ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: AUTOMATYKA z. 107 Nr kol. 1149

Walery JURKIEWICZ
Marian BŁACHUTA
Konrad WOJCIECHOWSKI

SYNTEZA PRAWA STEROWANIA*

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwa algorytmy wielowymiarowego regulatora realizującego stabilizację trzech kątów Eulera dla samolotu. Pierwszy z algorytmów bazuje na rozwiązaniu problemu liniowo-kwadratowego sformułowanego dla równań zlinearyzowanych. Drugi oparty jest na tzw. metodzie lokalizacji, nie wymaga linearyzacji modelu.

CONTROL LAW SYNTHESIS

Summary. Two algoritl.ms of a multidimensional controller stabilizing three Euler angels defining an attitude of an aircraft modeled by 12 nonlinear differential equations in a state space are presented.

The first algorithm is based on the LQ regulator solution formulated for the linearised aircraft state equation, the second one is based on a location method and it does not require model linearization.

In the paper theoretical and simulation considerations confirming correctness and efficiency of the proposed methods are presented.

СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Резюме. В работе представлены два алгоритма многомерного регулятора реализирующего стабилизацию трех углов Эйлера для самолета. Первый алгоритм основан на решении линейно-квадратной проблемы сформулированной для линеаризованных уравнений. Второй, который основан на т. н. методе локализации не требует линеаризации модели.

* Praca finansowana z programu CPBP 02.13 oraz dodatkowo z grantu BK 301.

1. WPROWADZENIE

Istotnym elementem układu sterowania z wykorzystaniem informacji wizyjnej według koncepcji przedstawionej w [10] jest wielowymiarowy regulator realizujący zadania stabilizacji lub nadążania. Informacją wejściową regulatora są parametry ruchu sterowanej bryły sztywnej (współrzędne środka ciężkości i trzy kąty Eulera lub odpowiednie odchyłki tych wielkości względem wartości zadanych), wielkościami wyjściowymi są sterowania. W przypadku samolotu stanowią je wychylenia kątowe lotek, sterów wysokości i kierunku oraz procentowy ciąg silnika, które w ogólniejszej interpretacji odpowiadają momentom obrotowym względem osi układu związanego z samolotem i sile odziałującej na samolot. Taki wybór wielkości sterujących i wyjściowych prowadzi do modelu silnie nieliniowego z silnymi sprzężeniami skrośnymi. Efekt ten jest typowy dla układów sterowania z informacją wizyjną. W większości bowiem układów fizycznych wielkości sterujące wpływają na zmianę tylko jednej wielkości w układzie współrzędnych związanych z bryłą, podczas gdy zadania sterowania formułowane są względem układu inercyjnego, wobec względem którego układ współrzędnych bryły może mieć dowolną orientację.

W pracy przedstawiono dwie grupy metod syntezy regulatora realizującego wymagane zadanie stabilizacji lub nadążania. Metody liniowo-kwadratowe polegające na linearyzacji modelu w wybranym punkcie lub wzdłuż wybranej trajektorii i reprezentujące konwencjonalne podejście do problemu syntezy regulatora przedstawiono w p.2.

Przeprowadzone badania symulacyjne pokazały, że uzyskany na tej drodze regulator zapewnia stabilizację w locie po prostej, jeżeli zakłócenia lub warunek początkowy nie wyprowadzają samolotu za daleko od punktu w którym wykonano linearyzację. Synteza regulatora realizującego zadanie nadążania wymagałaby określenia niestacjonarnej lub heurystycznie okresowo aktualizowanej macierzy wzmocnień, z których każda wyliczana byłaby ze stanu ustalonego równania Riccatiego.

W pracy w obszernym p.3 przedstawiono niekonwencjonalną metodę syntezy wielowymiarowego regulatora, w której nie jest wymagana linearyzacja modelu, jak również jest możliwe uzyskanie pożądanych dynamicznych własności układu zamkniętego. Przeprowadzone w pracy [11] obszerne badania symulacyjne pokazały efektywność metody.

2. METODY LINIOWO-KWADRATOWE

Jednym z zadań sterowania obiektem dynamicznym na podstawie informacji wizyjnej jest zadanie nadążania za zadaną trajektorią

Niech model samolotu otrzymany w wyniku linearyzacji, a następnie dyskretyzacji będzie dany w postaci

$$x_{k+1}=Fx_k + Gu_k \; ; \; x_1 \tag{1}$$

gdzie:

$$x^T=[u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, \psi, x, y, z]$$

$$u^T=[u_1, u_2, u_3]$$

Przyjmujemy wskaźnik jakości nadążania w postaci:

$$q = \sum_{k=1}^{N} (x_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^T P_{k+1} (x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})+u_k^T Q_k u_k \tag{2}$$

gdzie N jest długością horyzontu sterowania, zaś $\bar{x}_k$, k=2,.., N+1 jest trajektorią, za którą odbywa się nadążanie.

Łatwo sprawdzić, że optymalny za ostatnie N-k kroków wskaźnik jakości może być przedstawiony w postaci:

$$(x_{k+1}-r_{k+1})^T K_{k+1}(x_{k+1}-r_{k+1}) \tag{3}$$

stąd optymalne prawo sterowania wyraża się zależnością:

$$u_k^* = -(Q_k + G^T K_{k+1} G)^{-1} G^T K_{k+1} F(x_k - F_{k+1}^{-1} r) \tag{4}$$

k=1, .., N

gdzie:

$$K_k = F^T(K_{k+1} - K_{k+1} G (Q_k + G^T K_{k+1} G)^{-1} G^T K_{k+1}) F + P_k \tag{5}$$

$$K_{N+1} = P_{N+1}, \quad k=1, .., N \tag{6}$$

$$r_k = (1 - K_k^{-1} P_k) F^{-1} r_k + K_k^{-1} P_k \bar{x}_k \tag{7}$$

$$r_{N+1} = \bar{x}_{N+1}, \quad k=1, ..., N$$

Jeżeli dodatkowo założyć, że trajektoria, za którą odbywa się nadążanie, spełnia równanie (1), ale u_k=0, u=1,...,N, to otrzymuje się $r_k = \bar{x}_k$, co pozwala przepisać (4) w postaci:

$$u_k^* = -(Q_k + G^T K_{k+1} G)^{-1} K_{k+1} F(x_k - \bar{x}_k) \tag{8}$$

Kolejne uproszczenie polega na przyjęciu stanu ustalonego równania (5). Oznaczmy

$$K = \lim K_k \quad \text{przy} \quad Q_k = Q\ , \ P_k = P.$$

Wyrażenie na postać sterowania optymalnego można obecnie zapisać w postaci:

$$u_k^* = - W (x_k - \bar{x}_k) \tag{9}$$

W przedstawionej powyżej syntezie prawa sterowania dla zadania nadążania parametrem decyzyjnym są macierze wag P_k, Q_k. Macierze te decydują o charakterze procesów przejściowych, jednocześnie brak jest uznanych metod ich doboru.

W pracy przyjmowano diagonalne postacie tych macierzy z różnymi wartościami elementów na przekątnej i dla każdej z nich wyznaczono macierz W.

3. METODA LOKALIZACJI

W zakresie syntezy układu stabilizacji przedstawiono kolejno metodę wyboru struktury prawa sterowania i doboru jego parametrów liczbowych, warunki realizowalności pożądanej dynamiki trajektorii wyjściowych, jak również dyskusję wpływu filtrów różniczkujących na własności układu zamkniętego.

3.1. Sformułowanie zadania sterowania

Rozpatruje się zadanie stabilizacji ruchu samolotu w przestrzeni trójwymiarowej. Celem sterowania jest stabilizacja kątów Eulera określających orientację samolotu względem układu inercyjnego. Mamy zatem

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \theta_0(t) \ , \quad \lim_{t\to\infty} \phi(t) = \phi_0(t) \ , \quad \lim_{t\to\infty} \psi(t) = \psi_0(t)$$

gdzie $\theta_0(t)$, $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$ są wartościami zadanymi stabilizowanych kątów. Dodatkowo wymaga się, aby procesy przejściowe

$$\theta(t) \to \theta_0(t), \quad \phi(t) \to \phi_0(t), \quad \psi(t) \to \psi_0(t) \tag{10}$$

stabilizowanych kątów posiadały wymagane własności dynamiczne, były wzajemnie niezależne, jak również nie zależały od zmiennych parametrów obiektu (1)-(4) i działających zakłóceń.

3.2. Struktura prawa sterowania

Odpowiednio do metody syntezy struktury praw sterowania przedstawionej w pracach [14 -18] różniczkujemy względem czasu zmienne wyjściowe $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ przy uwzględnieniu równań modelu. Z postaci wyrażeń (2),(4) wynika, że drugie pochodne tych zmiennych zależą algebraicznie od zmiennych sterujących δ_h, δ_v, δ_l. Mamy

$$\begin{bmatrix}\theta^{(2)}\\ \phi^{(2)}\\ \psi^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_\theta(\cdot)\\ f_\phi(\cdot)\\ f_\psi(\cdot)\end{bmatrix} + B(\cdot)\begin{bmatrix}\delta_h\\ \delta_v\\ \delta_l\end{bmatrix} \tag{11}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix}f_\theta(\theta,\phi,\psi,u,v,w,\rho,q,r,v_{wx},v_{wy},v_{wz})\\ f_\phi(\theta,\phi,\psi,u,v,w,\rho,q,r,v_{wx},v_{wy},v_{wz})\\ f_\psi(\theta,\phi,\psi,u,v,w,\rho,q,r,v_{wx},v_{wy},v_{wz})\end{bmatrix} = \left\{\dot\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}T_\omega(\theta,\phi)\right] + \dot\phi\left[\frac{\partial}{\partial\phi}T_\omega(\theta,\phi)\right]\right\}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} +$$

$$+T_\omega(\theta,\phi)\left\{\begin{bmatrix}(J_y-J_z)J_x^{-1}rq\\ (J_z-J_x)J_y^{-1}pr\\ (J_x-J_y)J_z^{-1}qp\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\rho(h)v_a^2J^{-1}D_{SP}(\alpha,\beta)SL\begin{bmatrix}m_x^o+m_x^\alpha\alpha+m_x^\beta\beta\\ m_y^o+m_y^\alpha\alpha+m_y^\beta\beta\\ m_z^o+m_z^\alpha\alpha+m_z^\beta\beta\end{bmatrix}\right\}, \tag{12}$$

$$B(\cdot) = \frac{1}{2}\rho(h)\, v_a^2T_\omega(\theta,\phi)\, J^{-1}D_{SP}(\alpha,\beta)\ S\ L\ B_1,\quad \text{gdzie } B_1 = \begin{bmatrix}m_x^h & m_x^v & m_x^l\\ m_y^h & m_y^v & m_y^l\\ m_z^h & m_z^v & m_z^l\end{bmatrix},$$

$$\alpha = \alpha(\theta,\phi,\psi,u,w,v_{wx},v_{wy},v_{wz}),\quad \beta = \beta(\theta,\phi,\psi,u,v,w,v_{wx},v_{wy},v_{wz})$$

Zauważmy, że wartości funkcji $f_\theta(\cdot)$, $f_\phi(\cdot)$, $f_\psi(\cdot)$, podobnie jak i elementy macierzy $B(\cdot)_j$ są ograniczone w odpowiednich przedziałach. Dodatkowo zachodzi również własność $\det B(\cdot) \neq 0$.

Odpowiednio do powyższego przyjmujemy prawo sterowania o następującej strukturze

$$\begin{bmatrix} \delta_h \\ \delta_v \\ \delta_l \end{bmatrix} = K_0 K_1 \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\dot{\theta}, \theta, \theta_0) \\ F_\phi(\dot{\phi}, \phi, \phi_0) \\ F_\psi(\dot{\psi}, \psi, \psi_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} \right\} \tag{13}$$

gdzie $K_1 = \operatorname{diag}\{k_\theta, k_\phi, k_\psi\}$ jest macierzą współczynników wzmocnienia, K_0 jest macierzą dopasowania F_θ, F_ϕ, F_ψ są składowymi funkcji wektorowej określającej pożądane dynamiczne własności zmiennych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ odpowiednio do następującego układu autonomicznych równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \theta^{(2)} &= F_\theta(\theta^{(1)}, \theta, \theta_0) \\ \phi^{(2)} &= F_\phi(\phi^{(1)}, \phi, \phi_0) \\ \psi^{(2)} &= F_\psi(\psi^{(1)}, \psi, \psi_0) \end{aligned} \tag{14}$$

Parametry równań różniczkowych (14) wybieramy odpowiednio do wymagań odnośnie do procesów przejściowych (10) i ograniczeń na wartości sterowań. Przykładowo, pożądana dynamika może być zadana układem następujących liniowych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \theta^{(2)} &= \tau_\theta^{-2}[\,-2\, a_\theta\, \tau_\theta\, \theta^{(1)} - \theta + \theta_0] \\ \phi^{(2)} &= \tau_\phi^{-2}[\,-2\, a_\phi\, \tau_\phi\, \phi^{(1)} - \phi + \phi_0] \\ \psi^{(2)} &= \tau_\psi^{-2}[\,-2\, a_\psi\, \tau_\psi\, \psi^{(1)} - \psi + \psi_0] \end{aligned} \tag{15}$$

W tym przypadku przez wybór parametrów τ_θ, τ_ϕ, τ_ψ, a_θ, a_ϕ, a_ψ zadajemy czasy trwania i charakter procesów przejsciowych odpowiednio dla zmiennych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$.

Macierz K_0 można przyjąć w postaci

$$K_0(\cdot) = \left\{T_\omega(\theta,\phi)\ J^{-1} D_{sp}(\alpha,\beta)\ S\ L\ B_1\right\}^{-1} \tag{16}$$

Macierz K_0 o postaci (16) jest tylko jedną z możliwych. Ogólnie macierz ta powinna byc wybrana tak, aby w przyjętych przedziałach zmian parametrów i wartosci zmiennych znaki diagonalnych elementów macierzy $B(\cdot)\cdot K_0(\cdot)$ były stałe.

Ponieważ z postaci wyrażenia (5) wynika, że dla małych wartosci kątów α i β macierz $D_{SP}(\alpha,\beta)$ jest bliska macierzy diagonalnej $I_3 \in R^{3\times3}$, to dla uproszczenia bedziemy dalej przyjmowac macierz K_0 o postaci

$$K_0(\cdot) = \left\{ T_\omega(\theta,\phi)\ J^{-1}\ S\ L\ B_1\right\}^{-1}$$

Dla celow pracy korzystnie jest przyjąc macierz K_1 w postaci

$$K_1 = k\ u^{-2}\ \overline{K}_1, \qquad \text{gdzie}\ \overline{K}_1 = \mathrm{diag}\ \{\ \overline{k}_\theta,\ \overline{k}_\phi,\ \overline{k}_\psi\} . \tag{17}$$

Jest to praktycznie możliwe, ponieważ wielkosc u jest mierzona.

3.3. Własności układu zamkniętego

Wstępnie własnosci układu zamkniętego rozpatrzymy bez uwzględniania wpływu filtrów rożniczkujących, pozwalających na uzyskanie "ocen" czasowych pochodnych wielkosci wyjsciowych. Podstawiając prawo sterowania (13) do (11) otrzymujemy następujące wyrażenie

$$\begin{bmatrix}\theta^{(2)}(k)\\ \phi^{(2)}(k)\\ \psi^{(2)}(k)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_\theta(\dot\theta,\theta,\theta_0)\\ F_\phi(\dot\phi,\phi,\phi_0)\\ F_\psi(\dot\psi,\psi,\psi_0)\end{bmatrix} + k^{-1}\left\{k^{-1} I_3 + B(\cdot)K_0\overline{K}_1\right\}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}f_\theta(\cdot)\\ f_\phi(\cdot)\\ f_\psi(\cdot)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}F_\theta(\dot\theta,\theta,\theta_0)\\ F_\phi(\dot\phi,\phi,\phi_0)\\ F_\psi(\dot\psi,\psi,\psi_0)\end{bmatrix}\right\} \tag{18}$$

Dla $k \to \infty$ otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \theta^{(2)}(k) \\ \phi^{(2)}(k) \\ \psi^{(2)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\theta(\dot{\theta},\theta,\theta_o) \\ F_\phi(\dot{\phi},\phi,\phi_o) \\ F_\psi(\dot{\psi},\psi,\psi_o) \end{bmatrix} \tag{19}$$

Można zatem stwierdzić na podstawie (19), że algorytm sterowania (13) zapewnia możliwość uzyskania, zadanych za pomocą równań różniczkowych (14), dynamicznych własności zmiennych wyjściowych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$. Równocześnie uzyskuje się autonomizację torów sterowania i niezależność własności (14) od parametrów obiektu i działających zakłóceń.

Rozpatrzmy czasowe przebiegi sterowań δ_h, δ_v, δ_l, wynikające z przyjętego prawa sterowania. Podstawiając (11) do (13) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \delta_h(k) \\ \delta_v(k) \\ \delta_l(k) \end{bmatrix} = k^{-1}\left\{k^{-1} I_3 + K_o\bar{K}_1 B(\cdot)\right\}^{-1} K_o\bar{K}_1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\dot{\theta},\theta,\theta_o) \\ F_\phi(\dot{\phi},\phi,\phi_o) \\ F_\psi(\dot{\psi},\psi,\psi_o) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix} \right\}$$

skąd po przejściu do granicy mamy:

$$\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \delta_h(k) \\ \delta_v(k) \\ \delta_l(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_h^a \\ \delta_v^a \\ \delta_l^a \end{bmatrix} = \{B(\cdot)\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\dot{\theta},\theta,\theta_o) \\ F_\phi(\dot{\phi},\phi,\phi_o) \\ F_\psi(\dot{\psi},\psi,\psi_o) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix} \right\} \tag{20}$$

gdzie δ_h^a, δ_v^a, δ_l^a są asymptotycznymi postaciami praw sterowania.

3.4. Analiza realizowalności zadanej dynamiki

Zadana dynamika trajektorii wyjściowych (14) jest realizowalna praktycznie, jeżeli asymptotyczne postaci praw sterowania spełniają warunek [17; 18]

$$\lim_{t \to \infty} \sup \{ [\delta_h^a(t)]^2 + [\delta_v^a(t)]^2 + [\delta_l^a(t)]^2 \} < \infty \qquad (21)$$

W szczególności w rozpatrywanym przypadku zakłada się

$$\lim_{t \to \infty} \sup [\delta_h^a(t)]^2 < [\delta_h^{max}]^2$$

$$\lim_{t \to \infty} \sup [\delta_v^a(t)]^2 < [\delta_v^{max}]^2 \qquad (22)$$

$$\lim_{t \to \infty} \sup [\delta_l^a(t)]^2 < [\delta_l^{max}]^2$$

W celu analizy realizowalności dynamiki zadanej równaniami (14) wykorzystamy metodę przedstawioną w pracy [19]. Podstawą metody jest przekształcenie modelu do specjalnej postaci kanonicznej z nowym wektorem stanu zawierającym zmienne wyjściowe oraz niektóre ich pochodne.
W rozpatrywanym przypadku z postaci wyrażenia (2) wynika, że zmienne p, q, r można wyeliminować z wektora stanu.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = T_{\omega}^{-1}(\theta, \phi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Wprowadzony nowy wektor stanu ma postać

$$x,\ y,\ z,\ \theta,\ \phi,\ \psi,\ \dot{\theta},\ \dot{\phi},\ \dot{\psi},\ u,\ v,\ w$$

Stąd model przestrzennego ruchu samolotu może być zapisany w postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{cs}(\theta, \phi, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\theta}(\cdot) \\ f_{\phi}(\cdot) \\ f_{\psi}(\cdot) \end{bmatrix} + B(\cdot) \begin{bmatrix} \delta_h \\ \delta_v \\ \delta_l \end{bmatrix} \qquad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} T_{\omega}^{-1}(\theta,\phi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + D_{SG}(\theta,\phi,\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_c}{m}\,\delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2m}\,\rho(h)\, v_a^2\, D_{SP}(\alpha,\beta)\, S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

Dla sprawdzenia warunku (21) podstawiamy wyrażenie (20) do układu (24) otrzymując równania układu zamkniętego o postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{GS}(\theta,\phi,\psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\theta}(\dot{\theta},\theta,\theta_0) \\ F_{\phi}(\dot{\phi},\phi,\phi_0) \\ F_{\psi}(\dot{\psi},\psi,\psi_0) \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} T_{\omega}^{-1}(\theta,\phi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} D_{SG}(\theta,\phi,\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_c}{m}\,\delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2m}\,\rho(h)\, v_a^2\, D_{SP}(\alpha,\beta)\, S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

Jeżeli rozwiązania otrzymanego układu równań (25) są stabilne w przyjętym obszarze pracy, to warunek (21) jest spełniony i dynamika zadana równaniami (14) jest realizowalna.

W rozpatrywanym przypadku z wyrażeń (12), (20) wynika, że aby zachodziła własność (21), wystarczy stabilność procesów u(t), v(t), w(t). Przy tym jeżeli własność (21) zachodzi, to z wyrażenia (20) wynika, że warunki (22) można spełnić przez zmianę parametrów w równaniu zadanej dynamiki (15). W pracy rozpatrywane jest zadanie stabilizacji (10), stąd dla uproszczenia rozważań, zamiast badać stabilność rozwiązań układu (25), wystarczy rozpatrzeć szczególny przypadek realizowalności przy stabilizacji zmiennych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$.

3.5. Analiza trajektorii osobliwych

Szczególnym przypadkiem analizy realizowalności trajektorii wyjściowych jest analiza realizowalności ich stabilizacji na zadanych wartościach, tj. [19,20]:

$$\theta(t) = \theta_0 = \text{const}, \ \phi(t) = \phi_0 = \text{const}, \ \psi(t) = \psi_0 = \text{const}, \ \forall\ t \in [t_0, \infty)$$

Uwzględniając postacie wyrażeń (14),(15) otrzymujemy, że w zadaniu stabilizacji wielkości wyjściowych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ układ równań (25) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{CS}(\theta, \phi, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = D_{SC}(\theta_0, \phi_0, \psi_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_c}{m} \delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2m} \rho(h) v_a^2 D_{SP}(\alpha, \beta) S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \tag{28}$$

W celu analizy własności układu (27)-(28) wstępnie rozpatrzymy wyrażenia dla asymptotycznych postaci praw sterowania dla przypadku stabilizacji zmiennych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$. Z postaci wyrażeń (14), (15), (20) mamy

$$\begin{bmatrix} \delta_h^a \\ \delta_v^a \\ \delta_l^a \end{bmatrix} = -\{B(\cdot)\}^{-1} \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix} \tag{29}$$

Oprócz tego z równań (23), (27) widać, że w przypadku stabilizacji p = 0 q = 0, r = 0. Zatem uwzględniając postać funkcji (12) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \delta_h^a \\ \delta_v^a \\ \delta_l^a \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} m_x^h & m_x^v & m_x^l \\ m_y^h & m_y^v & m_y^l \\ m_z^h & m_z^v & m_z^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_x^o + m_x^\alpha \alpha + m_x^\beta \beta \\ m_y^o + m_y^\alpha \alpha + m_y^\beta \beta \\ m_z^o + m_z^\alpha \alpha + m_z^\beta \beta \end{bmatrix}$$

Uwzględniając dane z pracy [9] mamy:

$$\delta_h^a = a_{h\alpha}\, \alpha\ ; \qquad \delta_v^a = a_{l\beta}\, \beta\ ; \qquad \delta_l^a = a_{v\beta}\, \beta$$

gdzie

$$a_{h\alpha} = -\frac{m_y^\alpha}{m_y^h} \approx 5.7;\ a_{l\beta} = \frac{m_x^l m_z^\beta}{m_z^l m_x^v - m_z^v m_x^l} \approx 1.38;\ a_{v\beta} = \frac{m_z^\beta m_x^v}{m_z^v m_x^l - m_z^l m_x^v} \approx 13.8$$

Zatem zgodnie z danymi z pracy [9] otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c_x &= c_x^0 + [c_x^{\alpha 2} + c_x^{h2}\, a_{h\alpha}^2]\cdot\alpha^2 + [c_x^{v2} a_{v\beta}^2 + c_x^{l2}\, a_{l\beta}^2]\cdot\beta^2 \\ c_y &= [c_y^\beta + c_y^v\, a_{v\beta}]\cdot\beta \\ c_z &= c_z^0 + [c_z^\alpha + c_z^h\, a_{h\alpha}]\cdot\alpha + c_z^{\beta 2}\, \beta^2 \end{aligned} \tag{30}$$

Jeżeli założyć, że

$$|w| \ll u, \quad |v| \ll u, \quad |v_{wx}| \ll u, \quad |v_{wy}| \ll u, \quad |v_{wz}| \ll u \tag{31}$$

gdzie u>0, wtedy $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$ i α, β można przedstawić w następującej postaci przybliżonej:

$$\alpha \approx \frac{w}{u}\,[1 + \varphi_{\alpha 1}(u,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})] + \varphi_{\alpha 2}(u,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})$$

$$\beta \approx \frac{v}{u}\,[1 + \varphi_{\beta 1}(u,v,w,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})] + \tag{32}$$

$$+ \varphi_{\beta 2}(u,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})[1 + \varphi_{\beta 1}(u,v,w,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})]$$

odpowiednio

$$v_a \approx u\,[1 + \varphi_{\hat{\beta}3}(u,v,w,\theta_0,\phi_0,\psi_0,v_{wx},v_{wy},v_{wz})] \tag{33}$$

gdzie $\varphi_{\alpha 1} \ll 1$, $\varphi_{\alpha 2} \ll 1$, $\varphi_{\beta 1} \ll 1$, $\varphi_{\beta 2} \ll 1$, $\varphi_{\beta 3} \ll 1$.

Podstawmy wyrażenia (30), (32), (33) do (22). Pomijając wyrazy wyższych rzędów otrzymujemy rownania opisujące procesy $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ w rozpatrywanym zadaniu stabilizacji. Mamy:

$$\dot{u} = \left\{\frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot S_x\cdot c_x^0\cdot u\right\}\cdot u + \frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u^2\cdot S_x\Big\{\;[c_x^{\alpha 2} + c_x^{h2} a_{h\alpha}^2]\cdot\alpha^2 +$$

$$+ [c_x^{v2}\cdot a_{v\beta}^2 + c_x^{12}\cdot a_{1\beta}^2]\cdot\beta^2\Big\} + f_u(\cdot) + \ldots$$

$$\dot{v} = \left\{\frac{1}{2m}\,\rho(h)\cdot u\cdot S_y[c_y^{\beta} + c_y^{v}\cdot a_{v\beta}]\right\}\cdot v + \frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u^2 S_y\Big\{[c_y^{\beta} + c_y^{v}\cdot a_{v\beta}]\cdot$$

$$\left[\frac{v}{u}\,\varphi_{\beta 1}(\cdot) + \varphi_{\beta 2}(\cdot)[1 + \varphi_{\beta 1}(\cdot)]\right]\Big\} + f_v(\cdot) + \ldots$$

$$\dot{w} = \left\{\frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u\cdot S_z[c_z^{\alpha} + c_z^{h} a_{h\alpha}]\right\}\cdot w + \frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u^2\cdot S_z\Big\{[c_z^{\alpha} + c_z^{h}\cdot a_{h\alpha}]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{w}{u}\,\varphi_{\alpha 1}(\cdot) + \varphi_{\alpha 2}(\cdot)\right]\Big\} + f_w(\cdot) + \ldots$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} f_u(\cdot) \\ f_v(\cdot) \\ f_w(\cdot) \end{bmatrix} = D_{SC}(\theta_0,\phi_0,\psi_0)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{a_c}{m}\,\delta_c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z danymi zamieszczonymi w [9] otrzymujemy następujące własności:

$$\left\{\frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot S_x\cdot c_x^o\cdot u\right\} < 0$$

$$\left\{\frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u\cdot S_y\cdot [c_y^{\beta} + c_y^{v}\cdot a_{v\beta}]\right\} < 0$$

$$\left\{\frac{1}{2\,m}\,\rho(h)\cdot u\cdot S_z\cdot [c_z^{\alpha} + c_z^{h}\cdot a_{h\alpha}]\right\} < 0$$

W wyniku można stwierdzić, że w rozpatrywanym przypadku stabilizacji w przestrzeni stanów układu (28) istnieją obszary, w których procesy u(t), v(t), w(t) są stabilne przy spełnieniu powyższych założeń.

Odpowiednio do tego warunek (21) będzie spełniony i zadanie stabilizacji zmiennych $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ jest realizowalne.

3.6. Dokładność realizacji zadanej dynamiki

Dla określenia wielkości błędu realizacji zadanej dynamiki wyjścia występującego przy skończonych wartościach współczynników wzmocnień k_θ, k_ϕ, k_ψ wykorzystać można zależności przedstawione w pracach [13,20].

Oznaczmy przez

$$\Delta_\theta^F = F_\theta - \theta^{(2)}, \quad \Delta_\phi^F = F_\phi - \phi^{(2)}, \quad \Delta_\psi^F = F_\psi - \psi^{(2)} \tag{34}$$

błędy realizacji zadanych dynamik F_θ, F_ϕ, F_ψ. Załóżmy, że dopuszczalne wartości błedów powinny spełniać następujące ograniczenia:

$$|\Delta_\theta^F| \le 0.05\,|F_\theta|_{max}, \quad |\Delta_\phi^F| \le 0.05\,|F_\phi|_{max}, \quad |\Delta_\psi^F| \le 0.05\,|F_\psi|_{max}$$

Zatem, uwzględniając wyrażenia (18),(34), otrzymujemy, że w układzie zamkniętym

$$\begin{bmatrix} \Delta_\theta^F \\ \Delta_\phi^F \\ \Delta_\psi^F \end{bmatrix} = k^{-1} \left\{ k^{-1} I_3 + B(\cdot)\, K_0\, \overline{K}_1 \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\dot\theta, \theta, \theta_0) \\ F_\phi(\dot\phi, \phi, \phi_0) \\ F_\psi(\dot\psi, \psi, \psi_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix} \right\}$$

Załóżmy, że macierze K_0, K_1 wybrane zostały odpowiednio do (16),(17), współczynnik k jest wystarczająco duży i spełnione są warunki (31). Dla wyznaczenia wartości współczynników k_θ, k_ϕ, k_ψ zastosować można następujące zależności przybliżone

$$k_\theta = k\,\overline{k}_\theta \geq 2\,\rho^{-1}(h)\{|F_\theta(\cdot)-f_\theta(\cdot)|_{max}/(0.05|F_\theta(\cdot)|_{max})\} ;$$

$$k_\phi = k\,\overline{k}_\phi \geq 2\,\rho^{-1}(h)\{|F_\phi(\cdot)-f_\phi(\cdot)|_{max}/(0.05|F_\phi(\cdot)|_{max})\} ; \tag{35}$$

$$k_\psi = k\,\overline{k}_\psi \geq 2\,\rho^{-1}(h)\{|F_\psi(\cdot)-f_\psi(\cdot)|_{max}/(0.05|F_\psi(\cdot)|_{max})\} .$$

Rozpatrzmy wielkości błędu realizacji wielkości θ_0, ϕ_0, ψ_0 w stanie ustalonym przy skończonej wartości współczynników wzmocnienia k_θ, k_ϕ, k_ψ. Mamy

$$\theta^{(2)}(t) \equiv 0, \quad \phi^{(2)}(t) \equiv 0, \quad \psi^{(2)}(t) \equiv 0 ;$$

oraz

$$\theta(t) = \theta_s, \quad \phi(t) = \phi_s, \quad \psi(t) = \psi_s$$

gdzie θ_s, ϕ_s, ψ_s, są wartościami ustalonymi (dokładniej quasi-ustalonymi). Oznaczając przez

$$\Delta_\theta^s = \theta_0 - \theta_s, \quad \Delta_\phi^s = \phi_0 - \phi_s, \quad \Delta_\psi^s = \psi_0 - \psi_s$$

błędy realizacji w stanie ustalonym, można sformułować następujący warunek:

$$|\Delta^s_\theta| \le |\Delta^s_\theta|_{max}, \quad |\Delta^s_\phi| \le |\Delta^s_\phi|_{max}, \quad |\Delta^s_\psi| \le |\Delta^s_\psi|_{max}.$$

Z wyrażeń (11),(13) i (15) wynika, że w stanie ustalonym obowiązuje następująca zależność

$$\begin{bmatrix} \Delta^s_\theta \\ \Delta^s_\phi \\ \Delta^s_\psi \end{bmatrix} = - k^{-1} [\, B(\cdot) K_0 \bar{K}_1 T \,]^{-1} \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix}$$

gdzie $T = \mathrm{diag}\,\{\tau_\theta^{-2}, \tau_\phi^{-2}, \tau_\psi^{-2}\}$. Przy spełnieniu wymienionych powyżej założeń wykorzystać można następujące przybliżone zależności

$$k_\theta = k\,\bar{k}_\theta \ge 2\,\rho^{-1}(h)\tau_\theta^2 |f_\theta(\cdot)|_s / |\Delta^s_\theta|_{max}$$

$$k_\phi = k\,\bar{k}_\phi \ge 2\,\rho^{-1}(h)\tau_\phi^2 |f_\phi(\cdot)|_s / |\Delta^s_\phi|_{max} \qquad (36)$$

$$k_\psi = k\,\bar{k}_\psi \ge 2\,\rho^{-1}(h)\tau_\psi^2 |f_\psi(\cdot)|_s / |\Delta^s_\psi|_{max}$$

gdzie $|f(\cdot)|_s$ jest wartością modułu funkcji $f(\cdot)$ w stanie ustalonym.

Wykorzystując powyższe nierówności możemy wybrać wartości współczynników wzmocnień k_θ, k_ϕ, k_ψ tak by jednocześnie były spełnione wymagania odnośnie do dopuszczalnej wielkości błędu realizacji zadanej trajektorii wyjściowej w stanach przejściowym i ustalonym.

3.7. Wpływ filtrów różniczkujących

Odpowiednio do koncepcji sterowania ze sprzężeniem od wektora prędkości argumentami prawa sterowania (13) są pochodne $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$. W praktycznej realizacji sterowania pochodne te nie są dostępne pomiarowo. Zamiast nich wykorzystuje się ich oceny otrzymane w wyniku zastosowania dwu filtrów różniczkujących o postaci [8,14]:

$$\mu_\theta^2\hat{\theta}^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\hat{\theta}^{(1)} + \hat{\theta} = \theta$$

$$\mu_\phi^2\hat{\phi}^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\hat{\phi}^{(1)} + \hat{\phi} = \phi$$

$$\mu_\psi^2\hat{\psi}^{(2)} + 2d_\psi\,\mu_\psi\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi} = \psi$$

Odpowiednio do tego przyjmujemy prawo sterowania w postaci

$$\begin{bmatrix}\delta_h\\ \delta_v\\ \delta_l\end{bmatrix} = K_0K_1\left\{\begin{bmatrix}F_\theta(\hat{\theta}^{(1)},\theta,\theta_0)\\ F_\phi(\hat{\phi}^{(1)},\phi,\phi_0)\\ F_\psi(\hat{\psi}^{(1)},\psi,\psi_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\hat{\theta}^{(2)}\\ \hat{\phi}^{(2)}\\ \hat{\psi}^{(2)}\end{bmatrix}\right\} \tag{37}$$

W wyniku rownania układu zamkniętego mają postać

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = D_{CS}(\theta,\phi,\psi)\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\theta^{(2)}\\ \phi^{(2)}\\ \psi^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_\theta(\cdot)\\ f_\phi(\cdot)\\ f_\psi(\cdot)\end{bmatrix} + B(\cdot)K_0K_1\left\{\begin{bmatrix}F_\theta(\hat{\theta}^{(1)},\theta,\theta_0)\\ F_\phi(\hat{\phi}^{(1)},\phi,\phi_0)\\ F_\psi(\hat{\psi}^{(1)},\psi,\psi_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\hat{\theta}^{(2)}\\ \hat{\phi}^{(2)}\\ \hat{\psi}^{(2)}\end{bmatrix}\right\} \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -w & v\\ w & 0 & -u\\ -v & u & 0\end{bmatrix} T_\omega^{-1}(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + D_{SG}(\theta,\phi,\psi)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ g\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_c}{m}\,\delta_c\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2m}\,\rho(h)\,v_a^2\,D_{SP}(\alpha,\beta)\,S\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{bmatrix}$$

$$\mu_\theta^2\hat{\theta}^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\hat{\theta}^{(1)} + \hat{\theta} = \theta$$

$$\mu_\phi^2\hat{\phi}^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\hat{\phi}^{(1)} + \hat{\phi} = \phi$$

$$\mu_{\psi}^{2}\hat{\psi}^{(2)} - 2d_{\psi}\,\mu_{\psi}\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi} = \psi$$

W powyższym układzie równań μ_θ, μ_ϕ i μ_ψ odgrywają rolę małego parametru, stąd jakościowe własności układu zamkniętego można badać poprzez wyróżnienie dwu podukładów, szybkiego i wolnego. Wydzielenie tych podukładów może być wykonane metodą przedstawioną w pracach [8;13;14], nazywaną metodą "rozszczepienia" filtrów różniczkujących. Opis tej metody zastosowanej w syntezie wielowymiarowego układu sterowania zawiera praca [17], zaś w pracy [3] wykorzystano ją przy syntezie dwuwymiarowego układu sterowania podłużnego ruchu samolotu.

Odpowiednio do metody wprowadzamy następujące dodatkowe zmienne

$$\theta_1 = \hat{\theta}^{(1)},\ \theta_2 = \hat{\theta}^{(2)},\ \phi_1 = \hat{\phi}^{(1)},\quad \phi_2 = \hat{\phi}^{(2)},\ \psi_1 = \hat{\psi}^{(1)},\quad \psi_2 = \hat{\psi}^{(2)}$$

i rozszerzamy układ (38) przez wprowadzenie dodatkowych równań wiążących te zmienne. Otrzymany rozszerzony układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D_{GS}(\theta,\phi,\psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\theta(\cdot) \\ f_\phi(\cdot) \\ f_\psi(\cdot) \end{bmatrix} + B(\cdot)K_0K_1 \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\theta_1,\theta,\theta_0) \\ F_\phi(\phi_1,\phi,\phi_0) \\ F_\psi(\psi_1,\psi,\psi_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} T_\omega^{-1}(\theta,\phi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + D_{SG}(\theta,\phi,\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} +$$

$$- \frac{a_c}{m}\,\delta_c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2m}\,\rho(h)\, v_a^2\, D_{SP}(\alpha,\beta)\, S \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

$$\mu_\theta^2\hat{\theta}^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\hat{\theta}^{(1)} + \hat{\theta} = \theta \tag{39}$$

$$\mu_\phi^2\hat{\phi}^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\hat{\phi}^{(1)} + \hat{\phi} = \phi$$

$$\mu_\psi^2\hat{\psi}^{(2)} + 2d_\psi\,\mu_\psi\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi} = \psi$$

$$\mu_\theta^2\theta_1^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\theta_1^{(1)} + \theta_1 = \theta^{(1)}$$

$$\mu_\phi^2\phi_1^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\phi_1^{(1)} + \phi_1 = \phi^{(1)}$$

$$\mu_\psi^2\psi_1^{(2)} + 2d_\psi\,\mu_\psi\psi_1^{(1)} + \psi_1 = \psi^{(1)}$$

$$\mu_\theta^2\theta_2^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\cdot\theta_2^{(1)} + \theta_2 = f_\theta(\cdot) + \varphi_\theta(\cdot) + \tilde{k}_{11}(\cdot)\cdot k_\theta\{F_\theta(\theta_1,\theta,\theta_0) - \theta_2\}$$

$$\mu_\phi^2\phi_2^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\cdot\theta_2^{(1)} + \phi_2 = f_\phi(\cdot) + \varphi_\phi(\cdot) + \tilde{k}_{22}(\cdot)\cdot k_\phi\{F_\phi(\phi_1,\phi,\phi_0) - \phi_2\}$$

$$\mu_\psi^2\psi_2^{(2)} + 2d_\psi\,\mu_\psi\cdot\psi_2^{(1)} + \psi_2 = f_\psi(\cdot) + \varphi_\psi(\cdot) + \tilde{k}_{33}(\cdot)\cdot k_\psi\{F_\psi(\psi_1,\psi,\psi_0) - \psi_2\}$$

gdzie $\tilde{k}_{ij}(\cdot)$ są elementami macierzy $\tilde{K} = (u^{-2})\,B(\cdot)\,K_0(\cdot)$

$$\varphi_\theta(\cdot) = \tilde{k}_{12}(\cdot)\cdot k_\phi\{F_\phi(\phi_1,\phi,\phi_0) - \phi_2\} + \tilde{k}_{13}(\cdot)\cdot k_\psi\{F_\psi(\psi_1,\psi,\psi_0) - \psi_2\}$$

$$\varphi_\phi(\cdot) = \tilde{k}_{21}(\cdot)\cdot k_\theta\{F_\theta(\theta_1,\theta,\theta_0) - \theta_2\} + \tilde{k}_{23}(\cdot)\cdot k_\psi\{F_\psi(\psi_1,\psi,\psi_0) - \psi_2\}$$

$$\varphi_\psi(\cdot) = \tilde{k}_{31}(\cdot)\cdot k_\theta\{F_\theta(\theta_1,\theta,\theta_0) - \theta_2\} + \tilde{k}_{32}(\cdot)\cdot k_\phi\{F_\phi(\phi_1,\phi,\phi_0) - \phi_2\}$$

3.8. Składowa wolnozmienna

Wykonując w powyższym układzie przejście graniczne $\mu_\theta \to 0$, $\mu_\phi \to 0$, $\mu_\psi \to 0$ otrzymujemy w wyniku układ równań opisujący wolnozmienne składowe przebiegów. Ma on postać:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = D_{GS}(\theta,\phi,\psi)\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\theta^{(2)}\\ \phi^{(2)}\\ \psi^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_{\theta}(\cdot)\\ f_{\phi}(\cdot)\\ f_{\psi}(\cdot)\end{bmatrix} + B(\cdot)K_0K_1\left\{\begin{bmatrix}F_{\theta}(\theta^{(1)},\theta,\theta_0)\\ F_{\phi}(\phi^{(1)},\phi,\phi_0)\\ F_{\psi}(\psi^{(1)},\psi,\psi_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\theta^{(2)}\\ \phi^{(2)}\\ \psi^{(2)}\end{bmatrix}\right\} \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -w & v\\ w & 0 & -u\\ -v & u & 0\end{bmatrix} T_{\omega}^{-1}(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + D_{SG}(\theta,\phi,\psi)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ g\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{a_c}{m}\delta_c\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2m}\rho(h)\, v_a^2\, D_{SP}(\alpha,\beta)\, S\begin{bmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{bmatrix}.$$

Otrzymany układ odpowiada przypadkowi zastosowania idealnych filtrów różniczkujących.

3.9. Składowa szybkozmienna

W rozpatrywanym przypadku dla określenia podukładu składowej szybkozmiennej oznaczamy $\mu_0 = \max\{\mu_\theta, \mu_\phi, \mu_\psi\}$, $\bar{\mu}_\theta = \mu_\theta/\mu_0$, $\bar{\mu}_\phi = \mu_\phi/\mu_0$, $\bar{\mu}_\psi = \mu_\psi/\mu_0$ i wprowdzamy zmianę skali czasu według zależności $\tau = \mu_0^{-1}t$, a następnie wykonujemy przejście graniczne $\mu_0 \to 0$.

Powracając do zmiennej t otrzymujemy ostateczną postać podukładu określającego składową szybkozmienną układu rozszerzonego.

$$\mu_\theta^2\cdot\hat{\theta}^{(2)} + 2d_\theta\,\mu_\theta\cdot\hat{\theta}^{(1)} + \hat{\theta} = \theta$$

$$\mu_\phi^2\cdot\hat{\phi}^{(2)} + 2d_\phi\,\mu_\phi\cdot\hat{\phi}^{(1)} + \hat{\phi} = \phi$$

$$\mu_\psi^2\cdot\hat{\psi}^{(2)} + 2d_\psi\,\mu_\psi\cdot\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi} = \psi$$

$$\mu_\theta^2\cdot\theta_1^{(2)} + 2d_\theta\ \mu_\theta\cdot\theta_1^{(1)} + \theta_1 = \theta^{(1)}$$

$$\mu_\phi^2\cdot\phi_1^{(2)} + 2d_\phi\ \mu_\phi\cdot\phi_1^{(1)} + \phi_1 = \phi^{(1)}$$

$$\mu_\psi^2\cdot\psi_1^{(2)} + 2d_\psi\ \mu_\psi\cdot\psi_1^{(1)} + \psi_1 = \psi^{(1)}$$

$$\mu_\theta^2\cdot\theta_2^{(2)} + 2d_\theta\cdot\mu_\theta\cdot\theta_2^{(1)} + \theta_2 = f_\theta(\cdot) + \varphi_\theta(\cdot) + \tilde{k}_{11}(\cdot)\cdot k_\theta\{\ F_\theta(\theta_1,\theta,\theta_0) - \theta_2\}$$

$$\mu_\phi^2\cdot\phi_2^{(2)} + 2d_\phi\cdot\mu_\phi\cdot\theta_2^{(1)} + \phi_2 = f_\phi(\cdot) + \varphi_\phi(\cdot) + \tilde{k}_{22}(\cdot)\cdot k_\phi\{\ F_\phi(\phi_1,\phi,\phi_0) - \phi_2\}$$

$$\mu_\psi^2\psi_2^{(2)} + 2d_\psi\cdot\mu_\psi\cdot\psi_2^{(1)} + \psi_2 = f_\psi(\cdot) + \varphi_\psi(\cdot) + \tilde{k}_{33}(\cdot)\cdot k_\psi\{\ F_\psi(\psi_1,\psi,\psi_0) - \psi_2\}$$

gdzie

$$x = \text{const},\ y = \text{const},\ z = \text{const},\ u = \text{const},\ v = \text{const},\ w = \text{const}$$

$$\theta=\text{const},\ \phi=\text{const},\ \psi=\text{const},\ \theta^{(1)}=\text{const},\ \phi^{(1)}=\text{const},\ \psi^{(1)}=\text{const}.$$

W celu zbliżenia własności układu (38) do własności układu (40) z idealnym różniczkowaniem należy zapewnić asymptotyczną stabilność podukładu składowej szybkozmiennej oraz wystarczającą szybkość występujących w niej przebiegów w porównaniu z szybkością przebiegów w podukładzie składowej wolnozmiennej [13,14,15].

Z warunków stabilności wynika, że w obszarze pracy układu (1)-(4) przy zmieniających się wartościach stanu i parametrów powinny być spełnione warunki

$$\tilde{k}_{11}(\cdot) > 0\ ,\quad \tilde{k}_{22}(\cdot) > 0\ ,\quad \tilde{k}_{22}(\cdot) > 0\ .$$

Spełnienie tych warunków można uzyskać przez odpowiedni wybór macierzy K_0. Widać przy tym, że wybór macierzy K_0 o postaci (16) nie jest jedynym z możliwych.

W celu uzyskania wystarczającego stopnia rozdzielenia składowych szybko- i wolnozmiennych można przyjąć

$$\mu_\theta = \mu_\phi = \mu_\psi = \mu_0, \quad \text{gdzie} \quad \mu_0 \approx 0.1 \min \{ \tau_\theta, \tau_\phi, \tau_\psi \} . \tag{41}$$

Obliczenia wielkości d_θ można dokonać na drodze analizy wartości własnych. Równanie charakterystyczne dla podukładu składowej szybkozmiennej ma postać:

$$\left\{\mu_\theta^2/(1 + \tilde{k}_{11}(\cdot)\cdot k_\theta)\right\}\cdot p^2 + \left\{2d_\theta\cdot\mu_\theta/(1 + \tilde{k}_{11}(\cdot)k_\theta)\right\}\cdot p + 1 = 0$$

Wielkość d_θ należy wybrać tak by równanie to przyjęło postać:

$$\mu_0^2\cdot p^2 + 2\cdot d_0\cdot\mu_0\cdot p + 1 = 0$$

gdzie $\mu_0 = \mu_2/(1 + \tilde{k}_{11}(\cdot)k_\theta)^{1/2}$, parametr d_0 wybiera się na podstawie wymagań odnośnie do jakości szybkozmiennych przebiegów przejściowych. Ostatecznie otrzymujemy następujący warunek przybliżony

$$d_\theta \approx d_0(1 + \tilde{k}_{11}(\cdot)\, k_\theta)^{1/2}_{max}$$

Zauważmy, że w przypadku (16), (17), (31) mamy $\tilde{k}_{11}(\cdot) \approx 0.5\, \rho(h)$. W rezultacie dla wyznaczenia d_θ, d_ϕ, d_ψ otrzymujemy następujące przybliżone warunki

$$\begin{aligned} d_\theta &\approx d_0(1 + 0.5\, \rho(h)\, k_\theta)^{1/2}_{max} \\ d_\phi &\approx d_0(1 + 0.5\, \rho(h)\, k_\phi)^{1/2}_{max} \\ d_\psi &\approx d_0(1 + 0.5\, \rho(h)\, k_\psi)^{1/2}_{max} \end{aligned} \tag{42}$$

3.10. Wpływ ograniczeń na wartości sterowań

W rozpatrywanym zadaniu stabilizacji ograniczenia na wartości sterowań mają postaci

$$\delta_h \in [-\delta_h^{max}, \delta_h^{max}], \ \delta_v \in [-\delta_v^{max}, \delta_v^{max}], \ \delta_l \in [-\delta_l^{max}, \delta_l^{max}], \tag{43}$$

stąd w praktycznej realizacji prawo sterowania (34) przyjmuje następującą postać

$$\delta_h = \delta_h^{max}\mathrm{sat}(\tilde{\delta}_h/\delta_h^{max}), \quad \delta_v = \delta_v^{max}\mathrm{sat}(\tilde{\delta}_v/\delta_v^{max}), \quad \delta_l = \delta_l^{max}\mathrm{sat}(\tilde{\delta}_l/\delta_l^{max})$$

gdzie

$$\mathrm{sat}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma \geq 1 \\ \gamma & -1 < \gamma < 1 \\ -1 & \gamma \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\delta}_h \\ \tilde{\delta}_v \\ \tilde{\delta}_l \end{bmatrix} = K_0 K_1 \left\{ \begin{bmatrix} F_\theta(\hat{\theta}^{(1)}, \theta, \theta_0) \\ F_\phi(\hat{\phi}^{(1)}, \phi, \phi_0) \\ F_\psi(\hat{\psi}^{(1)}, \psi, \psi_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\theta}^{(2)} \\ \hat{\phi}^{(2)} \\ \hat{\psi}^{(2)} \end{bmatrix} \right\} \tag{44}$$

Wpływ ograniczeń (43) powinien być uwzględniony przy wyborze pożądanej dynamiki (14), tak by spełnione były warunki (22) jej realizowalności.

3.11. Parametry regulatora

Wykorzystując wyprowadzone zależności możemy wyznaczyć parametry regulatora. Zakładamy następujące wymagania odnośnie do procesu przejściowego

$$\tau_\theta = \tau_\phi = \tau_\psi = 5\ [s], \quad a_\theta = a_\phi = a_\psi = 0.7, \quad d_0 = 0.2$$

$$|\Delta_\theta^s|_{max} = |\Delta_\phi^s|_{max} = |\Delta_\psi^s|_{max} = 0.0174\ [rad]$$

Wykorzystując przedstawione zależności (35), (36), (41), (42) otrzymujemy, że dla prawa sterowania postaci (44), (15), (16), (17) należy przyjąć

$$\mu_\theta = \mu_\phi = \mu_\psi \approx 0.5\ [s], \quad d_\theta \approx 1.4, \quad d_\phi \approx 3.3 \quad d_\psi \approx 3.0$$

$$\bar{k}_\theta \approx 0.8, \quad \bar{k}_\phi \approx 4.4, \quad \bar{k}_\psi \approx 3.6, \quad k \approx 10^2$$

Wyniki symulacyjnych badań układu sterowania z wyznaczonymi jak powyżej parametrami liczbowymi przedstawiono w pracy [11].

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono dwie grupy metod syntezy praw sterowania dla wielowymiarowych nieliniowych obiektów sterowania.

Pierwsza z nich, stosowana konwencjonalnie, polega na linearyzacji modelu wokół przewidywanego punktu pracy lub wzdłuż zadanej trajektorii. Otrzymany w wyniku model jest niestacjonarny. Model ten może być przekształcony również do postaci dyskretnej. Wprowadzając formalnie wskaźnik kwadratowy oceniający odchyłkę pomiędzy trajektorią zadaną i realizowaną, a następnie minimalizując go względem dopuszczalnych praw sterowania, otrzymuje się regulator liniowy, w którym z założenia stałe współczynniki wzmocnień określa pośrednio ustalone rozwiązanie odpowiedniego równania Riccatiego.

Metoda "lokalizacji" przedstawiona obszernie w pracy nie wymaga wstępnej linearyzacji modelu, umożliwia jednocześnie uzyskanie założonych własności dynamicznych zamkniętego układu sterowania. Podstawowym założeniem metody jest pomiarowa dostępność pochodnych wielkości wyjściowych do odpowiedniego rzędu włącznie . W przypadku gdy pochodne te nie są pomiarowo dostępne, mogą być odtwarzane przez filtry różniczkujące. Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały zarówno merytoryczną poprawność metody, jak również jej efektywność.

LITERATURA

[1] Chandrasekhar J., Rao M.P.R.: A new model reference adaptive aircraft controller. 10-th World Congress on Automatic Control, IFAC, Monachium, 1987, vol. 6, pp. 128 -143.

[2] Fiszdon W.: Mechanika lotu. PWN, Warszawa 1961,

[3] Jurkiewicz W., Błachuta M., Wojciechowski K.: Synteza układu sterowania ruchem samolotu w płaszyżnie pionowej. ZN Pol. Śl., Gliwice 1990 (złożone do druku).

[4] Redeker A.: An open-loop control system for a state space flight controler. 10-th World Congress on Automatic Control, IFAC, Monachium, 1987, vol. 6, pp. 125-131.

[5] Sobel K. Kaufman H.: Aplication of stochastic optimal reduced state feedback gain computation procedures to the design of aircraft gust alleviation controllers. 7-th World Congress on Automatic Control, IFAC, Helsinki 1978, vol. 2, pp. 1227-1233.

[6] Świerniak A., Polańska J.: Synteza regulatora metodą przestrzeni $\mathring{H}$ dla przedziałami linearyzowanego modelu samolotu. ZN Pol. Śl., Gliwice (przyjęte do druku).

[7] Vostrikov A.S.: On the synthesis of control units of dynamic systems. Systems Science, Wroclaw: Technical University, 1977. vol. 3, No. 2, pp. 195 - 205.

[8] Wojciechowski K., Ordys A., Polańska, J.: Model przestrzennego ruchu samolotu dla celów symulacji i sterowania. ZN Pol. Śl., Gliwice 1989 (złożone do druku).

[9] Błachuta M., Simek K., Wojciechowski K.: Model przestrzennego ruchu samolotu i jego linearyzacja. ZN Pol. Śl., Gliwice 1989 (złożone do druku).

[10] Wojciechowski K., Błachuta M., Polańska J., Polański A., Simek K.: Sterowanie obiektami dynamicznymi na podstawie informacji wizyjnej. ZN Pol. Śl., Gliwice 1989 (złożone do druku).

[11] Błachuta M., Polański A., Wojciechowski K.: Symulacja sterowania przestrzennym ruchem samolotu na podstawie informacji wizyjnej. ZN Pol.Śl., 1989 (złożone do druku).

[12] Буков В.Н. Адаптивная предсказывальная система управления полетом. Наука, Москва 1987.

[13] Востриков А.С. Управление динамическими объектами. Новосиб.електротехн. Новосибирск, 1979.

[14] Востриков А.С. Теория автоматического управления. Принцип локализации. Новосиб.електротехн. Новосибирск 1988.

[15] Востриков А.С. Принцип локализации в задаче синтеза систем автоматического управления. Изв. вузов СССР. Приборостроение 1988, No.2, с.42-49.

[16] Востриков А.С., Уткин В.И., Французова Г.А. Система с производной вектора состояния в управлении. Автоматика и телемеханика, 1982 No.3, с.22-25.

[17] Яркевич В.Д. Условия реализуемости заданных движений и синтез систем с вектором скорости в законе управления. Автореферат диссертации канд. техн. наук, Новосибирск 1986.

[18] Яркевич В.Д. Условие разреюимости задачи стабилизации многосвязных объектов. (Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками) Новосиб. електротехн. Новосибирск 1986.с.77-86.

[19] Яркевич В.Д. Об устойчивости динамических объеков по управления. /Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками/. Новосиб. електротехн. Новосибирск 1988, с 108-116.

[20] Яркевич В.Д. О реализуемости заданных движений в многоканальных системах с вектором скорости в законе управления. /Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками/ Новосиб. електротехн. Новосибирск 1989, с.73-83.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Bohdan WOŁCZAK

Wpłynęło do Redakcji 25.05.91 r.

A b s t r a c t

Two algorithms of a multidimensional controller stabilizing three Euler angles defining an attitude of an aircraft modeled by 12 nonlinear differential equations in a state space are presented.

The first algorithm is based on the LQ regulator solution formulated for the linearised aircraft state equations. The simulation proved that the obtained controller ensures stability only for rectilinear flight with initial conditions in the neighborhood of the operating point.

The second algorithm based on a location method does not require model linearization and is valid for wide range of initial conditions and flight trajectories. The algorithm enables obtaining required dynamic properties for the closed-loop system. It is required that the transient responses of the stabilized angles have the prescribed dynamic properties defined by the solution of second order differential equations for the pattern, are mutually independent area and are independent of varying plant parameters and acting disturbances. The control algorithm uses the first and the second derivatives of controlled variable estimates that are evaluated by differentiating filters.

In the paper theoretical and simulation considerations confirming correctness and efficiency of the proposed method are presented.