

Andrzej ŚWIERNIAK

Joanna POLAŃSKA

SYNTEZA REGULATORA METODĄ PRZESTRZENI  $H^\infty$   
DLA PRZEDZIAŁAMI LINEARYZOWANEGO MODELU SAMOLOTU\*

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono propozycję zastosowania metod opartych na aparacie  $H^\infty$  do syntezy układu sterowania obiektem o złożonej dynamice. Przedstawiono podstawowe możliwości tych metod i wynikające z nich algorytmy.

H-INFINITY BASED CONTROLLER SYNTHESIS  
FOR PARTIALLY LINEARIZED AIRPLANE MODEL

**Summary.** The paper is devoted to the  $H^\infty$  theory based idea of the solution to the controller synthesis problem for a system with complicated dynamics, for example an airplane.

The controller designed with  $H^\infty$  methods for the airplane model linearized around a stationary point is a robust one and it should assure proper behavior of the system even for large deviations.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ ПРОСТРАНСТВА  $H^\infty$  ДЛЯ ОТРЕЗКАМИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ  
МОДЕЛИ САМОЛЕТА

**Резюме.** В работе представлено предложение применения методов основанных на аппарате пространства  $H^\infty$  для синтеза системы управления объектом со сложной динамикой. Показаны основные возможности этих методов и вытекающие из них алгоритмы.

\*Praca częściowo finansowana z programu CTBP 02.13 a częściowo z programu PRI.02 oraz grantu BK 301.

## 1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach daje się zauważyć znaczny wzrost zainteresowania metodami częstotliwościowymi w projektowaniu układów sterowania. Ten nawrót do "klasycznej" dziedziny teorii regulacji wynika z jakościowo nowej roli komputera we wspomaganiu projektanta systemu związanej z powszechną dostępnością, znaczną mocą obliczeniową i przyjaznym oprogramowaniem komputerów osobistych oraz kolosalnymi możliwościami minikomputerów. Fakt ten umożliwił zastosowanie aparatu matematycznego dotychczas uważanego za domenę teoretyków do tworzenia metod syntezy układów sterowania wykorzystujących komputer jako środek wspomagający projektowania. Taki aparat stanowi teoria przestrzeni Hardy'ego  $H^\infty$ , która począwszy od pionierskiej pracy Zamesa [21] stanowi podstawę znacznej liczby prac dotyczących odpornych układów sterowania. Po początkowym zastosowaniu do analizy i syntezy układów jednowymiarowych (SISO) stabilnych w stanie otwartym (np. [21; 11; 7]), rozszerzono zakres zastosowań do układów SISO z biegunami niestabilnymi ([22; 5]) i układów wielowymiarowych (MIMO) np.: [6; 8; 3; 4; 1; 19; 2; 5]. Projektowane układy regulacji mają na celu zapewnienie odporności na zakłócenia [2; 5; 21; 22] i błędy modelowania [21; 6; 7; 12; 3], a także optymalizację [1; 6; 15; 5] i redukcję rzędu modelu [9; 10]. Sygnalizowane są również zastosowania praktyczne [16], na razie w formie studialnych prac projektowych z wykorzystaniem pakietów CAD. W pracach tych zakłada się znajomość zlinearyzowanego modelu rzeczywistego w określonym punkcie pracy i korzystając z oporności układu regulacji projektowanego metodą przestrzeni  $H^\infty$  stosuje się go w całym zakresie zmian wielkości wejściowych. W przypadku jednak, gdy wraz ze zmianą punktu pracy dynamika modelu zlinearyzowanego zmienia się zbyt mocno, racjonalną wydaje się okresowa zmiana modelu nominalnego. Taka sytuacja występuje np.: w przypadku problemu sterowania samolotem w celu utrzymania go na pożądanej trajektorii często nie znanej a priori. Celem tej pracy jest przedstawienie koncepcji syntezy regulatora dla obiektu takiego typu przy wykorzystaniu metodyki przestrzeni  $H^\infty$  i zasygnalizowania dużych możliwości, jakie daje ta metoda.

## 2. PODSTAWOWE INFORMACJE O SYNTEZIE METODĄ $H^\infty$

Z uwagi na brak publikacji w języku polskim omawiających problem syntezy układów regulacji oparty na przestrzeniach  $H^\infty$  w rozdziale tym przedstawiona

zostanie jedna z metod zaproponowana przez Francisca [5; 6; 8], która w dalszej części artykułu zostanie wykorzystana do sformułowania problemu syntezy regulatora dla modelu samolotu. W celu łatwiejszego zrozumienia przedstawione zostaną wykorzystywane elementy z zakresu analizy funkcjonalnej i przestrzeni funkcyjnych.

### 2.1. Podstawowe pojęcia teorii przestrzeni Hardy'ego

Przestrzeń  $H^\infty$  tworzą funkcje zmiennej zespolonej  $F(s)$ , które są analityczne w prawej półpłaszczyźnie  $\text{Re } S > 0$  i przyjmują wartości w przestrzeni  $C^{n \times m}$  oraz są ograniczone w prawej półpłaszczyźnie  $\text{Re } s > 0$ , tzn.

$$\sup \{ \|F\| : \text{Re } s > 0 \} < \infty \quad (1)$$

Lewa strona nierówności (1) definiuje normę  $F(s)$  w przestrzeni  $H^\infty$

$$\|F\|_\infty := \sup \{ \|F(s)\| : \text{Re } S > 0 \} \quad (2)$$

$RH^\infty$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $H^\infty$  i składa się z funkcji zespolonych o rzeczywistych współczynnikach, właściwych i stabilnych. Korzystając z zasady maksimum dla funkcji analitycznych [13] można w równaniu (2) zastąpić otwartą prawą półpłaszczyznę przez oś  $s = j\omega$

$$\|F\|_\infty = \sup \{ \|F(j\omega)\| : \omega > 0 \} \quad (3)$$

Przestrzeń  $C^{n \times m}$  składa się z macierzy zespolonych o wymiarach  $n \times m$ . Definiuje się normę elementu należącego do  $C^{n \times m}$  jako największą wartość singularną tej macierzy

$$\|F\|_\infty := \sup \left\{ \left( \sigma_{\max} [F^* F] \right)^{1/2} : \omega > 0 \right\} \quad (4)$$

Przestrzeń  $H^2$  jest przestrzenią sygnałów i składa się z funkcji zmiennej zespolonej  $u(s)$ ,  $s = c + j\omega$ ,  $\text{Re } S > 0$ , przyjmujących wartości w  $C^n$ . Każda



funkcja  $u(s)$  jest funkcją analityczną w prawej półpłaszczyźnie i w niej ograniczona w sensie całki z kwadratu, tzn.

$$\left[ \sup \left\{ (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(c+j\omega)\|^2 d\omega : c > 0 \right\} \right]^{1/2} < \infty \quad (5)$$

Definiuje się normę tej przestrzeni w postaci

$$\|u\|_2 := \left[ \sup \left\{ (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(c+j\omega)\|^2 d\omega : c > 0 \right\} \right]^{1/2} \quad (6)$$

$\mathbb{R}H^2$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $H^2$  i składa się z funkcji zespolonych o rzeczywistych współczynnikach, właściwych i stabilnych. Korzystając z zasady maksimum dla funkcji analitycznych [13] można, podobnie jak poprzednio, przekształcić (6) otrzymując

$$\|u\|_2 := \left[ \sup \left\{ (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)\|^2 d\omega : \omega > 0 \right\} \right]^{1/2} \quad (7)$$

Przestrzeń  $C^n$  jest przestrzenią Hilberta ze zdefiniowanym iloczynem skalarnym:

$$\langle x, y \rangle = x \overset{\bullet}{\cdot} y \quad (8)$$

gdzie  $x$  i  $y$  są wektorami kolumnowymi, a symbol  $\overset{\bullet}{\cdot}$  oznacza operację sprzężonej transpozycji. Norma w tej przestrzeni jest określona przez:

$$\|x\| = (x \overset{\bullet}{\cdot} x)^{1/2} \quad (9)$$

Działanie operatora  $F \in H^\infty$  na elementy przestrzeni  $H^2$  jest rozumiane w sensie iloczynu, tzn.

$$\overset{\wedge}{FH^2} = \{F \cdot x : x \in H^2\} \quad (10)$$

**Twierdzenie 1 [5]**

Przestrzeń  $H^2$  jest przestrzenią transformat Laplace'a sygnałów należących o przestrzeni  $L_2[0, \infty)$ , tzn. sygnałów o ograniczonej energii dla  $t \geq 0$ .

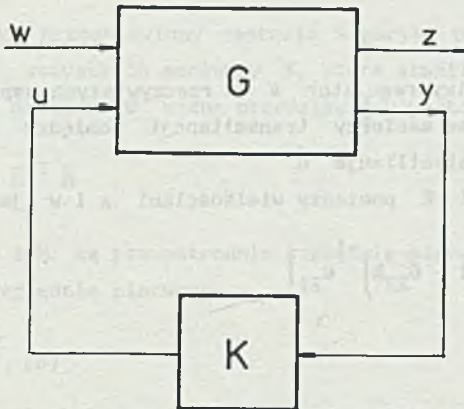
**Twierdzenie 2 [5], [6]**

Dla  $F \in H^\infty$

$$\bigwedge_{FH^2 \in H^2} \|F\|_\infty \sup \{ \|F \cdot x\|_\infty : x \in H^\infty, \|x\|_2 = 1 \} \quad (11)$$

**2.2. Sformułowanie problemu syntezy**

Zadanie syntezy regulatora można sprowadzić do doboru parametrów w standardowej konfiguracji [6] przedstawionej na rys. 1.



Rys. 1. Standardowa konfiguracja dla problemu syntezy  
 Fig. 1. The standard configuration for synthesis problem

Sygnały  $w$ ,  $u$ ,  $z$ ,  $y$  są sygnałami wektorowymi:

$w$  - jest wymuszeniem zewnętrznym, np. wartością zadaną, zakłóceniem lub szumami pomiarowymi;

$u$  - jest sygnałem sterującym;

$z$  - jest wyjściowym sygnałem charakteryzującym jakość regulacji, np. uchybem nadążania;

$y$  - jest sygnałem wyjściowym obiektu.

Zakłada się, że macierze transmitancji  $G$  i  $K \in RH^{\infty}$ ;  $G$  reprezentuje obiekt, natomiast  $K$  regulator.

Można przedstawić macierz transmitancji  $G$  jako

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

wtedy schematowi z rys. 1 odpowiada następujący układ równań:

$$\begin{cases} z = G_{11}w + G_{12}u \\ y = G_{21}w + G_{22}u \\ u = Ky \end{cases} \quad (13)$$

Należy znaleźć właściwy regulator  $K$  o rzeczywistych współczynnikach minimalizujący  $H^{\infty}$  - normę macierzy transmitancji pomiędzy sygnałami  $w$  i  $z$  przy założeniu, że  $K$  stabilizuje  $G$ .

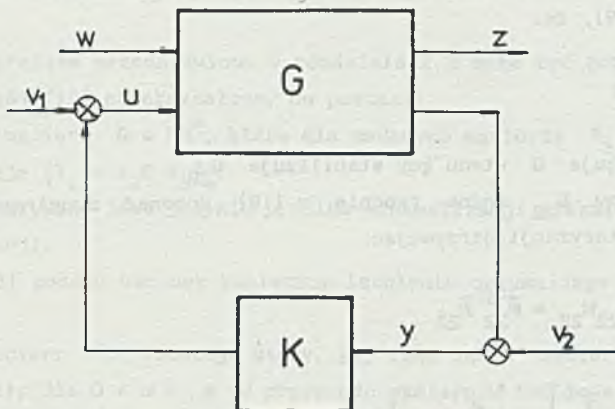
Macierz transmitancji  $E$  pomiędzy wielkościami  $z$  i  $w$  jest funkcją  $K$ :

$$E = \begin{bmatrix} G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} & G_{21} \end{bmatrix} \quad (14)$$

#### Uwaga

Stwierdzenie, że  $K$  stabilizuje  $G$  rozumiane jest w sensie wewnętrznej stabilności układu, tzn. po wprowadzeniu do systemu dwóch dodatkowych sygnałów  $v_1$  i  $v_2$  (jak pokazano na rys. 2) wymaga się, by wszystkie macierze transmitancji pomiędzy  $w$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  a  $z$ ,  $u$ ,  $y$  były właściwe i stabilne (tzn.  $\in RH^{\infty}$ ).





Rys. 2. Schemat dla badania stabilności wewnętrznej układu

Fig. 2. Scheme for inner stability system checking

### 2.3. Problem stabilizacji

W rozdziale tym przedstawiony zostanie algorytm parametryzacji poprzez parametr  $Q \in RH^\infty$  wszystkich macierzy K, które stabilizują G.

Zgodnie z [18] macierz G można przedstawić w postaci:

$$G = N M^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad (15)$$

gdzie macierze N i M są prawostronnie względnie pierwsze, a macierze  $\tilde{N}$  i  $\tilde{M}$  są lewostronnie względnie pierwsze.

#### Twierdzenie 1 [5], [6]

Macierz G jest stabilizowalna (tzn. istnieje właściwe o rzeczywistych współczynnikach K, które stabilizuje G) wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1) M, [0] N są prawostronnie względnie pierwsze;  
 M,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  są lewostronnie względnie pierwsze;
- 2)  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$   $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  są lewostronnie względnie pierwsze;  
 $\tilde{M}$ , [0 1]  $\tilde{N}$  są prawostronnie względnie pierwsze.

Zakłada się w dalszej części pracy, że  $G$  jest stabilizowalne. Można pokazać [5; 6; 8], że:

### Twierdzenie 2

$K$  stabilizuje  $G$  wtedy gdy stabilizuje  $G_{22}$ .

Dla macierzy  $G_{22}$  można zgodnie z [18] dokonać dwustronnie względnie pierwszej faktoryzacji otrzymując:

$$G_{22} = N_{22} M_{22} = \tilde{M}_{22}^{-1} \tilde{N}_{22} \quad (16a)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{22} & -\tilde{Y}_{22} \\ -\tilde{N}_{22} & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{22} & Y_{22} \\ N_{22} & X_{22} \end{bmatrix} = I \quad (16b)$$

Zgodnie z (16) macierz  $K$  można przedstawić w postaci sfaktoryzowanej:

$$K = U V^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U} \quad (17)$$

### Twierdzenie 3 [5]

Zbiór wszystkich (właściwych, o rzeczywistych współczynnikach)  $K$  stabilizujących  $G_{22}$  jest określony przez równania:

$$K = (Y_{22} - M_{22} Q)(X_{22} - N_{22} Q)^{-1} = \quad (18)$$

$$= (\tilde{X}_{22} - Q \tilde{N}_{22})^{-1} (Y_{22} - Q \tilde{M}_{22}), \quad Q \in RH^{\infty} \quad (19)$$

Wykorzystując równania (16a), (18)-(19) i przekształcając równanie (14) otrzymujemy:

$$E = T_1 - T_2 Q T_3 \quad (20)$$

$$T_1 = G_{11} + G_{12} M_{22} Y_{22} G_{21} \quad (21a)$$

$$T_2 = G_{12} M_{22} \quad (21b)$$

$$T_3 = \tilde{M}_{22}^{-1} G_{21} \quad (21c)$$



## 2.4. Problem optymalizacji

Podstawowy problem przedstawiony w rozdziale 2.2 może być przy użyciu parametryzacji (18)-(19) przekształcony do postaci:

Należy znaleźć macierz  $Q \in RH^\infty$ , która dla zadanych macierzy  $T_1$  ( $i = 1..3$ )  $\in RH^\infty$  minimalizuje  $\|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty$ .

Tym samym rozwiązywany jest jedynie problem minimalizacji niezależnie od problemu stabilizacji.

Francis w [5] podaje warunek konieczny istnienia optymalnego  $Q$  w postaci:

Optymalna macierz  $Q$  istnieje wtedy, gdy rząd dwóch macierzy  $T_2(j\omega)$  i  $T_3(j\omega)$  jest stały dla  $0 \leq \omega \leq \infty$ . W przypadku skalarnym istnieje kilka możliwości znalezienia  $Q_{opt}$  minimalizującego  $H^\infty$  - normę  $\|T_1 - T_3 Q T_3\|_\infty$ . Dla układów MIMO problem ten nie jest prosty do rozwiązania.

W niniejszej pracy proponuje się algorytm znajdowania suboptymalnego minimum normy dla zadanej tolerancji  $\epsilon$ .

Niech

$$\alpha = \inf \left\{ \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty : Q \in RH^\infty \right\} \quad (22)$$

Należy znaleźć górne ograniczenia  $\gamma$  dla  $\alpha$  takie, że:

$$\gamma - \alpha < \epsilon \quad (23a)$$

następnie należy znaleźć  $Q \in RH^\infty$  takie, że:

$$\|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty \leq \gamma \quad (23b)$$

Definiując:

$$T_2 = U_1 U_0 \quad (24a)$$

$$Y := (I - U_1 \tilde{U}_1) T_1 \quad (24b)$$

$$Y_0 = \gamma^2 - Y \tilde{Y} \quad (24c)$$

$$T_3 Y_0^{-1} = V_{co} V_{cl} \quad (24d)$$

$$Z := U_1^{-1} T_1 Y_0^{-1} (I - V_{ci}^{-1} V_{ci}) \quad (24e)$$

$$Z_\infty = I - Z Z^T \quad (24f)$$

$$R := Z_{co}^{-1} U_1^{-1} T_1 Y_0^{-1} V_{ci} \quad (24g)$$

przy czym

$$R, Y, Z \in RL^\infty \quad X \in RH^\infty;$$

$$F^{\sim}(s) = F(-s)^T$$

algorytm znajdowania  $Q_{\text{subopt}}$  można przedstawić w następującej postaci:

1. Oblicz  $Y, Y_\infty$
2. Znajdź górne ograniczenie  $\alpha_1$  dla  $\alpha$ ;  
np.  $\alpha_1 = T_1 \infty$
3. Wybierz próbną wartość  $\gamma$  z przedziału  $(Y_\infty, \alpha_1]$
4. Oblicz  $Z$  i  $Z_\infty$
5. Jeśli  $Z_\infty < 1$  to przejdź do następnego punktu, jeśli nie to zwiększ  $\gamma$  i powróć do punktu 4.
6. Oblicz  $R$  i  $\Gamma_R$ .

$$(\Gamma_R < 1) \Leftrightarrow (\alpha < \gamma)$$

w związku z czym odpowiednio zwiększ lub zmniejsz wartość  $\gamma$  i powróć do punktu 3. Jeśli  $\Gamma_R < 1$  to przejdź do następnego punktu.

Symbol  $\Gamma_R$  oznacza normę operatora Hankla zdefiniowanego dla macierzy  $R$ . Szczegółowy algorytm wyznaczania  $\Gamma_R$  znajduje się w [9], [10], [5], [18].

7. Znajdź macierz  $X \in RH^\infty$  taką, że  $R - X_\infty \leq 1$ . Algorytm znajdowania macierzy  $X$  dla określonego operatora  $\Gamma_R$  umieszczony jest w [1; 9; 10; 5].

8. Rozwiąż równanie

$$X = Z_{co}^{-1} U_0 Q V_{co} \quad \text{dla } Q \in RH^\infty$$

3. MODELE ROZWAŻANEGO OBIEKTU

W pracy rozpatrywany jest model samolotu opracowany w [14], a szczegółowo omówiony w [20]. Równania opisujące dynamikę analizowanego obiektu dadzą się przedstawić w postaci układu następujących różniczkowych równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{GS}(\phi, \nu, \psi) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (1a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T_{\Omega}(\phi, \nu) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_z \omega_y - v_y \omega_z \\ v_x \omega_z - v_z \omega_x \\ v_y \omega_x - v_x \omega_y \end{bmatrix} + D_{GS}(\phi, \nu, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{m} c(\delta_c, v_p, -z) \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ 0 \\ -\sin \epsilon \end{bmatrix} + \frac{1}{2m} \rho v_p^2 D_{SP}(\alpha, \beta) S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \quad (1c)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_x \\ \dot{c}_y \\ \dot{c}_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (J_x - J_y) \omega_y \omega_z / J_x \\ (J_x - J_z) \omega_x \omega_z / J_y \\ (J_y - J_x) \omega_y \omega_x / J_z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho v_p^2 D_{SP}(\alpha, \beta) J^{-1} L S \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (1d)$$



gdzie:

- $x, y, z$  - współrzędne środka ciężkości samolotu w układzie grawitacyjnym,  
 $V_x, V_y, V_z$  - składowe prędkości środka ciężkości samolotu,  
 $\phi, \nu, \psi$  - kąty przechylenia, pochylenia i odchylenia samolotu,  
 $D_{GS}$  - macierz transformacji układu grawitacyjnego w układzie samolotowym.

$$D_{GS} = D_{SG}$$

$$D_{SG} = \begin{bmatrix} \cos \nu \cos \phi & \cos \nu \cos \psi & -\sin \nu \\ \sin \phi \sin \nu \cos \psi & \sin \phi \sin \nu \cos \psi & \sin \phi \cos \nu \\ -\cos \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi & \\ \cos \phi \sin \nu \cos \psi & \cos \phi \sin \nu \cos \psi & \cos \phi \cos \nu \\ + \sin \phi \sin \psi & + \sin \phi \sin \psi & \end{bmatrix}$$

- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - prędkości kątowe przechylenia, pochylenia i odchylenia samolotu

- $T_{\Omega}$  - macierz transformacji prędkości kątowych

$$T_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \nu & \cos \phi \operatorname{tg} \nu \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi (\cos \nu, \cos \phi) & \cos \nu \end{bmatrix}$$

- $m$  - masa samolotu,

- $c$  - funkcja przedstawiająca zależności wielkości siły ciągu od sterowania  $\delta_c$ , prędkości  $V_p$  i wysokości  $-z$ ;

- $\epsilon$  - kąt określający kierunek działania siły ciągu względem osi  $OX$  samolotu,

- $\rho$  - gęstość powietrza na danej wysokości,

- $D_{SP}$  - macierz transformacji z układu związanego z przepływającym powietrzem w układ samolotowy wyrażona przez kąty  $\alpha$  i  $\beta$

$$D_{sp} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

S - macierz diagonalna współczynników mających wymiar powierzchni,  
 $c_x, c_y, c_z$  - wielkości te są funkcjami kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , ich pochodnych  $\dot{\alpha}$  i  $\dot{\beta}$ ,  
 prędkości kątowych  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , wielkości sterujących  $\delta_h, \delta_L, \delta_v$  oraz liczby  
 Macha i Reynoldsa. Funkcje  $c_x, c_y, c_z$  przyjmowane przy konstrukcji modelu są  
 aproksymacjami zależności eksperymentalnych wykonanymi dla założonych zmienne-  
 ści argumentów i konkretnego samolotu. Funkcje przyjęte w pracy mają postać:

$$c_i = c_i^0 + c_i^\alpha \alpha + c_i^{\alpha^2} \alpha^2 + c_i^\beta \beta + c_i^h \delta h + c_i^{h^2} (\delta h)^2 + c_i^{v^2} (\delta v)^2 + c_i^{\delta l} \delta l + c_i^{\delta l^2} (\delta l)^2 \quad \text{dla } i = x \text{ lub } y$$

$$c_z = c_z^0 + c_z^\alpha \alpha + c_z^{\alpha^2} \alpha^2 + c_z^{\alpha^3} \alpha^3 + c_z^\beta \beta + c_z^{\beta^2} \beta^2 + c_z^h \delta h + c_z^{h^2} (\delta h)^2 + c_z^v \delta v + c_z^{v^2} (\delta v)^2 + c_z^{\delta l} \delta l + c_z^{\delta l^2} (\delta l)^2$$

$J_x, J_y, J_z$  - osiowe momenty bezwładności,

J - macierz diagonalna momentów bezwładności,

L - wektor momentów pędu wokół poszczególnych osi;

$$L = J\omega$$

$m_x, m_y, m_z$  - wielkości te są funkcjami kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , ich pochodnych  $\dot{\alpha}$  i  $\dot{\beta}$ , prę-  
 dkości kątowych  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , wielkości sterujących  $\delta_h, \delta_L, \delta_v$ , liczb kryterial-  
 nych Macha i Reynoldsa oraz prędkości względem powietrza  $V_p$ . Biorąc pod uwa-  
 gę, że  $m_x, m_y, m_z$  jako funkcje wymienionych argumentów są aproksymacjami za-  
 leżności eksperymentalnych obowiązującymi w danym zakresie zmienności argu-  
 mentów oraz dla konkretnego samolotu, w pracy przyjęto następującą postać  
 ogólną:

$$m_i = m_i^0 + m_i^\alpha \alpha + m_i^\beta \beta + m_i^h \delta h + m_i^v \delta v + m_i^{\delta l} \delta l + m_i^{\omega x}(\alpha, V_p) \omega_x + m_i^{\omega y}(\alpha, V_p) \omega_y + m_i^{\omega z}(\alpha, V_p) \omega_z$$

gdzie  $i = x, y, z$ .

Model ten jest modelem silnie nieliniowym zarówno z powodu nieliniowych zależności pomiędzy poszczególnymi zmiennymi, jak również ze względu na nieliniową zależność wartości współczynników od punktu pracy.

Wektor wielkości wejściowych sterujących  $u$  i zakłócających  $d$  ma postać:

$$U = \text{col} [u \ d]$$

$$u = \text{col} [\alpha_h, \alpha_v, \alpha_L, T]$$

$$d = \text{col} [\rho_h, a_h, v_h, t_h, p_h]$$

gdzie:

$T$  - ciąg silnika,

$\rho_h$  - gęstość powietrza na wysokości  $h$ ,

$a_h$  - prędkość dźwięku na wysokości  $h$ ,

$v_h$  - lepkość powietrza na wysokości  $h$ ,

$t_h$  - temperatura powietrza na wysokości  $h$ ,

$p_h$  - ciśnienie powietrza na wysokości  $h$ .

Wektor stanu:

$$x = \text{col} [x, y, z, \phi, v, \psi, V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]$$

Wektor wyjść:

$$y = \text{col} [z, \phi, v, \psi]$$

Dla małych odchyłek wektora stanu  $x$  od stanu ustalonego  $x_0$  można dokonać linearyzacji modelu opisanego równaniami (1a)-(1d) wokół punktu pracy

$$x_0 = \text{col} [x_0, y_0, z_0, \phi_0, v_0, \psi_0, V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}, \omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}]$$

Otrzymamy wówczas układ równań stanu o postaci:

$$\begin{cases} \Delta x = A \Delta x + B \Delta u + D \Delta d \\ \Delta y = C \Delta x \end{cases}$$

(2)



przy czym elementy macierzy  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  zależą w dość złożony sposób od parametrów punktu pracy i nie będą w pracy przedstawione, aby nie zaciemniać istoty problemu syntezy. Dokonując transformacji Laplace'a układu (2) możemy wyznaczyć transmitancję operatorową

$$P_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3)$$

taką, że

$$y(s) = P_0(s)u(s) + D(s) \quad (4)$$

gdzie  $D(s)$  reprezentuje zakłócenia przeniesione na wyjście.

#### 4. DOBÓR MODELU NOMINALNEGO

W artykule przedstawiono koncepcję doboru regulatora dla opisanego modelu samolotu. Omawiana w rozdziale 2 metoda projektowania układu regulacji oparta na przestrzeniach  $H^\infty$  jest metodą zapewniającą większą odporność układu na zmiany parametrów modelu aniżeli metody LQG czy klasyczne metody syntezy.

Jednak dla modelu tak silnie nieliniowego, jak model samolotu, dopuszczalny zakres zmian parametrów zapewniający niewielką wrażliwość układu regulacji może być zbyt mały dla różnych faz lotu lub też silnie zmieniających się warunków atmosferycznych. Proponuje się modyfikację modelu zlinearyzowanego, będącego bazą do projektowania regulatora (zwanego dalej modelem nominalnym), gdy norma

$$\|\Delta P\|_\infty = \|P_1 - P_{10}\|_\infty$$

przekroczy określoną wartość  $\varepsilon > 0$  (gdzie  $P_1$  oznacza transmitancję obiektu dla aktualnego punktu pracy  $x_1$ , natomiast  $P_{10}$  oznacza transmitancję modelu nominalnego, będącego podstawą do doboru aktualnie pracującego regulatora). Określanie chwil aktualizacji modelu nominalnego zależy od tego, czy trajektoria lotu jest z góry zadana, czy wynika z aktualnych potrzeb, np. śledzenia ruchu innego obiektu latającego. Drugi przypadek jest trudniejszy. Załóżmy, że znane są parametry aktualnego modelu nominalnego  $P_{10}$ . Oblicza

się parametry nowego modelu  $P_1$  zlinearyzowanego wokół aktualnego punktu pracy  $x_i$ . Następnie wyznacza się normę  $\|P_{10} - P\|_\infty$  i sprawdza, czy nie przekracza zadanej wartości  $\varepsilon$ . W przypadku z góry zadanej trajektorii  $\tau(x,t)$  istnieje możliwość określenia modelu zlinearyzowanego wzdłuż tej trajektorii. Parametry modelu są funkcjami czasu  $t$  (jawnymi lub niejawnymi w zależności od postaci funkcji  $\tau(x,t)$ ). Przyjmując za początkowy model nominalny  $P_0 = P_\tau|_{\tau(x,0)}$  można znaleźć chwilę  $t_1$ , w której konieczne jest zaktualizowanie modelu nominalnego, ponieważ wartość normy  $\|P_\tau|_{\tau(x,t_1)} - P_0\|_\infty$  przekroczy zadaną wartość  $\varepsilon$ . Następnie modyfikując aktualny model nominalny  $P_0 = P_\tau|_{\tau(x,t_1)}$  można znaleźć kolejną chwilę przełączeń  $t_2$ . Postępując w ten sposób można jawnie określić wszystkie momenty aktualizacji modelu nominalnego  $t_i$   $i = 1 \dots N$  za cały horyzont sterowania  $[0, T]$ .

Wybór metody znajdowania chwil aktualizacji modelu nominalnego, a tym samym chwil modyfikacji parametrów regulatora zależy w dużym stopniu od celu stawianego układowi regulacji. Jeśli projektowany ma być układ regulacji programowej, tzn. znana jest explicite postać trajektorii  $\tau(x,t)$  wydaje się słuszna i wygodniejsza w użyciu metoda druga. Jeśli ma to być natomiast układ regulacji nadążanej, wtenczas możliwe jest zastosowanie metody opisanej jako pierwsza.

## 5. SYNTEZA REGULATORA

Schemat rozpatrywanego układu regulacji przedstawia rys. 3.

$P_{10}$  - model nominalny  $\in RH^m$  (dla chwili  $t_1$ ),

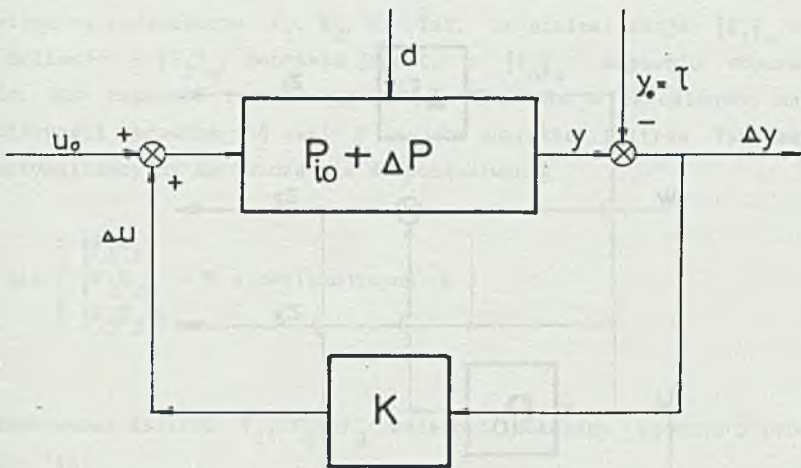
$K$  - regulator  $\in RH^m$ ,

$\Delta P$  - reprezentuje nieznanne zmiany  $P_1$ , tzn. odchyłki od modelu nominalnego,

$u_0$  - wyznaczone w układzie otwartym sterowanie odpowiadające zadanej trajektorii  $\tau(x,t)$  dla modelu nieliniowego.

Zakłada się, że

$$\Delta P_\infty \leq |r(j\omega)| \quad \omega \in [0, \infty) \quad (1)$$



Rys. 3. Schemat modelu układu sterowania samolotem

Fig. 3. The airplane control system model scheme

Ponieważ model jest linearyzowany wzdłuż zadanej trajektorii  $\tau(x, t)$ , problem doboru regulatora można sprowadzić do następującej postaci: Należy dobrać regulator o transmitancji  $K \in RH^\infty$  stabilizujący wszystkie obiekty ze zbioru:

$$P = \{P_{10} + \Delta P : \Delta P_\infty \leq |r(j\omega)|, \quad \omega \geq 0\} \quad (2)$$

minimalizujący wrażliwość układu na zmiany parametrów modelu, a także zapewniający odpowiednią jakość regulacji. Problem ten można sprowadzić do zagadnienia przedstawionego w punkcie 2.1, którego ilustrację stanowi rys. 1. Na schemacie tym można przyjąć:

$$z = \text{col}[z_1, z_2, z_3] \quad (3)$$

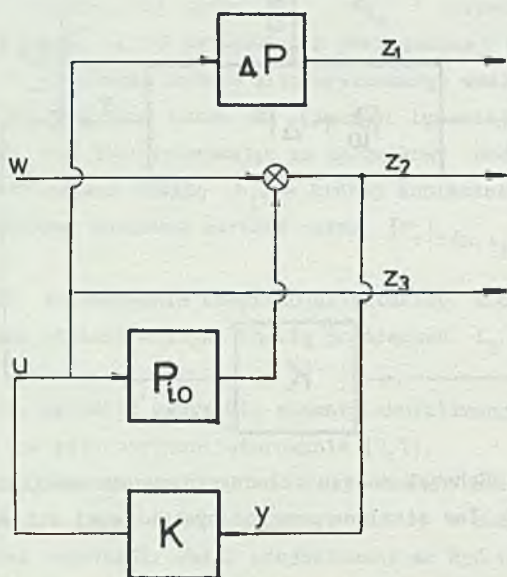
$z_1$  - reprezentuje odchyłki wywołane niedokładnością modelu,

$z_2$  - określa wymagania nadążania i tłumienia zakłóceń,

$z_3$  - odpowiada za ograniczenia sygnałów sterujących.

Schemat przedstawiony na rys. 1 można zatem zastąpić schematem zilustrowanym na rys. 4, gdzie:  $w$  - reprezentuje zakłócenia i odchyłki zadanej trajektorii przeniesione na wyjście obiektu.





Rys. 4. Schemat konfiguracji standardowej dla analizowanego problemu  
 Fig. 4. The scheme of standard configuration for the problem to be analyzed

Macierz  $G$  może być określona jako:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ P_{10} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$G_{21} = [1] \quad G_{22} = [P_{10}] \quad (4b)$$

gdzie:  $I$  jest macierzą jednostkową odpowiednich wymiarów.

Macierz transmitancji układu zamkniętego  $E$  (rozdz. 2.2 wzór 14) może być podzielona na podmacierze  $E_1, E_2, E_3$  tak, że minimalizacja  $\|E_1\|_\infty$  zmniejsza wrażliwość -  $\|E_2\|_\infty$ , poprawia jakość, a  $\|E_3\|_\infty$  zapewnia odporną stabilność. Aby zapewnić realizację celów sterowania w określonych zakresach częstotliwości wprowadza się wagi  $F$  mające charakter filtrów. Tym samym problem optymalizacyjny sprowadza się do poszukiwania

$$\min \left\{ \left\| \begin{bmatrix} F_1 E_1 \\ F_2 E_2 \\ F_3 E_3 \end{bmatrix} \right\|_\infty : K \text{ stabilizujących } G \right\} \quad (5)$$

przy czym wybór filtrów  $F_1, F_2, F_3$  może być dokonany zgodnie z procedurą podaną w [16].

Przedstawiony problem minimalizacji może być rozwiązany w sposób przybliżony poprzez zastosowanie procedury przedstawionej w punkcie 2.4, przy czym parametryzacji za pomocą macierzy  $Q$  należy poddać macierz:

$$FE = \begin{bmatrix} F_1 r K (I - P_{i_0} K)^{-1} \\ F_2 (I - P_{i_0} K)^{-1} \\ F_3 K (I - P_{i_0} K)^{-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

z uwagi na tożsamość

$$I + P_{i_0} K (I - P_{i_0} K)^{-1} = (I - P_{i_0} K)^{-1}$$

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono koncepcję syntezy układu regulacji zapewniającego realizację sterowania nadążnego obiektem o złożonej dynamice, np. samolotu przy wykorzystaniu metod opartych na teorii przestrzeni  $H^\infty$ . Poprzez linearyzację modelu w określonych przedziałach otrzymuje się model przybliżony transmitancyjny, przy czym zapewnienie stabilności, nadążania i tłumienia zakłóceń uzyskuje się dzięki odpornościowym własnościom metod przedstawionych w pracy. Realizacja, nawet modelowa, przedstawionej metodyki wymaga opracowania specjalistycznego oprogramowania, które umożliwiłoby zarówno tworzenie mo-

deli zlinearyzowanych, numeryczną realizację przekształceń algebraicznych (np. względnie pierwsza faktoryzacja) i optymalizację  $H^\infty$ , jak i symulacyjne badanie regulatora współpracującego z modelem nieliniowym. Oprogramowanie takie jest obecnie w fazie uruchamiania.

#### LITERATURA

- [1] Ball J., Cohen N.: Sensitivity minimization in  $H^\infty$ : norm parametrization of all suboptimal solutions. Int. Journal of Control, vol. 46, no 3, 1987.
- [2] Chang B., Pearson J. jr.: Optimal disturbance reduction in linear multivariable systems, IEEE Trans. on Aut. Control. vol AC-29, no 10, October 1984.
- [3] Chen M., Desoer C.: Algebraic theory for robust stability of interconnected systems: Necessary and sufficient conditions, IEEE Trans. on Aut. Control, vol AC-29, no 6, June 1984.
- [4] Desoer C., Chen M.: Design of multivariable feedback systems with stable plants, IEEE Trans. on Aut. Control vol AC-26, no 2, 1981.
- [5] Francis B.: A course in  $H^\infty$  control theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol 88, Springer-Verlag, 1987.
- [6] Francis B., Doyle J.: Linear control theory with  $H^\infty$  optimal criterion, SIAM J. Control and Optimization, vol 25, no 4, July 1987.
- [7] Francis B., Zames G.: On  $H^\infty$ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems. IEEE Trans. on Aut. Control. vol AC-29, no 1, 1984.
- [8] Francis B., Helton W., Zames G.:  $H^\infty$ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems. IEEE Trans. on Aut. Control. vol AC-29, no 10, 1984.
- [9] Glover K.: Model reduction: A tutorial on Hankel-norm methods and lower bounds on  $L^2$  errors, Int. J. Control, vol 39, no 1, 1984.
- [10] Glover K.: All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds, Int. J. Control. vol 39, no 6, 1984.
- [11] Kimura H.: Robust stability for a class of transfer functions, IEEE Trans. on Aut. Control. vol AC-29, no 9, 1984.
- [12] Kwakernaak H.: A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems. Int. J. Control, vol 44, no 1, 1986.



- [13] Leja F.: Funkcje zespolone. PWN, Warszawa 1979.
- [14] Molicki W.: Wpływ elementów wirujących zespołu napędowego na własności dynamiczne samolotu w locie. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, Warszawa 1986.
- [15] S.D.O'Young, Francis B.: Sensitivity trade-off for multivariable plants, IEEE Trans. on Aut. Control, vol AC-30, no 10, 1985.
- [16] Postlethwaite I., S.O'Young, Hope J.:  $H^\infty$  control system desing: a critical assement based on industrial applications, Preprints X IFAC World Congress, vol 8, Munich 1987.
- [17] Postlethwaite I., Gu D.W., S.O'Young, Tombs M.: Industrial control system desing using  $H^\infty$  optimization, Proc. IEEE, Conf. Dec. Control, vol 1, 1986.
- [18] Vidyasagar M.: Control system synthesis: A factorization approach, The MIT Press, Cambridge, 1985.
- [19] Vidyasagar M., Kimura H.: Robust controllers for uncertain linear multivariable systems, Automatica, vol 22, no 1, 1986.
- [20] Wojciechowski K., Ordys A., Polańska J.: Model przestrzennego ruchu samolotu dla celów symulacji i sterowania, ZN Pol. Śl. (przyjęte do druku).
- [21] Zames G.: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses, IEEE Trans. on Aut. Control, vol AC-26, no 2, 1981.
- [22] Zames G., Francis B.: Feedback, minimax sensitivity and optimal robustness, IEEE Trans. on Aut. Control, vol AC-28, no 5, 1983.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Wojciech MUTKOWSKI

Wpłynęło do Redakcji 30.05.1989 r.

#### A b s t r a c t

The paper devoted to the  $H^\infty$  theory based idea of the solution to the controller synthesis problem for a system with complicated dynamics, for example an airplane. In order to make the paper independent of the scattered publications on  $H^\infty$  theory the main results of this theory used in the con-

siderations are presented. The model of an airplane described in [14], [20] is assumed as the control object.

The controller designed with  $H^\infty$  methods for the airplane model linearized around a stationary point is a robust one and it should assure proper behavior of the system even for large deviations. However the strong nonlinearity of the plant implies the need of a temporary correction of controller parameters. The conditions for the decision of the controller parameters correction and the methods of the correction are considered.

Some conclusion are also made about the numerical complexity of the control algorithm and the numerical methods used to solve components of the problem.