|----------------------|------------|
| | \bar{x}, \bar{y} | σ_x, σ_y | a_x, a_y |
| 1 | 14 | 0,21 | 0,015 |
| 2 | 4,5 | 0,68 | 0,15 |
| 3 | 1,4 | 2,1 | 1,5 |

Tablica 3

Parametry danych wejściowych do analizy funkcji (5)

| Nr zestawu | funkcja: $Z = 0,5(1 - \exp(-2,5\alpha))bd^2f_{cm}$ | | | |
|------------|--|----------|----------|----------|
| | A_{sm} | v_{As} | f_{cm} | v_{fc} |
| 1 | 3,7 cm ² | 0,01 | 20 MPa | 0,11 |
| 2 | 11,1 cm ² | 0,01 | 38 MPa | 0,11 |
| 3 | 22,2 cm ² | 0,01 | 48 MPa | 0,11 |

Symulacje przeprowadzone zostały z wykorzystaniem specjalnie w tym celu opracowanego programu komputerowego napisanego w języku Turbo Pascal 6.0. Wykorzystano w nim symulator liczb pseudolosowych ULTRA stanowiący integralną część pakietu Borland Turbo Pascal. Dane do programu wprowadzane były z przygotowanych wcześniej plików tekstowych. Wyniki zapisywane były również w plikach tekstowych, które poddane zostały analizie za pomocą specjalnie w tym celu opracowanego oprogramowania.

Symulacje przeprowadzono dla 1000, 10 000, 100 000 oraz 1 000 000 losowań i trzech zestawów danych. W przypadku dwóch pierwszych funkcji dane wejściowe zostały zróżnicowane pod względem wartości współczynnika zmienności, który mógł mieć wpływ na uzyski-

Tablica 4

Zestawienie wyników symulacji funkcji (3)

| Funkcja: $Z = X+Y$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|---|---------|------------|------------|--|-------|-----------|---------|---|------------|---------|-------|-----------|---------|------------|------------|--------|-------|
| Liczba losowań | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 0,015$ | | | | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 0,15$ | | | | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 1,5$ | | | | | | | | | |
| | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a |
| 1000 | 200,23 | 0,00148 | 2,1040 | 0,02600 | 0,0391 | ----- | 19,978 | 0,00397 | 2,1229 | 0,02160 | 0,0309 | ----- | 2,0009 | 0,02590 | 2,0967 | 0,01100 | 0,0414 | ----- |
| 10000 | 200,00 | 0,00010 | 2,1158 | 0,00420 | -0,0053 | ----- | 19,999 | 0,00083 | 2,1188 | 0,00584 | -0,0101 | ----- | 1,9900 | 0,01124 | 2,1207 | 0,00477 | 0,0135 | ----- |
| 100000 | 200,00 | 0,00002 | 2,1216 | 0,00236 | -0,0027 | ----- | 20,003 | 0,00040 | 2,1208 | 0,00173 | -0,0005 | ----- | 2,0002 | 0,00373 | 2,1216 | 0,00185 | 0,0021 | ----- |
| 1000000 | 200,00 | 0,00001 | 2,1206 | 0,00051 | -0,0017 | ----- | 20,000 | 0,00009 | 2,1211 | 0,00056 | -0,0003 | ----- | 2,0016 | 0,00106 | 2,1215 | 0,00090 | 0,0004 | ----- |

Tablica 5

Zestawienie wyników symulacji funkcji (4)

| Funkcja: $Z = X*Y$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|---|---------|------------|------------|--|---------|-----------|---------|---|------------|--------|---------|-----------|---------|------------|------------|--------|--------|
| Liczba losowań | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 0,015$ | | | | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 0,15$ | | | | współczynniki zmienności: $v_X = v_Y = 1,5$ | | | | | | | | | |
| | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a |
| 1000 | 195,93 | 0,00073 | 4,1938 | 0,02210 | 0,0485 | 1,42000 | 20,323 | 0,00632 | 4,3729 | 0,02100 | 0,3382 | 0,19500 | 1,9497 | 0,13100 | 5,9960 | 0,05560 | 1,0764 | 0,2300 |
| 10000 | 196,02 | 0,00019 | 4,1570 | 0,00630 | 0,0283 | 0,97600 | 20,249 | 0,00189 | 4,3404 | 0,00798 | 0,3032 | 0,04910 | 1,9592 | 0,02670 | 6,0679 | 0,00950 | 1,0143 | 0,0926 |
| 100000 | 195,99 | 0,00005 | 4,1569 | 0,00212 | 0,0308 | 0,22100 | 20,250 | 0,00068 | 4,3522 | 0,00224 | 0,3132 | 0,02591 | 1,9531 | 0,01120 | 6,0603 | 0,00415 | 1,0249 | 0,0215 |
| 1000000 | 196,00 | 0,00002 | 4,1580 | 0,00070 | 0,0319 | 0,07310 | 20,251 | 0,00017 | 4,3538 | 0,00072 | 0,3169 | 0,00821 | 1,9610 | 0,00288 | 6,0595 | 0,00109 | 1,0266 | 0,0127 |

Tablica 6

Zestawienie wyników symulacji funkcji (5)

| Funkcja: $Z = 0,5(1 - \exp(-2,5\alpha)bd^2f_{cm})$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|---------|------------|------------|---|---------|-----------|---------|---|------------|---------|--------|-----------|---------|------------|------------|---------|--------|
| Liczba losowań | $A_{sm} = 3,70 \text{ cm}^3 f_{cm} = 20 \text{ MPa}$ | | | | $A_{sm} = 11,10 \text{ cm}^3 f_{cm} = 38 \text{ MPa}$ | | | | $A_{sm} = 22,20 \text{ cm}^3 f_{cm} = 48 \text{ MPa}$ | | | | | | | | | |
| | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a | \bar{z} | v_Z | σ_Z | v_σ | az | v_a |
| 1000 | 0,06238 | 0,00485 | 0,00541 | 0,02100 | 0,05419 | 1,36000 | 0,17408 | 0,00187 | 0,01467 | 0,01690 | 0,09025 | 0,8580 | 0,31168 | 0,00318 | 0,02598 | 0,01890 | 0,06605 | 1,1600 |
| 10000 | 0,06241 | 0,00067 | 0,00543 | 0,00695 | 0,05721 | 0,36100 | 0,17415 | 0,00073 | 0,01475 | 0,00534 | 0,09442 | 0,2020 | 0,31187 | 0,00091 | 0,02597 | 0,00757 | 0,10259 | 0,1120 |
| 100000 | 0,06239 | 0,00023 | 0,00543 | 0,00248 | 0,06314 | 0,11100 | 0,17421 | 0,00024 | 0,01476 | 0,00272 | 0,07662 | 0,0888 | 0,31203 | 0,00020 | 0,02597 | 0,00246 | 0,10060 | 0,0908 |
| 1000000 | 0,06240 | 0,00005 | 0,00544 | 0,00005 | 0,06117 | 0,03330 | 0,17421 | 0,00008 | 0,01475 | 0,00079 | 0,07672 | 0,0211 | 0,31203 | 0,00009 | 0,02599 | 0,00102 | 0,10260 | 0,0327 |

wane wyniki. W trzeciej funkcji współczynniki zmienności pozostały na stałym poziomie przyjętym na podstawie literatury [1, 2]. Dla każdego zestawu danych i przyjętej liczby losowań wykonano serię 10 symulacji. Wyniki każdej symulacji poddawane były analizie polegającej na obliczeniu wartości średniej, odchylenia standardowego i skośności, jak dla dyskretnego rozkładu ciągłej zmiennej losowej. Obliczane wielkości uśredniano w obrębie jednej serii i określano ich współczynnik zmienności. Wyniki analiz zamieszczono w tablicach 4, 5 oraz 6. W tablicy 7 umieszczono dla porównania wartości obliczone według metody momentów.

Tablica 7

Wyniki obliczeń wg metody momentów

| Parametr | Z = X+Y | | | Z = X*Y | | | Z = 0,5(1-exp(-2,5α))bd ² f _{cm} | | |
|----------------|--|---|--|--|---|--|--|--|--|
| | v _x , v _y = 0,015 | v _x , v _y = 0,15 | v _x , v _y = 1,5 | v _x , v _y = 0,015 | v _x , v _y = 0,15 | v _x , v _y = 1,5 | A _{sm} = 3,7cm ² f _{cm} = 20 Mpa | A _{sm} = 11,1cm ² f _{cm} = 38 MPa | A _{sm} = 22,2cm ² f _{cm} = 48 MPa |
| Z | 200 | 20 | 2 | 196 | 20,25 | 1,96 | 0,06244 | 0,17462 | 0,31419 |
| σ _Z | 2,1213 | 2,1213 | 2,1213 | 4,158 | 4,3521 | 6,061 | 0,00536 | 0,01451 | 0,02537 |
| a _Z | 0 | 0 | 0 | 0,0318 | 0,3151 | 1,0272 | 0,04937 | 0,08509 | 0,19274 |

W tablicy 4, w części dotyczącej współczynnika skośności, zrezygnowano z obliczania zmienności tego parametru. Jest to konsekwencją faktu, że funkcja (3) jest liniowa, a zmienne losowe stanowiące jej dane wejściowe są opisane rozkładem normalnym. Zgodnie z Centralnym Twierdzeniem Granicznym funkcja ta opisana będzie również rozkładem normalnym, dla którego skośność przyjmuje wartość 0.

4. Wnioski

Analiza wyników wyraźnie wykazuje, że wraz ze wzrostem liczby wykonywanych losowań maleje rozrzut parametrów otrzymywanych w ich wyniku rozkładów. Tendencję tę widać wyraźnie nie tylko w przypadku prostych funkcji dwóch zmiennych (zarówno liniowej, jak i nieliniowej), ale również dla dość skomplikowanej funkcji pięciu zmiennych.

Rozpatrując dwa pierwsze momenty rozkładu (tj. wartość średnią i odchylenie standardowe) można przyjąć, że optymalną liczbą losowań wystarczającą do ich precyzyjnego wyznaczenia jest 10⁴. Przy takiej liczbie losowań zmienność parametrów rozkładu nie przekracza praktycznie wartości 0,01, zatem utrzymuje się na bardzo niskim poziomie. Za reprezentatywne można uznać wyniki uzyskane już z jednokrotnie wykonanej symulacji.

Sytuacja ulega zmianie, gdy weźmiemy pod uwagę trzeci parametr rozkładu, tj. skośność. Zmienność współczynnika skośności osiąga akceptowalne wielkości dopiero przy liczbie losowań wynoszącej 10^6 . Nawet jednak wtedy zmienność ta nie osiąga poziomu uzyskanego dla dwóch pierwszych momentów. Podane przykłady pokazują, że parametr ten jest dosyć niestabilny. W przypadku wyznaczania dokładnej wartości współczynnika skośności wydaje się celowe wykonanie serii co najmniej dziesięciu symulacji i uśrednienie ich wyników. Otrzymana w ten sposób wartość będzie bardziej reprezentatywna. Współczynnik skośności okazał się też parametrem, którego wartości wygenerowane przy bardziej skomplikowanej postaci funkcji nie wykazały zbieżności z wartościami obliczonymi według metody momentów. W tej sytuacji jako wartości ściśle należy przyjąć wyniki z obliczeń symulacyjnych. Wartości obliczane według metody momentów w przypadkach skomplikowanych funkcji nieliniowych mogą być obciążone niedokładnością rozwinięcia funkcji w szereg Taylora.

Podsumowując można stwierdzić, że przytoczone przykłady wskazują na możliwość efektywnego wykorzystywania metod symulacyjnych do analizy zagadnień inżynierskich związanych z prognozowaniem parametrów rozkładu funkcji wielu zmiennych losowych.

LITERATURA

1. Koper W., Kubissa J.: O wskaźnikach zmienności wytrzymałości współczesnych betonów konstrukcyjnych. „Inżynieria i Budownictwo”, nr 4, r. 2001, s. 235-238.
2. Pawlikowski J.: Analiza probabilistyczna zapasu bezpieczeństwa żelbetowych elementów zginanych. Studia z zakresu inżynierii, z. 25, 1987, s. 87-106.
3. Pawlikowski J.: Kalibracja częściowych współczynników bezpieczeństwa. Praca naukowo-badawcza nr 2.1.1.2 NN-2/93 wykonana w ITB. Warszawa 1993. (Materiały niepublikowane).
4. PN-B-03264:1999: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
5. PN-B-06250:1988: Beton zwykły.
6. Tichý M.: Applied methods of structural reliability. Kluwer Academic Publisher 1993.

7. Woliński Sz., Wróbel K.: Niezawodność konstrukcji budowlanych. Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 2000.
8. Zieliński R.: Wytwarzanie losowości. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne XXIX (1992), s. 189-203.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. PŚI

Abstract

The article deals with the probabilistic analysis of functions of many random variables using the simulation method. The examples of the analysis performed for the functions of sum and product of two random variables and for the model of the ultimate strength of reinforced concrete sections under bending have been presented. The comparison of the obtained results with the results calculated with using the moment method has shown full agreeability of the first two parameters (mean value and standard deviation) and certain differences in estimating the skewness coefficient.