

Zdzisław DUDA

WYZNACZANIE TRAJEKTORII ZADANEJ SAMOLOTU W PRZESTRZENI TRÓJWYMIAROWEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania zadanej trajektorii lotu dla samolotu. Opracowano także odpowiedni program mikrokomputerowy, który realizuje opisany algorytm.

DETERMINATION OF THE REFERENCE TRAJECTORY OF AN AIRPLANE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

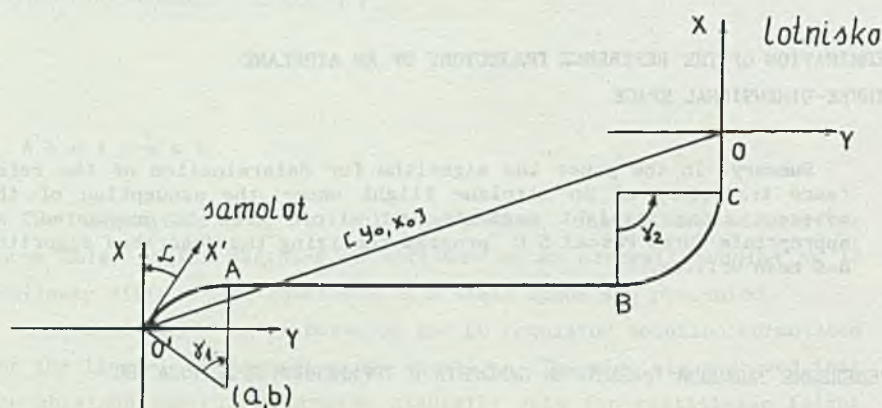
Summary. In the paper the algorithm for determination of the reference trajectory of an airplane flight under the assumption of the movement along straight segments and circle arcs is presented. An appropriate Turbo Pascal 5.0 program realizing the described algorithm has been written.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ САМОЛЕТА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Резюме. В работе представлен алгоритм определения заданной траектории полета для самолета. Разработана также соответствующая микрокомпьютерная программа для реализации алгоритма.

1. WPROWADZENIE

Konieczność wyznaczania trajektorii zadanej samolotu wynika z koncepcji sterowania tym obiektem przedstawionej w [1]. W poniższych rozważaniach zakładamy, że samolot będący na danej wysokości może poruszać się po łuku okręgu lub po prostej. Naszym zadaniem będzie konstrukcja pożądanej trajektorii lotu, która umożliwi osiągnięcie lotniska przez obiekt. Rozpatrywać będziemy trajektorie takiego rodzaju, jak na rys. 1.



Rys. 1. Zadana trajektoria lotu samolotu

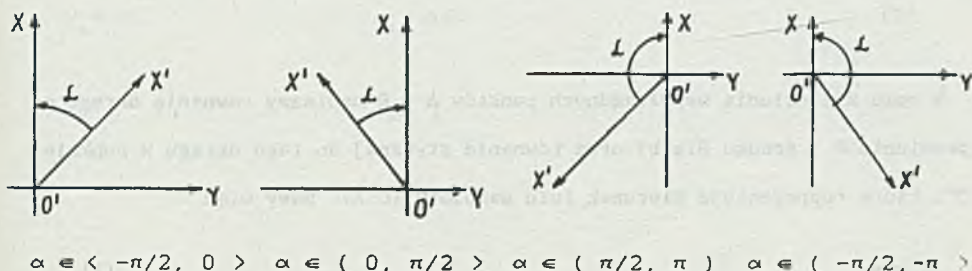
Fig. 1. The desired airplane motion trajectory

Jako dane wejściowe przy konstrukcji trajektorii przyjmujemy promień krzywizny łuku R , wektor współrzędnych $[y_0, x_0]$ reprezentujący położenie samolotu względem lotniska oraz kąt α między kierunkiem lotu $O'A$ a kierunkiem osi lotniska OX . Kąt α zgodny z obrotem wskazówek zegara traktować będziemy jako dodatni, zaś przeciwny do obrotu wskazówek zegara jako ujemny. Dla niektórych danych konstrukcja trajektorii nie będzie możliwa. W tym przypadku należy zmniejszyć promień R i przeprowadzić obliczenia od nowa.

Naszym zadaniem będzie określenie łuku $O'A$ (oznaczanego w dalszych rozważaniach przez γ_1) o zadanym promieniu krzywizny R , współrzędnych punk-

tu A oraz współrzędnych punktu B. W punktach A i B będą następować przełączenia (odpowiednie ustawienia sterów) z ruchu po okręgu na ruch po prostej i odwrotnie. Łuk BC scharakteryzowany jest przez kąt $\gamma_2 = \pi/2$ lub $\gamma_2 = -\pi/2$.

Rozpatrzmy przypadki, w których współrzędna x_0 jest ujemna (samolot znajduje się przed lotniskiem) oraz kąt α przyjmuje wartości w przedziałach $\langle -\pi/2, 0 \rangle$, $\langle -\pi/2, -\pi \rangle$, $\langle 0, \pi/2 \rangle$, $\langle \pi/2, \pi \rangle$. Przypadki te ilustruje rys. 2.



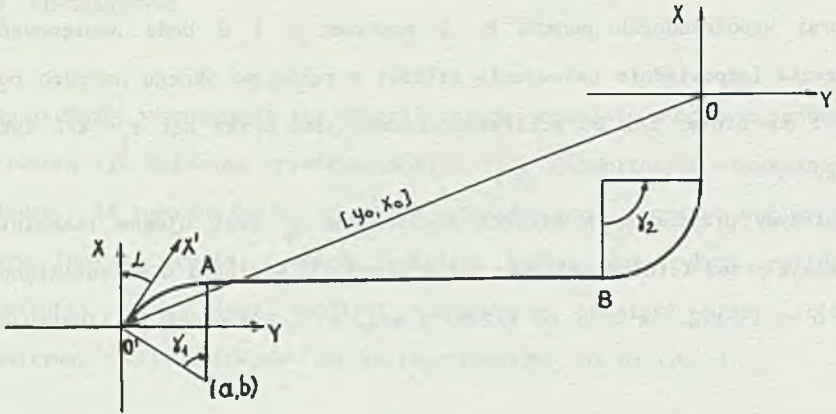
Rys. 2. Kierunki lotu samolotu względem osi lotniska

Fig. 2. The plane motion directions in relation to the aircraft carrier axis

2. KONSTRUKCJA TRAJEKTORII LOTU SAMOŁOTU

2.1. Przypadek $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ i $y_0 < 0$

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 3, z którego wynika, że kąt $\gamma_1 = (\pi/2 + \alpha)$ natomiast $\gamma_2 = -\pi/2$.



Rys. 3. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ i $y_0 < 0$

Fig. 3. The plane motion trajectory for $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ and $y_0 < 0$

W celu znalezienia współrzędnych punktów A i B napiszmy równanie okręgu o promieniu R i środku $S(a, b)$ oraz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie O' , która reprezentuje kierunek lotu samolotu ($O'X$). Mamy więc

$$x = my \quad (1)$$

$$(y - a)^2 + (x - b)^2 = R^2 \quad (2)$$

gdzie $m = \operatorname{tg} \gamma_1$.

Równania (1), (2) zapisane są w układzie współrzędnych $O'YX$.

Wykorzystując fakt, że okrąg przechodzi przez punkt $O'(0, 0)$ oraz oznaczenia z rys. 3 mamy

$$a^2 + b^2 = R^2 \quad (3)$$

$$m = -b/a \quad (4)$$

Współrzędne środka okręgu w układzie $O'YX$ mają więc postać

$$a = mR/\sqrt{1+m^2} \quad b = -R/\sqrt{1+m^2} \quad (5)$$

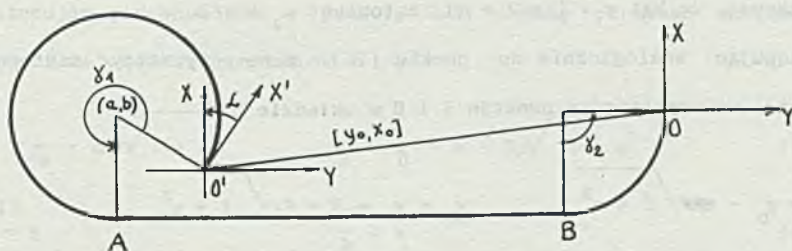
Po transformacji do układu OYX zależności (5) możemy zapisać jako

$$a = y_0 + mR/\sqrt{1+m^2} \quad b = x_0 - R/\sqrt{1+m^2} \quad (6)$$

Z rys. 3 widać, że współrzędne punktów A i B w układzie OYX można wyznaczyć z zależności

$$y_A = a \quad x_A = b+R \quad (7)$$

$$y_B = -R \quad x_B = x_A \quad (8)$$



Rys. 4. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ i $y_0 < 0$

Fig. 4. The plane motion trajectory for $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ and $y_0 < 0$

Zauważmy, że warunkiem realizowalności tak wyznaczonej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$x_A \leq -R \qquad y_A \leq R \qquad (9)$$

Jeśli warunki (9) nie są spełnione, należy przeprowadzić obliczenia dla mniejszego promienia R krzywizny łuku lub przeanalizować realizowalność trajektorii lotu przy "nawracaniu" samolotu. Ilustruje to rys. 4.

Z rys. 4 wynika, że $\gamma_1 = (3\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = -\pi/2$.

Postępując tak, jak poprzednio, otrzymamy następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

$$y_A = y_0 - mR\sqrt{1+m^2} \qquad x_A = x_0 - R + R\sqrt{1+m^2} \qquad (10)$$

$$y_B = -R \qquad x_B = x_A \qquad (11)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie warunków (9).

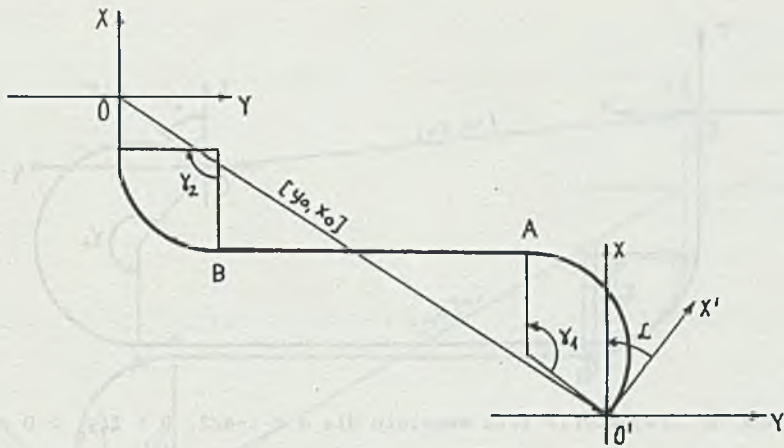
2.2. Przypadek $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ i $y_0 > 0$.

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 5, z którego można wywnioskować, że kąt $\gamma_1 = (-\pi/2 + \alpha)$, natomiast $\gamma_2 = \pi/2$.

Postępując analogicznie do punktu 2.1 możemy wyznaczyć następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

$$y_A = y_0 - mR\sqrt{1+m^2} \qquad x_A = x_0 + R + R\sqrt{1+m^2} \qquad (12)$$

$$y_B = R \qquad x_B = x_A \qquad (13)$$



Rys. 5. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ i $y_0 > 0$

Fig. 5. The plane motion trajectory for $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ and $y_0 > 0$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \geq R \qquad x_A \leq -R \qquad (14)$$

Jeśli warunki (14) nie są spełnione, należy przeprowadzić obliczenia dla mniejszego promienia krzywizny R lub przeanalizować realizowalność trajektorii lotu przedstawionej na rys. 6.

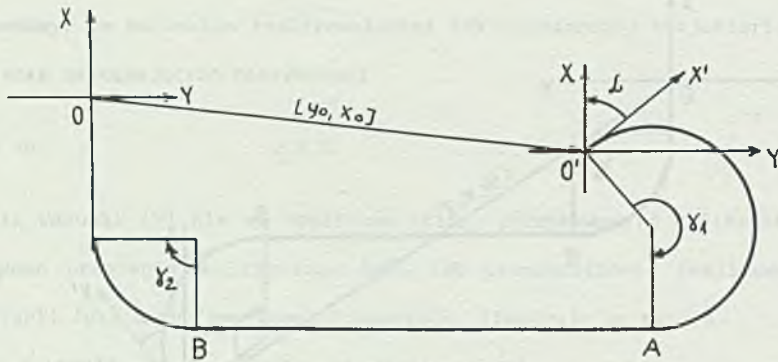
Z rys. 6 można zauważyć, że $\gamma_1 = (3\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = \pi/2$.

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1, możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B

$$y_A = y_0 + mR\sqrt{1+m^2} \qquad x_A = x_0 - R - R\sqrt{1+m^2} \qquad (15)$$

$$y_B = R \qquad x_B = x_A \qquad (16)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie nierówności (14).



Rys. 6. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ i $y_0 > 0$

Fig. 6. The plane motion trajectory for $\alpha \in \langle -\pi/2, 0 \rangle$ and $y_0 > 0$

2.3. Przypadek $\alpha \in (0, \pi/2)$ i $y_0 < 0$

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 7.

Z rys. 7 można zauważyć, że $\gamma_1 = (\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = -\pi/2$.

Postępując analogicznie do punktu 2.1, możemy wyznaczyć następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

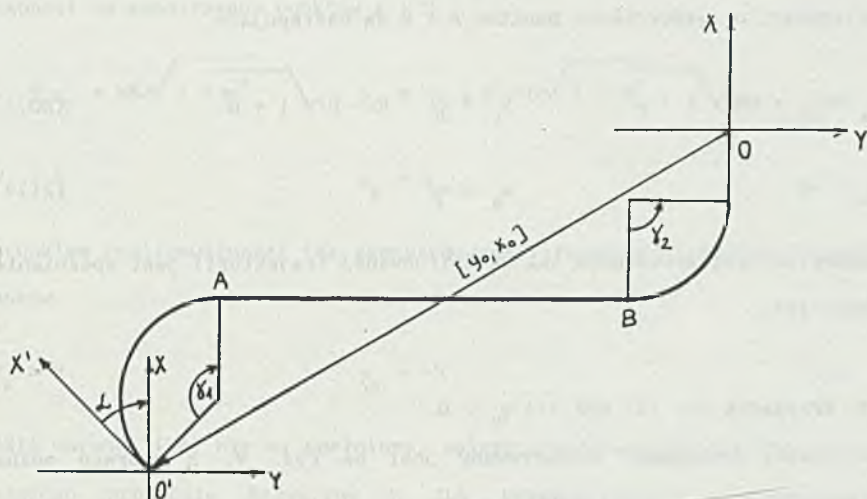
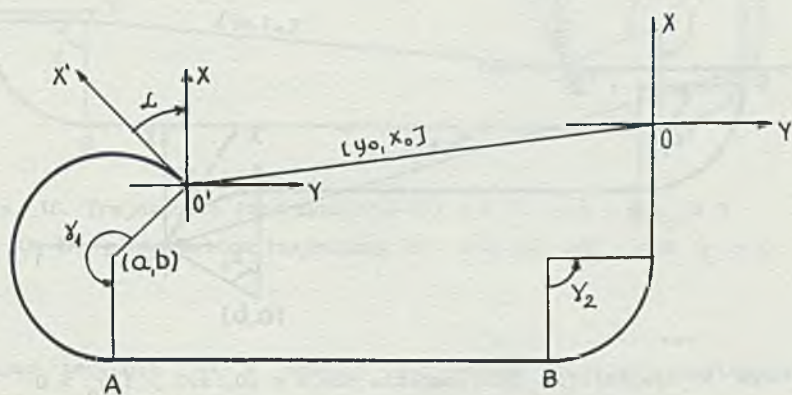
$$y_A = y_0 - mR\sqrt{1 + m^2} \quad x_A = x_0 + R + R\sqrt{1 + m^2} \quad (17)$$

$$y_B = -R \quad x_B = x_A \quad (18)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \leq -R \quad x_A \leq -R \quad (19)$$

Jeśli warunki (19) nie są spełnione, należy przeprowadzić obliczenia dla mniejszego promienia krzywizny R lub przeanalizować realizowalność trajektorii lotu przedstawionej na rys. 8.

Rys. 7. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (0, \pi/2 > i y_0 < 0$ Fig. 7. The plane motion trajectory for $\alpha \in (0, \pi/2 >$ and $y_0 < 0$ Rys. 8. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (0, \pi/2 > i y_0 < 0$ Fig. 8. The plane motion trajectory for $\alpha \in (0, \pi/2 >$ and $y_0 < 0$

Z rys. 8 można zauważyć, że $\gamma_1 = (-3\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = -\pi/2$.

Zależności na współrzędne punktów A i B są następujące

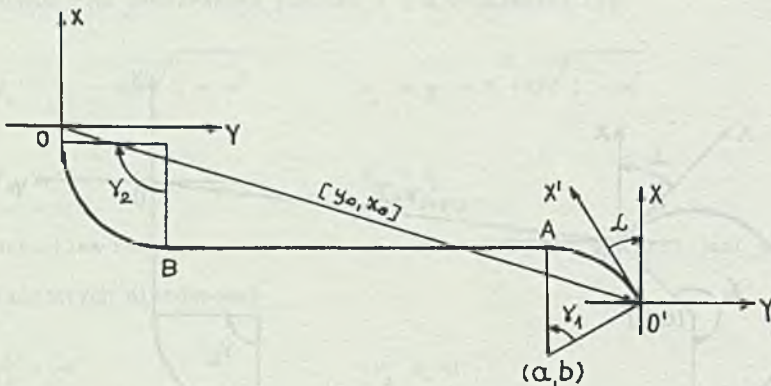
$$y_A = y_0 + mR/\sqrt{1+m^2} \quad x_A = x_0 - R - R/\sqrt{1+m^2} \quad (20)$$

$$y_B = -R \quad x_B = x_A \quad (21)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie warunków (19).

2.4. Przypadek $\alpha \in (0, \pi/2 > \text{ i } y_0 > 0$.

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 9, z którego można zauważyć, że $\gamma_1 = (\alpha - \pi/2)$ oraz $\gamma_2 = \pi/2$.



Rys. 9. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (0, \pi/2 > \text{ i } y_0 > 0$
 Fig. 9. The plane motion trajectory for $\alpha \in (0, \pi/2 > \text{ and } y_0 > 0$

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1, można otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B

$$y_A = y_0 + mR\sqrt{1 + m^2} \quad x_A = x_0 + R - R\sqrt{1 + m^2} \quad (22)$$

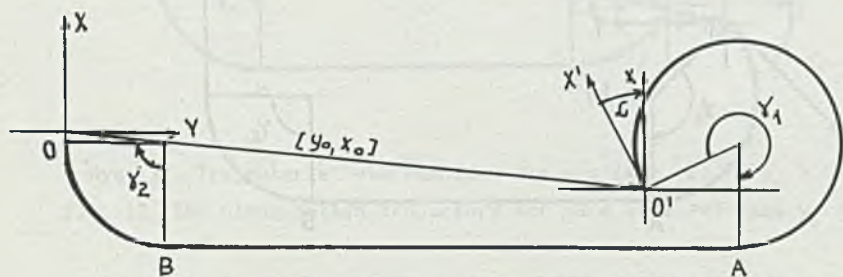
$$y_B = R \quad x_B = x_A \quad (23)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie warunków

$$x_A \geq R \quad y_A \leq -R \quad (24)$$

Jeśli warunki (24) nie są spełnione, należy przeprowadzić obliczenia dla mniejszego promienia krzywizny R lub przeanalizować realizowalność trajektorii przedstawionej na rys. 10.

Z rys. 10 można zauważyć, że $\gamma_1 = (\pi + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = \pi/2$.



Rys. 10. Trajektorja lotu samolotu dla $\alpha \in (0, \pi/2 >$ i $y_0 > 0$

Fig. 10. The plane motion trajectory for $\alpha \in (0, \pi/2 >$ and $y_0 > 0$

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1 możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

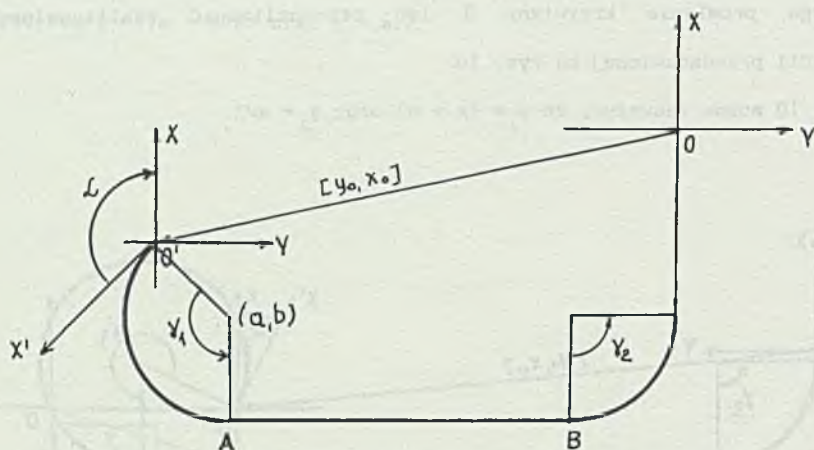
$$y_A = y_0 - mR\sqrt{1+m^2} \quad x_A = x_0 - R\sqrt{1+m^2} \quad (25)$$

$$y_B = R \quad x_B = x_A \quad (26)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie zależności (24).

2.5. Przypadek $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ i $y_0 < 0$

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 11. Z rys. 11 można zauważyć, że $\gamma_1 = (-3\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = -\pi/2$.



Rys. 11. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ i $y_0 < 0$

Fig. 11. The plane motion trajectory for $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ and $y_0 < 0$

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1 możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B

$$y_A = y_0 + mR\sqrt{1+m^2} \quad x_A = x_0 - R\sqrt{1+m^2} \quad (27)$$

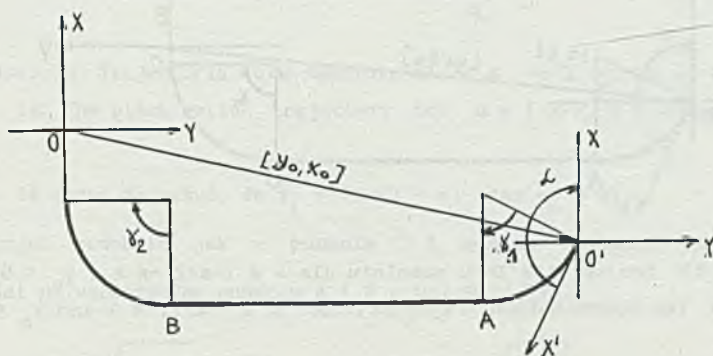
$$y_B = -R \quad x_B = x_A \quad (28)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \leq -R \quad x_A \leq -R \quad (29)$$

2.6. Przypadek $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ oraz $y_0 > 0$

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 12, z którego można zauważyć, że $\gamma_1 = (\alpha - \pi/2)$ oraz $\gamma_2 = \pi/2$.



Rys. 12. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ i $y_0 > 0$

Fig. 12. The plane motion trajectory for $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ and $y_0 > 0$

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1 możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OXY

$$y_A = mR\sqrt{1+m^2} \quad x_A = x_0 - R + R\sqrt{1+m^2} \quad (30)$$

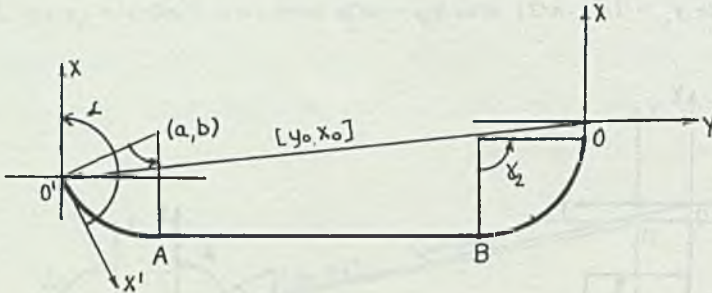
$$y_B = R \quad x_B = x_A \quad (31)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \leq R \quad x_A \geq R \quad (32)$$

2.7. Przypadek $\alpha \in (-\pi/2, -\pi >$ i $y_0 < 0$.

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 13, z którego wynika, że $\tau_1 = (\alpha + \pi/2)$ oraz $\tau_2 = -\pi/2$.



Rys. 13. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (-\pi/2, -\pi >$ i $y_0 < 0$
 Fig. 13. The plane motion trajectory for $\alpha \in (-\pi/2, -\pi >$ and $y_0 < 0$

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1 możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

$$y_A = y_0 - mR\sqrt{1+m^2} \quad x_A = x_0 - R - R\sqrt{1+m^2} \quad (33)$$

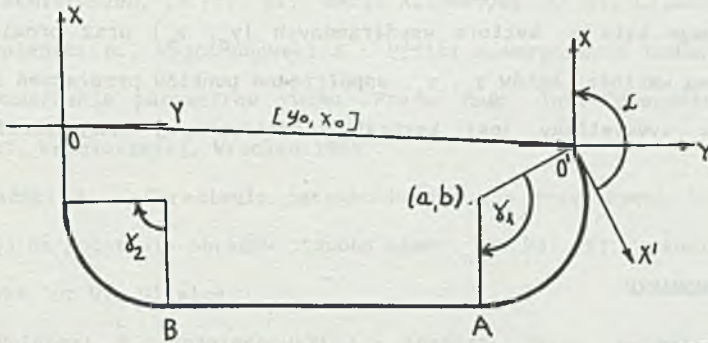
$$y_B = -R \quad x_B = x_A \quad (34)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \leq -R \quad x_A \leq -R \quad (35)$$

2.8. Przypadek $\alpha \in (-\pi/2, -\pi)$ i $y_0 > 0$.

Analizowany przypadek zilustrowany jest na rys. 14.



Rys. 14. Trajektoria lotu samolotu dla $\alpha \in (-\pi/2, -\pi)$ i $y_0 > 0$

Fig. 14. The plane motion trajectory for $\alpha \in (-\pi/2, -\pi)$ and $y_0 > 0$

Z rys. 14 można zauważyć, że $\gamma_1 = (3\pi/2 + \alpha)$ oraz $\gamma_2 = \pi/2$.

Postępując podobnie jak w punkcie 2.1 możemy otrzymać następujące zależności na współrzędne punktów A i B w układzie OYX

$$y_A = y_0 + mR\sqrt{1 + m^2} \quad x_A = x_0 - R - R\sqrt{1 + m^2} \quad (36)$$

$$y_B = R \quad x_B = x_A \quad (37)$$

Warunkiem realizowalności tak skonstruowanej trajektorii jest spełnienie następujących nierówności

$$y_A \leq -R \quad x_A \geq R \quad (38)$$

Jeśli powyższe warunki nie są spełnione, należy przeprowadzić obliczenia dla mniejszych wartości promienia łuku.

Został napisany program w języku TURBO PASCAL 5.0, który realizuje opisane w punkcie 2 algorytmy wyznaczania zadanej trajektorii lotu samolotu. Jest on wykorzystywany w programie głównym symulującym lot samolotu jako UNIT.TRAJ.

Dla zadanego kąta α , wektora współrzędnych $[y_0, x_0]$ oraz promienia R wyznaczone są wartości kątów τ_1, τ_2 , współrzędne punktów przełączeń A i B. Jednocześnie wyświetlany jest kształt skonstruowanej trajektorii lotu samolotu.

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono prosty algorytm wyznaczania trajektorii zadanej samolotu, który jest częścią dużego programu symulacyjnego lotem tym obiektem. Służy on do weryfikacji koncepcji sterowania przedstawionej w [1]. W dalszych badaniach zostaną opracowane inne, bardziej skomplikowane, wersje tego problemu.

LITERATURA

- [1] Wojciechowski K., Błachuta M., Polański A., Polańska J., Simek K.: Sterowanie obiektami dynamicznymi na podstawie informacji wizyjnej. ZN Pol. Śl., seria Automatyka, Gliwice (złożone do druku).
- [2] Ordys A., Wojciechowski K.: Wybrane algorytmy przetwarzania wstępnego obrazu w zagadnieniach wyznaczania pola prędkości. ZN Pol.Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [3] Ordys A., Wojciechowski K.: Metody wyznaczania pola prędkości na podstawie sekwencji obrazów. ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.

- [4] Ordys A.: Numeryczne wyznaczania pola prędkości na podstawie analizy przesuniętych w czasie obrazów, ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [5] Polański A.: Algorytm wyznaczania parametrów ruchu na podstawie pola przemieszczeń, ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [6] Polański A., Wojciechowski K.: Wyniki numerycznych badań algorytmu wyznaczania parametrów ruchu. Prace Nauk. Inst. Cybernetyki Techn. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1988.
- [7] Polański A.: Określenie parametrów ruchu w przestrzeni trójwymiarowej na podstawie obrazów z dwóch kamer ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [8] Polański A., Wojciechowski K.: Analiza pola przemieszczeń, ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [9] Polański A., Wojciechowski K.: Dobór funkcji celu w algorytmach wyznaczania parametrów ruchu, ZN Pol. Śl., Gliwice (przyjęte do druku).
- [10] Simek K., Wojciechowski K.: Synteza prawa sterowania w strukturze otwartej ze sprzężeniem. ZN Pol. Śl., Seria Automatyka Gliwice, (przyjęte do druku).
- [11] Simek K., Wojciechowski K.: Dyskretne przekształcenia sumacyjne dla funkcji Własha, ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [12] Świerniak A.: Wyznaczanie parametrów ruchu obiektu na podstawie długiego ciągu obrazów, ZN Pol. Śl., seria Automatyka, nr 97, Gliwice.
- [13] Świerniak A., Polańska J.: Dobór regulatora metodami H^∞ dla modelu samolotu linearyzowanego, ZN Pol. Śl. Gliwice, seria Automatyka, przyjęte do druku).
- [14] Wojciechowski K., Ordys A., Polański A.: Algorytm sterowania wybranym obiektem dynamicznym na podstawie informacji wizyjnej, Prace Nauk. Inst. Cyb. Techn. Pol. Wrocławskiej, nr 75, Wrocław 1988.

- [15] Wojciechowski K., Ordys A., Polańska J.: Model przestrzennego ruchu samolotu dla celów symulacji i sterowania, ZN Pol.Śl. ser. Automatyka Gliwice, (przyjęte do druku).

Recenzent: Doc. dr inż. Bohdan WOLCZAK

Wpłynęło do Redakcji 21.06.1991 r.

A b s t r a c t

In the paper the algorithm for determination of the reference trajectory of an airplane flight under the assumption of the movement along straight segments and circle arcs is presented. The input data for the algorithm are: radius of curvature of a circle, vector of coordinates representing the placement of an object with respect to an airport, and the angle between the flight direction and the direction of the airport's axis. An appropriate Turbo Pascal 5.0 program has been written which realizes the described algorithm and is used to verify the idea of control presented in [1].