

Marian BŁACHUTA, Krzysztof SIMEK

Konrad WOJCIECHOWSKI

## MODEL PRZESTRZENNEGO RUCHU SAMOLOTU I JEGO LINEARYZACJA

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono opracowany dla potrzeby sterowania model przestrzennego ruchu samolotu z dokładnością do funkcyjnej postaci zależności współczynnika oporu od kątów natarcia, ślizgu oraz wychyleń odpowiednio steru wysokości, kierunku i lotek oraz funkcyjnej postaci współczynnika momentów w zależności od tych samych argumentów. Podano również przykładowe wartości liczbowe wszystkich występujących w modelu parametrów.

Przedstawiono szczegółowo analityczną linearyzację modelu oraz określono analityczne postacie funkcyjne elementów macierzy określających model zlinearyzowany.

### 3-D AIRCRAFT MOTION MODEL AND ITS LINEARIZATION

**Summary.** A model of the 3D aircraft motion including the functional form of the relation between coefficient and incidence angles, slide slip and elevator, rudder and allron displacements as well as the functional form of the torque coefficient dependence on the same arguments is presented. The model is formulated for control synthesis purposes, the exemplary values of all parameters occurring in the model are also presented.

The analytical model linearization is presented in details and an analytical functional form of the matrix entries defining the linearized model is determined. In the case when functional forms are not required a numerical linearization may be performed.

### МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА И ЕЕ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

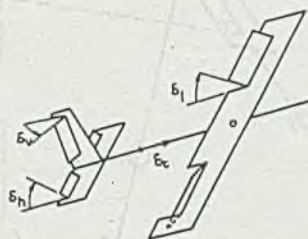
**Резюме.** В работе детально представлена аналитическая линейаризация пространственной модели движения самолета. Определены функциональные жормы шлементов матрии определяющих линейаризованную модель. Разработана микрокомпьютерная программа для определения нулей и полюсов соответствующих кошжжциентов передачи.

## 1. WPROWADZENIE

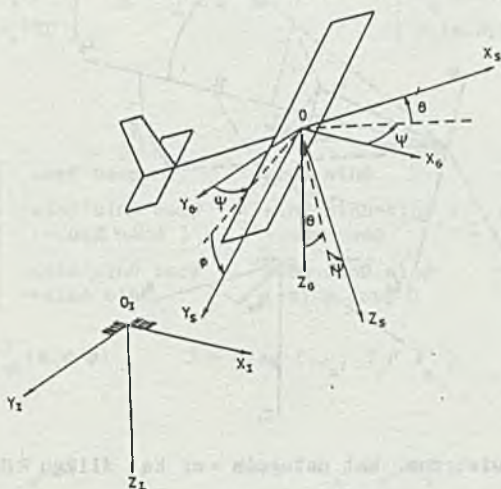
Fizykalna interpretacja zmiennych występujących w modelu przestrzennego ruchu samolotu jak również formułowanie sensownych zadań sterowania wymaga określenia następujących prostokątnych i prawoskrętnych układów współrzędnych:

1. Układ inercyjny I którego początek  $o_I$  wybrany jest dowolnie na powierzchni ziemi, zaś osie  $o_I x_I$ ,  $o_I y_I$  leżą w płaszczyźnie stycznej w punkcie  $o_I$  do powierzchni ziemi.
2. Układ grawitacyjny G z początkiem o w punkcie  $(x, y, z)$  stanowiącym środek ciężkości samolotu i osiach równoległych i zgodnie skierowanych z osiami układu I.
3. Układ samolotowy S z początkiem o, osią  $ox_S$  równoległą do osi podłużnej samolotu i zwrocie wektora prędkości, oraz osią  $oy_S$  skierowaną na prawe skrzydło.
4. Układ przepływowy A z początkiem w punkcie o, osią  $ox_A$  równoległą do kierunku opływu i skierowaną zgodnie z ruchem obiektu.
5. Układ trajektorii z początkiem w punkcie o, osią  $ox_T$  równoległą do wektora prędkości samolotu, osią  $oy_T$  równoległą do płaszczyzny utworzonej przez osie  $ox_G$ ,  $oy_G$ .

Transformacje  $\tau_{BA}$  wektora z układu współrzędnych A do układu współrzędnych B określa macierz  $D_{BA}$  (rotacja) i wektor  $r_{BA}$  (translacja). Zakładając, że każda z określonych dalej macierzy rotacji jest nieosobliwa określenie czterech macierzy pozwala na dokonanie transformacji pomiędzy dowolnymi z pięciu wyróżnionych układów współrzędnych. Interpretację fizykalną występujących zmiennych przedstawiają rysunki 1-4.

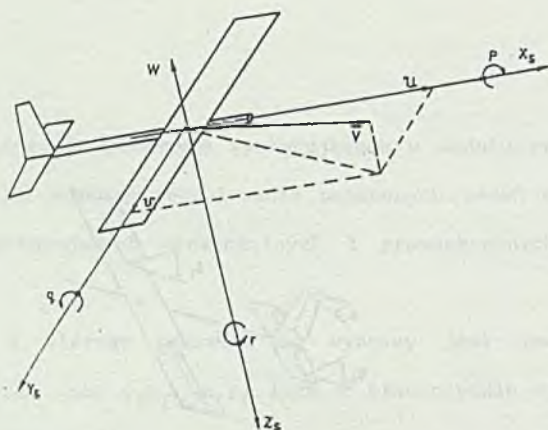


Rys. 1. Interpretacja fizyczna wielkości sterujących  $\delta_l$ ,  $\delta_h$ ,  $\delta_v$   
 Fig. 1. Physical interpretation of control variables  $\delta$ ,  $\delta_h$ ,  $\delta_v$

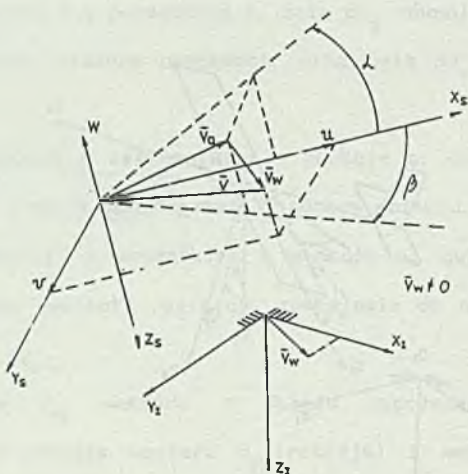


Rys. 2. Kąty Eulera  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , określające orientację układu samolotowego S  
 względem układu inercyjnego I

Fig. 2. Euler angles defining relation between an aircraft axis system and an  
 inertial system



Rys. 3. Prędkości liniowe i kątowe w układzie S samolotu  
 Fig. 3. Linear and angular velocities in the aircraft axis system



Rys. 4. Prędkość powietrzna, kąt natarcia  $\alpha$ , kąt ślizgu  $\beta$  przy niezerowej prędkości wiatru  $\bar{v}_w$   
 Fig. 4. Velocities  $\bar{v}_a$  and  $\bar{v}$ ; angle of attack  $\alpha$  and sideslip angle  $\beta$

## 2. MODEL PRZESTRZENNEGO RUCHU SAMOLOTU

Model przestrzennego ruchu samolotu dany jest następującym układem równań [5]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{CS}(\theta, \phi, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T_{\omega}(\theta, \phi) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} wq - vr \\ ur - wp \\ vp - uq \end{bmatrix} = m D_{SG}(\theta, \phi, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + a_c \delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho(h) v_a^2 D_{SP}(\alpha, \beta) S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$J \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_z - J_y)rq \\ (J_x - J_z)pr \\ (J_y - J_x)qp \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho(h) v_a^2 D_{SP}(\alpha, \beta) S L \begin{bmatrix} m_x(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_1) \\ m_y(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_1) \\ m_z(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie

$$D_{SC}(\theta, \phi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi + (-\cos\phi \sin\psi) & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi + (-\sin\phi \cos\psi) & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$D_{CS}(\theta, \phi, \psi) = D_{SC}^T(\theta, \phi, \psi), \quad J = \text{diag} \{ J_x, J_y, J_z \}$$

$$S = \text{diag} \{ S_x, S_y, S_z \}, \quad L = \text{diag} \{ L_x, L_y, L_z \}$$

$$T_{\omega}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi \operatorname{tg}\theta & \cos\phi \operatorname{tg}\theta \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$D_{SP}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\cos\alpha \sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha \cos\beta & -\sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

Funkcje  $c_x(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$ ,  $c_y(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$ ,  $c_z(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$  rozwinięte w szeregi potęgowe mają postać:

$$c_i(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l) = c_i^0 + c_i^\alpha \alpha + c_i^{\alpha^2} \alpha^2 + c_i^{\alpha^3} \alpha^3 + c_i^\beta \beta + c_i^{\beta^2} \beta^2 + c_i^h \delta_h + c_i^{h^2} (\delta_h)^2 + c_i^v \delta_v + c_i^{v^2} (\delta_v)^2 + c_i^l \delta_l + c_i^{l^2} (\delta_l)^2$$

gdzie:  $i=x, y, z$ .

Liczbowe wartości współczynników tych rozwinięć przedstawiają tab. 2. a, 2. b. Zamieszczane dalej wartości liczbowe nie odpowiadają żadnemu konkretnemu samolotowi.

Funkcje  $m_x(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$ ,  $m_y(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$ ,  $m_z(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l)$  rozwinięte w szeregi potęgowe mają postać:

$$m_i(\alpha, \beta, \delta_h, \delta_v, \delta_l) = m_i^0 + m_i^\alpha \alpha + m_i^\beta \beta + m_i^h \delta_h + m_i^v \delta_v + m_i^l \delta_l$$

gdzie  $i=x, y, z$

Liczbowe wartości współczynników tych rozwinięć przedstawiono w tab. 3.

Dodatkowe zależności pomocnicze określające moduł prędkości powietrznej  $v_a$  oraz kąt natarcia  $\alpha$  i kąt ślizgu  $\beta$  mają postacie:

$$\begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - D_{SG}(\theta, \phi, \psi) \begin{bmatrix} v_{wx} \\ v_{wy} \\ v_{wz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$v_a = (v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2)^{1/2} \quad (7)$$

$$\alpha = \arctg(v_{az}/v_{ax}) \quad (8)$$

$$\beta = \arcsin(v_{ay}/v_a) \quad (9)$$

gdzie:  $\vec{v}_w = [v_{wx}, v_{wy}, v_{wz}]^T$  jest wektorem prędkości wiatru w układzie inercyjnym.

Dane liczbowe wymagane są dla symulacji obiektu sterowania, pozwalają również odpowiednio do przedstawianej w pracy metody, na syntezę układu sterowania z "dokładnością" do współczynników liczbowych.

Tablica 1

Oznaczenie	Nazwa	Jedn.	Wartość
m	masa	[kg]	2000
$J_x$	momenty bezwładności względem samolotowego układu współrzędnych	[kg m <sup>2</sup> ]	2000
$J_y$		[kg m <sup>2</sup> ]	5000
$J_z$		[kg m <sup>2</sup> ]	10000
$L_x$	równoważne ramiona sił w przepływowym układzie współrzędnych	[m]	0.5
$L_y$		[m]	0.5
$L_z$		[m]	0.5
$S_x$	równoważne powierzchnie w przepływowym układzie współrzędnych	[m <sup>2</sup> ]	0.5
$S_y$		[m <sup>2</sup> ]	2.0
$S_z$		[m <sup>2</sup> ]	10.0
$\rho$	gęstość powietrza	[kg/m <sup>3</sup> ]	1.2
g	przyspieszenie ziemskie	[m /s <sup>2</sup> ]	9.81
$a_c$	współczynnik	[N/ % ]	20.0

Tablica 2a

	$c_1^0$	$c_1^\alpha$	$c_1^{\alpha^2}$	$c_1^{\alpha^3}$	$c_1^\beta$	$c_1^{\beta^2}$
i=x	$-2.0 \cdot 10^{-1}$	0.0	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	0.0	0.0	0.0
i=y	0.0	0.0	0.0	0.0	$-5.0 \cdot 10^{-3}$	0.0
i=z	$-1.5 \cdot 10^{-1}$	-8.6	0.0	0.0	0.0	$5.7 \cdot 10^{-3}$

Tablica 2b

	$c_1^h$	$c_1^{h^2}$	$c_1^v$	$c_1^{v^2}$	$c_1^l$	$c_1^{l^2}$
i=x	0.0	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	0.0	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	0.0	$-2.0 \cdot 10^{-3}$
i=y	0.0	0.0	$-2.5 \cdot 10^{-3}$	0.0	0.0	0.0
i=z	$-1.0 \cdot 10^{-4}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tablica 3

	$m_1^o$	$m_1^\alpha$	$m_1^\beta$	$m_1^h$	$m_1^v$	$m_1^l$
i=x	0.0	0.0	0.0	0.0	$-4.0 \cdot 10^{-3}$	$-4.0 \cdot 10^{-2}$
i=y	0.0	$5.7 \cdot 10^{-2}$	0.0	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	0.0	0.0
i=z	0.0	0.0	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	0.0	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$-2.0 \cdot 10^{-5}$

### 3. MODEL PODŁUŻNEGO RUCHU SAMOLOTU

Zakładając  $\phi=\psi=0$ ,  $v=0$ , otrzymujemy na podstawie równań ruchu przestrzennego, że również  $p=r=0$ ,  $y=0$ ,  $\beta=0$ . Mamy zatem:

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = D_{GS}(\theta, 0, 0) \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T_\omega(\theta, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$m \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} wq \\ 0 \\ -uq \end{bmatrix} = m D_{SG}(\theta, 0, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + a_c \delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho(h) v_a^2 D_{SP}(\alpha, 0) S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \quad (12)$$



$$J \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho(h) v_a^2 D_{SP}(\alpha, \beta) L S \begin{bmatrix} 0 \\ m_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ostatecznie układ równań opisujących podłużny ruch samolotu przyjmuje postać:

$$\dot{x} = u \cos \theta + w \sin \theta$$

$$\dot{z} = -u \sin \theta + w \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = q \quad (14)$$

$$\dot{u} = -wq - g \sin \theta + a_c \delta_c + \frac{1}{2m} \rho v_a^2 (S_x c_x \cos \alpha - S_z c_z \sin \alpha)$$

$$\dot{w} = uq + g \cos \theta + \frac{1}{2m} \rho v_a^2 (S_x c_x \cos \alpha + S_z c_z \sin \alpha)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2J_y} \rho v_a^2 L_y S_y m_y$$

Zależności pomocnicze przyjmują postać:

$$v_{ax} = u - v_{wx} \cos \theta + v_{wz} \sin \theta$$

$$v_{az} = w - v_{wx} \sin \theta - v_{wz} \cos \theta \quad (15)$$

$$v_a = (v_{ax}^2 + v_{az}^2)^{1/2}$$

$$\alpha = \arctg v_{az} / v_{ax}$$

#### 4. LINEARYZACJA ANALITYCZNA

Synteza praw sterowania na podstawie nieliniowego, niestacjonarnego i wielowymiarowego modelu poprzedzona jest najczęściej linearyzacją tego modelu w wybranym punkcie pracy lub wzdłuż danej trajektorii.

Analizując otrzymany model liniowy, a w szczególności rozkład wartości własnych macierzy  $A$ , rozkłady zer i biegunów odpowiednich transmitancji uzyskujemy podstawowe informacje odnośnie do obiektu sterowania.

Model zlinearyzowany wykorzystany może być również bezpośrednio do syntezy prawa sterowania z zastosowaniem dobrze opracowanych metod obowiązujących dla modeli liniowych.

Zaletą metody analitycznej jest możliwość rozpatrywania zależności parametrycznych. Jej wadą - nakład pracy wymagany do uzyskania analitycznej postaci macierzy pochodnych cząstkowych.

Wykorzystując macierze modelu zlinearyzowanego wyznaczono na drodze numerycznej wartości własne macierzy  $A$  oraz zera i bieguny wybranych transmitancji pomiędzy sterowaniami a składowymi wektora stanu.

W zwartym opisie model samolotu przedstawić można w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad ; \quad t \in [0, T] \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (16)$$

gdzie:  $\mathbf{x}^T = [u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, \psi, x, y, z]$ ,  $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, u_3]$ . Zakładamy, że  $\mathbf{f}$  jest klasy  $C_1$ ,  $l \geq 1$ , względem argumentów  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, w$ .

Niech będą dane funkcje  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$   $t \in [0, T]$ . Rozwijając równania (16) w otoczeniu  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  otrzymujemy:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \Delta \mathbf{u} + o^2 \quad (17)$$

gdzie:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad , \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$o^2$  jest reszta rzędu co najmniej drugiego względem  $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}$ .

Pomijając resztę  $o^2$  przy założeniu małych wartości odchyłek  $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}$  otrzymujemy:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) - \dot{\bar{\mathbf{x}}} \quad (18)$$

Jeżeli wybrane funkcje  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{u}(t)$  spełniają (16), to w równaniu (18)  $f(\bar{x}, \bar{u}, t) - \dot{\bar{x}} = 0$ . Jeżeli natomiast  $\bar{x}(t) = \text{const}$ ,  $\bar{u}(t) = \text{const}$  oraz  $\partial f / \partial t \equiv 0$ , to zlinearyzowany model (18) przedstawić można w postaci:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u + c \quad (19)$$

gdzie:  $c$  jest stałą.

Dalej, aby uprościć zapis, zmienne  $\Delta x$ ,  $\Delta u$  oznaczać będziemy odpowiednio przez  $x$ ,  $u$ .

W celu uporządkowania obliczeń macierz  $A$  przedstawimy w następującej postaci blokowej:

$$A = \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \theta \\ \phi \\ \psi \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \theta \\ \phi \\ \psi \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array} \quad (20)$$

Przechodząc do wyznaczania poszczególnych macierzy  $A_{i,j}$ ,  $i, j = 1..4$ , wykorzystujemy kolejno grupy równań (1) - (4) różniczkując je względem  $x$ .

Na podstawie równań grupy (3) mamy:

$$A_{11} = A_{11}^1 + A_{11}^2 + A_{11}^3 + A_{11}^4 \quad (21)$$

gdzie

$$A_{11}^1 = -\partial \begin{bmatrix} wq - vr \\ ur - vr \\ vp - uq \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$A_{11}^2 = \frac{\rho}{m} \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot c(\alpha, \beta, u) \cdot [u, v, w] \quad (23)$$

$$A_{11}^3 = \frac{\rho}{2 \cdot m} \cdot v_P^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot C(\alpha, \beta, u) \cdot P(u, v, w) \quad (24)$$

Macierze pochodnych cząstkowych C, P mają postacie:

$$C = \partial c(\alpha, \beta, u) / \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot c_x^{\alpha^2} \cdot \alpha & , & 2 \cdot c_x^{\beta^2} \cdot \beta^2 \\ 0 & , & c_y^{\beta} \\ c_z^{\alpha} + 2 \cdot c_z^{\alpha^2} \cdot \alpha + 3 \cdot c_z^{\alpha^3} \cdot \alpha^2 & , & c_z^{\beta} + 2 \cdot c_z^{\beta^2} \cdot \beta \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$P = \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{u^2 + w^2} & 0 & \frac{u}{u^2 + w^2} \\ \frac{u \cdot v}{v_P^2 \cdot \sqrt{v_P^2 - v^2}} & \frac{2 \cdot v \cdot (2 \cdot v_P^2 - 1)}{v_P^2 \cdot \sqrt{v_P^2 - v^2}} & \frac{-u \cdot w}{v_P^2 \cdot \sqrt{v_P^2 - v^2}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Ostatnia z macierzy występujących w (21) ma postać:

$$A_{11}^4 = \frac{\rho}{2 \cdot m} \cdot v_P^2 \cdot \begin{bmatrix} c^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_1 M_2 \\ c^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_2 M_2 \\ c^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_3 M_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie

$$D_1(\alpha, \beta) = \partial D_{SP}^1 / \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cdot \sin \beta & -\sin \beta \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta & -\cos \alpha \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$D_2(\alpha, \beta) = \partial D_{SP}^2 / \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \beta \\ 0 & -\sin \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$D_3(\alpha, \beta) = \partial D_{SP}^3 / \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha \cdot \sin\beta \\ -\cos\alpha \cdot \sin\beta & -\cos\beta \cdot \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

oraz  $D_{SP}^1(\alpha, \beta)$  jest i-tym wierszem macierzy  $D_{SP}(\alpha, \beta)$ .

Dalej (wg wierszy macierzy A (40)) mamy:

$$A_{12} = -\partial \begin{bmatrix} wq - vr \\ ur - wp \\ vp - uq \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$A_{13} = \partial \left( D_{SC}(\theta, \phi, \psi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right) / \partial \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} =$$

$$-g \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\phi \cdot \sin\theta & -\cos\theta \cdot \cos\phi & 0 \\ \sin\theta \cdot \cos\theta & \sin\phi \cdot \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$A_{14} = 0 \quad (33)$$

Na podstawie równań grupy (24) mamy:

$$A_{21} = A_{21}^1 + A_{21}^2 + A_{21}^3 \quad (34)$$

gdzie:

$$A_{21}^1 = \rho \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot J^{-1} m(\alpha, \beta, u) \cdot [u, v, w] \quad (35)$$

$$A_{21}^2 = \frac{\rho}{2} \cdot v_P^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot J^{-1} M(\alpha, \beta, u) \cdot P(u, v, w) \quad (36)$$

zas macierz M ma postać:

$$M = \partial m(\alpha, \beta, u) / \partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_x^\beta \\ m_y^\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Ostatnią w (34) macierz  $A_{21}^3$  można zapisać w postaci:

$$A_{21}^3 = \frac{\rho}{2} \cdot v_p^2 \cdot J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_2 \cdot P \\ m^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_2 \cdot P \\ m^T(\alpha, \beta, u) \cdot D_2 \cdot P \end{bmatrix} \quad (38)$$

Występujące w powyższych zależnościach macierze  $P(u, v, w)$ ,  $D_1(\alpha, \beta)$   $i = 1 \dots 3$  określone są odpowiednio wyrażeniami (26) (28) (29) (30).

$$A_{22} = -\partial \begin{bmatrix} ((J_Z - J_Y)/J_X) \cdot q \cdot r \\ ((J_X - J_Z)/J_Y) \cdot p \cdot r \\ ((J_Y - J_X)/J_Z) \cdot p \cdot q \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & ((J_Z - J_Y)/J_X) \cdot r & ((J_Z - J_Y)/J_X) \cdot q \\ ((J_X - J_Z)/J_Y) \cdot r & 0 & ((J_X - J_Z)/J_Y) \cdot p \\ ((J_Y - J_X)/J_Z) \cdot q & ((J_Y - J_X)/J_Z) \cdot p & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Łatwo sprawdzić, że  $A_{23} \equiv 0$ , ponieważ prawe strony grupy równań (3) nie zależą od zmiennych  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ . Podobnie  $A_{24} \equiv 0$ .

Przechodząc do grupy równań (2) mamy  $A_{31} \equiv 0$ , ponieważ w prawych stronach równań tej grupy nie występują zmienne  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Dalej mamy:

$$A_{32} = \partial(T_\Omega \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}) / \partial \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = T_\Omega'(\theta, \phi) \quad (40)$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} [p \ q \ r] \cdot T_2(\theta, \phi) \\ [p \ q \ r] \cdot T_2(\theta, \phi) \\ [p \ q \ r] \cdot T_2(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (41)$$

gdzie:

$$T_1(\theta, \phi) = \partial T_\Omega^1 / \partial \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & -\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$T_2(\theta, \phi) = \partial T_{\Omega}^2 / \partial \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\theta) & \operatorname{tg}\theta \cdot \cos\phi & 0 \\ \cos\phi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\theta) & -\operatorname{tg}\theta \cdot \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$T_3(\theta, \phi) = \partial T_{\Omega}^3 / \partial \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi \cdot \frac{\sin\phi}{\cos^2\theta} & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & 0 \\ \cos\phi \cdot \frac{\sin\phi}{\cos^2\theta} & -\frac{\sin\phi}{\cos\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

zas  $T_{\Omega}^1$   $i = 1..3$  są wierszami macierzy  $T_{\Omega}$ .

Dla ostatniej grupy równań (21) mamy:

$$A_{41} = \partial D_{GS}(\theta, \phi, \psi) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = D_{GS}(\theta, \phi, \psi) \quad (45)$$

$$A_{43} = \partial D_{GS}(\theta, \phi, \psi) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\theta, \phi, \psi] \cdot G_1(\theta, \phi, \psi) \\ [\theta, \phi, \psi] \cdot G_2(\theta, \phi, \psi) \\ [\theta, \phi, \psi] \cdot G_3(\theta, \phi, \psi) \end{bmatrix} \quad (46)$$

gdzie macierze  $G_i$ ,  $i = 1..3$  są pochodnymi kolejnych wierszy macierzy  $D_{GS}(\theta, \phi, \psi)$  względem  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ .

Macierze  $A_{42}$  i  $A_{44}$  są macierzami zerowymi, ponieważ prawe strony równań (1) nie zależą od zmiennych  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ani  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Przyjmując przedstawioną poniżej blokową strukturę macierzy  $B$  wyznaczamy kolejne macierze  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$B = \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \theta \\ \phi \\ \psi \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \\ \hline B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline B_3 \\ \hline B_4 \\ \hline \end{array} \quad (47)$$

Rozpoczynając podobnie jak dla macierzy  $A$ , od pierwszej grupy równań, otrzymujemy:

$$B_1 = B_1^1 + B_1^2 \quad (48)$$

gdzie:

$$B_1^1 = \partial \left( \frac{k}{m} \cdot u_4 \right) / \partial u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} B_1^2 &= \partial \left( \frac{\rho}{2 \cdot m} \cdot v_p^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot c(\alpha, \beta, u) \right) / \partial u = \\ &= \frac{\rho}{2 \cdot m} \cdot v_p^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot C_u(\alpha, \beta, u) \end{aligned} \quad (50)$$

Macierz  $C_u$  określona jest jako:

$$C_u = \partial c(\alpha, \beta, u) / \partial u = \begin{bmatrix} 2 \cdot c_x^1 \cdot u_1^2 & 2 \cdot c_x^v \cdot u_2^2 & 2 \cdot c_x^h \cdot u_3^2 & 0 \\ 0 & c_y^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_z^h & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Dla grupy równań (23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B_2 &= \partial \left( \frac{\rho}{2} \cdot v_p^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot J^{-1} \cdot m(\alpha, \beta, u) \right) / \partial u = \\ &= \frac{\rho}{2} \cdot v_p^2 \cdot D_{SP}(\alpha, \beta) \cdot J^{-1} \cdot M_u(\alpha, \beta, u) \end{aligned} \quad (52)$$

gdzie:

$$M_u = \partial m(\alpha, \beta, u) / \partial u = \begin{bmatrix} m_x^1 & m_x^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_y^h & 0 \\ m_z^1 & m_z^v & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Macierze  $B_3, B_4$  są tożsamościowo równe zeru. Wynika to z faktu niezależności prawych stron grupy równań (2) i (1) od sterowań  $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ .



Podsumowując, macierze A, B, wyrażone przez swoje postacie blokowe (20), (47) stanowią analityczne rozwiązanie zadania linearyzacji.

## 5. LINEARYZACJA NUMERYCZNA

Numeryczna linearyzacja modelu (16) jest pojęciowo prosta. Polega na zastąpieniu macierzy pochodnych cząstkowych w punkcie linearyzacji przez ilorazy różnicowe. Mamy:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cong \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad , \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cong \frac{\Delta f}{\Delta u} \quad (54)$$

Dla przykładowych danych liczbowych określających statyczny punkt pracy odpowiadający zakrętowi ustalonemu o promieniu 9 km:

vc= 200.0

rz=9000.0

vz= 0.0

u =199.995103

phi= 0.425400

w = -1.399557

d1 = -0.003891

p = 0.000142

dv = 0.000268

q = 0.009171

dh = 0.000057

r = 0.020241

dc =120.003063

the= -0.006374

theta= -0.365213

phi = 24.373626

alfa = -0.400947

vp = 200.0

Wyznaczono macierze A, B modelu zlinearyzowanego oraz transmitancje pomiędzy składowymi wektora stanu a sterowaniami.

Transmitancję pomiędzy  $i$ -tą składową wektora  $x$  a  $j$ -tą składową wektora  $u$  oznaczamy przez  $K_{ij}(s)$  i zapisujemy w postaci:

$$K_{ij}(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\sum_{k=1}^9 b_k s^{n-k}}{s^9 + \sum_{k=1}^9 a_k s^{n-k}} \quad i = 1..9, j = 1..4 \quad (55)$$

Zera transmitancji  $K_{ij}(s)$  (pierwiastki wielomianu  $L(s)$ ) oznaczamy przez  $s_l$ ,  $l = 1..11$ , bieguny transmitancji  $K_{ij}(s)$  (pierwiastki wielomianu  $M(s)$ ) oznaczamy przez  $s_k$ ,  $k = 1..9$ .

Na załączonych wydrukach dla każdej z transmitancji podawane są współczynniki  $b_k$ ,  $k = 1..9$ , i odpowiadające im  $s_l$ ,  $l = 1..8$ .

Współczynniki  $a_k$ ,  $k = 1..9$ , wielomianu  $M(s)$ , wspólnego dla wszystkich transmitancji, podane są po macierzach  $A$ ,  $B$ .

Wyniki obliczeń dotyczące macierzy  $A$ ,  $B$  oraz wszystkich transmitancji ograniczono do dziewięciu zmiennych, pomijając zmienne  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , które nie występują w prawych stronach układu równań stanowiących model samolotu. Uwzględnione zmienne oraz ich uporządkowanie względem elementów macierzy  $A$ ,  $B$  przedstawiono na rys. 5.

Wyniki obliczeń dotyczące transmitancji przedstawione są w postaci kolumn liczb. Pierwsza kolumna zawiera współczynniki wielomianu, zaś druga i trzecia kolejno części rzeczywiste i urojone jego pierwiastków. Pary liczb naturalnych  $(i, j)$  oznaczają kolejno numer wyjścia (zmiennej stanu) -  $i$  oraz numer wejścia (sterowania) -  $j$  w kolejności podanej powyżej.

1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 u v w p q r  $\Theta$   $\phi$   $\psi$

wyniki linearyzacji:

macierz A								
-0.013	0.020	0.009	-0.000	1.400	-0.000	-9.810	-0.000	-0.000
-0.020	-0.007	0.000	-1.400	0.000	-199.995	0.026	8.935	-0.000
-0.135	-0.000	-5.165	-0.000	199.995	-0.000	0.057	-4.048	-0.000
0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.051	-0.023	0.000	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.032	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.000	-0.000	0.000	-0.003	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.000	0.000	0.911	-0.413	-0.000	-0.022	-0.000
0.000	0.000	-0.000	1.000	-0.003	-0.006	0.022	-0.000	-0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.413	0.911	-0.000	0.000	0.000
macierz b								
0.000	-0.000	-0.000	0.010					
-0.000	-0.060	-0.000	-0.000					
-0.000	-0.000	-0.012	0.000					
-0.120	-0.012	0.000	0.000					
-0.000	-0.000	-0.048	-0.000					
-0.000	0.010	0.000	-0.000					
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000					
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000					
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000					

$\delta_l$   $\delta_h$   $\delta_v$   $\delta_c$

	$a_i$	$Re s_i$	$Im s_i$
$i \downarrow$	5.184600299799179	0.01902445384	0.00000000000
	0.103054693433104	-0.02575336014	0.00000000000
	0.013284776878219	-0.01359077454	0.02480713857
	0.000205408108686	-0.01359077454	-0.02480713857
	0.000007219815469	0.00985959765	0.02871232172
	0.000000105386914	0.00985959765	-0.02871232172
	-0.000000000032792	-0.00263210646	0.04298359194
	0.000000000003200	-0.00263210646	-0.04298359194
	-0.000000000003044	-5.16514482679	0.00000000000

ir=9 ier=0

Rys. 5. Przykładowe macierze A, B układu zlinearyzowanego uporządkowane odpowiednio do wypisanych składowych wektorów  $x_i$  u

Fig. 5. An example of matrices A and B of a linearized system

## 6. OPIS PROGRAMU TT

Program TT służy do linearyzacji równań samolotu w punkcie pracy ustalonej odpowiadającej lotowi po prostej lub w zakręcie ustalonym.

Program realizuje następujące funkcje:

- wrowadzanie danych,
- obliczenia statyczne,
- linearyzacja równań stanu,
- wyznaczanie równania charakterystycznego,
- obliczanie biegunów transmitancji,
- wyznaczanie liczników transmitancji,
- obliczanie zer transmitancji.

Danymi jednoznacznie określającymi punkt pracy ustalonej są: promień okręgu  $r$  oraz prędkość samolotu  $v_c$ . W przypadku lotu po prostej należy wprowadzić promień o dużej wartości, np.  $r=10^9$ .

Układy równań nieliniowych determinujących parametry punktu równowagi statycznej rozwiązuje się poprzez minimalizację odpowiednio skonstruowanej funkcji celu. Do minimalizacji numerycznej wykorzystano wariant metody Davidona-Fletcher-Powella zakodowanej jako procedura DFPMIN.

Równania stanu samolotu są linearyzowane na drodze numerycznej. W efekcie linearyzacji uzyskuje się  $9 \times 9$  wymiarową macierz stanu  $A$  oraz  $9 \times 4$  wymiarową macierz sterowań  $B$ .

Na podstawie pary  $(A, B)$  wyznacza się transmitancje operatorowe pomiędzy zmiennymi stanu  $u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, \psi$  a sterowaniami  $\delta l, \delta v, \delta h, \delta c$ .

Do obliczenia transmitancji korzysta się z algorytmu Fadeeva-Leverriere'a. Zera i bieguny transmitancji oblicza się za pomocą procedury DPREM realizującej metodę iteracyjną Bairstowa. Wyniki obliczeń wyświetla się na ekranie monitora w postaci kolumn liczb. Pierwsza kolumna zawiera

współczynniki wielomianu zaś, druga i trzecia kolejno części rzeczywiste i urojone jego pierwiastków. Pary liczb naturalnych  $(i, j)$  oznaczają kolejno numer wyjścia (zmiennej stanu) -  $i$  oraz numer wejścia (sterowania) -  $j$  w kolejności podanej powyżej.

## 7. PODSUMOWANIE

Model dynamiczny samolotu zapisany w konwencji zmiennych stanu stanowi układ 12 nieliniowych zwyczajnych równań różniczkowych, każde rzędu pierwszego. Wielkościami wyjściowymi dla celów sterowania, opisującymi samolot jako bryłę sztywną w przestrzeni trójwymiarowej, są współrzędne położenia jego środka ciężkości w nieruchomym układzie współrzędnych i trzy kąty Eulera określające przestrzenną orientację układu samolotu względem nieruchomego układu współrzędnych. Wielkościami sterującymi są wychylenia lotek, sterów wysokości i kierunku oraz ciąg silnika.

Do określenia dynamicznych właściwości samolotu oraz dla celów syntezy praw sterowania niezbędna jest linearyzacja modelu. Przedstawiona w pracy linearyzacja analityczna pozwala na uzyskanie zależności właściwości dynamicznych od parametrów modelu. Linearyzacja numeryczna, w której pochodne aproksymowane są przez odpowiednie ilorazy różnicowe, wymaga właściwego doboru wielkości przyrostów argumentów. W pracy zamieszczono dodatkowo wyniki konwersji modelu zlinearyzowanego z przestrzeni stanu do postaci transmitancyjnej.

## LITERATURA

- [1] Chandrasekhar J., Rao M.P.R.: A new model reference adaptive aircraft controller. 10-th World Congress on Automatic Control, IFAC, Monachium, 1987, vol. 6, pp. 128 -143.
- [2] Fiszdon W.: Mechanika lotu. PWN, Warszawa 1961,
- [3] Molicki W.: Wpływ elementów wirujących zespołu napędowego na własności dynamiczne samolotu w locie. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1986.
- [4] Redeker A.: An open-loop control system for a state space flight controller. 10-th World Congress on Automatic Control, IFAC, Monachium, 1987, vol. 6, pp. 125-131.
- [5] Wojciechowski K., Ordys A., Polańska J.: Model przestrzennego ruchu samolotu dla celów symulacji i sterowania. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, 1989, (złożone do druku).
- [6] Wojciechowski K., Polański A., Simek K., Ordys A.: Synteza prawa sterowania ruchem samolotu w przestrzeni trójwymiarowej z wykorzystaniem informacji wizyjnej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Gliwice 1989 (przyjęte do druku).
- [7] Bukow W H.: Adaptiwnaja priedskaziwajuszczaja sistemiia uprawlenija poletom. Nauka, Moskwa 1987.

Recenzent: Doc. dr inż. Bohdan WOŁCZAK

Wpłynęło do Redakcji 29.05.1991 r.

## 3-D AIRCRAFT MOTION MODEL AND ITS LINEARIZATION

## Abstract

A model of the 3D aircraft motion including the functional form of the relation between coefficient and incidence angles, slide slip and elevator, rudder and aileron displacements as well as the functional form of the torque coefficient dependence on the same arguments is presented. The model is formulated for control synthesis purposes, the exemplary values of all parameters occurring in the model are also presented. To make easier the physical interpretation of the variables occurring in the model detailed definitions of the used coordinate systems and their mutual relations are presented.

The analytical model linearization is presented in details and an analytical functional form of the matrix entries defining the linearized model is determined. In the case when functional forms are not required a numerical linearization may be performed. For this purpose the program TT, evaluating additionally zeros and poles of transfer functions between the input controls and the output variables is used in the paper.