

Agnieszka KOPCIEWICZ*
Politechnika Szczecińska

ANALIZA OPTYMALIZACYJNA PODSTAWOWEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPA STALOWEGO

Streszczenie. Podjęto próbę optymalizacji częstości drgań własnych stalowego słupa, którego schematem statycznym jest wspornik o wysokości $h = 4,8$ m, obciążonego masą użytkową $m_u = 300$ kg. Zaproponowano przekrój rurowy o stałej sztywności wzdłuż osi elementu. Rozpatrzono cztery warianty średnic zewnętrznych o skokowo zmiennej grubości ścianek. Położenie mas skupionych od ciężaru własnego potraktowano jako zmienną decyzyjną zadania optymalizacji. Dokonano pełnego przeglądu zbioru rozwiązań. Przyjęto dwie funkcje celu: minimum masy własnej słupa i maksimum częstości drgań własnych. Uzyskane zbiory ocen i rozwiązań omówiono jako dwukryterialne zagadnienie optymalizacji.

OPTIMUM ANALYSIS OF EIGENFREQUENCY OF A STEEL COLUMN

Summary. An attempt has been undertaken for an optimization the eigenfrequency of steel column (statical scheme is bracket 4,8 m long and user mass = 300 kg loading). The tubular section with constant stiffness be proposed. Four alternatives of diameter with different thicknesses have been considered. The situation reduced mass from dead weight load have been treated as decisive variable of optimum problem. Full presentation of solution set have been done. The goals were to minimize dead weight of construction and to maximize eigenfrequency of column. The obtained alternative designs (valuation and solution sets) have been discussed as bicriterial optimum problem.

1. Wprowadzenie

Projektowanie konstrukcji to złożony proces, na który składają się decyzje, doświadczenie i intuicja projektanta. Jest obmyśleniem nowych ustrojów i układów lub ustrojów i układów powstających w wyniku przekształcania dotychczas istniejących.

Każde zadanie projektowe może być zrealizowane na wiele sposobów („Ilu inżynierów, tyle rozwiązań”). Konstruktor staje przed problemem wyeliminowania rozwiązań złych, określenia dobrych i wyborem rozwiązania możliwie najlepszego. Dobre rozwiązania spełniają wszystkie podstawowe założenia wynikające ze szczegółowych zasad projektowania, ale konstrukcja powinna być optymalna w danych warunkach ze względu na przyjęte kryterium (kryteria) optymalizacji [5].

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Witold M. Paczkowski, prof. PSz.

Sformułowane w ten sposób ogólne uwagi na temat wymiarowania ustrojów mogą być zapisane w postaci matematycznej. Podstawowym zadaniem jest zbudowanie modelu matematycznego konstrukcji. Ustala się w nim zbiory zmiennych decyzyjnych (np. współrzędnych węzłów) i parametrów (np. wymiarów), a następnie korzystając z praw fizyki buduje się zależności matematyczne.

W przedstawionej pracy podjęto analizę drgań słupa stalowego. Przyjęto zmienne i parametry do zbudowania modelu matematycznego konstrukcji. Uwzględniono szczegółowe zasady projektowania [7] wprowadzając normowe ograniczenia projektowe. Uzyskane wyniki analizowano traktując je jako dwukryterialne zagadnienie optymalizacji.

Zadanie w przyszłości będzie poszerzane – dodawane nowe elementy, poprawiane istniejące. Poprzez stopniową ewolucję modelu obiektu [6] również zmieni się liczba zmiennych decyzyjnych i kryteriów optymalizacji, a co się z tym wiąże – sposób jego analizy.

2. Przedmiot analizy

Jednym z parametrów decydujących o wymiarowaniu konstrukcji jest podstawowa częstość drgań własnych ω . To indywidualna cecha rozważanego obiektu i nie zależy od czynników zewnętrznych. Drgania własne nie są procesem fizycznym, opisują one jedynie pewną dyspozycję ustroju [8].

Dynamiczne równanie ruchu dla układu o jednym stopniu swobody dynamicznej ma ogólną postać (bez zdefiniowanych warunków początkowych):

$$m \cdot \ddot{\bar{q}} + c \cdot \dot{\bar{q}} + k \cdot \bar{q} = \bar{P}(t) \quad (1)$$

gdzie:

m – masa ciała [kg],

c – współczynnik tłumienia [kg/s],

k – sztywność ustroju [N/m],

$\bar{P}(t)$ – siła wzbudzająca drgania konstrukcji [N],

$\ddot{\bar{q}}$ – przyspieszenie punktu materialnego (masy skupionej poddanej drganiom) [m/s^2],

$\dot{\bar{q}}$ – prędkość punktu materialnego [m/s],

\bar{q} – przemieszczenie punktu materialnego [m],

Równanie to, zgodnie z zasadą d'Alemberta, wyraża warunek równowagi sił działających na rozważaną masę w czasie ruchu, pozbawione składników reprezentujących siłę wzbudzącą i opory ruchu może mieć niezerowe rozwiązanie.

$$m \cdot \ddot{\bar{q}} + k \cdot \bar{q} = 0 \quad (2)$$

Wielkość ω jest częstością kołową drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Równania te w postaci macierzowej dla układu o n -stopniach swobody przyjmują formę:

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\bar{q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{q}} + \mathbf{K} \cdot \bar{q} = \bar{\mathbf{P}}(t), \quad (1a)$$

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\bar{q}} + \mathbf{K} \cdot \bar{q} = \mathbf{0}, \quad (2a)$$

gdzie:

\mathbf{B} – macierz bezwładności,

\mathbf{C} – macierz tłumienia,

\mathbf{K} – macierz sztywności,

$\ddot{\bar{q}}$ – wektor przyspieszeń punktów materialnych (mas skupionych),

$\dot{\bar{q}}$ – wektor prędkości p.m.,

\bar{q} – wektor przemieszczeń p.m.,

$\bar{\mathbf{P}}(t)$ – wektor sił zewnętrznych.

Równanie (2a) – układ liniowych jednorodnych równań algebraicznych może mieć niezerowe rozwiązanie, gdy

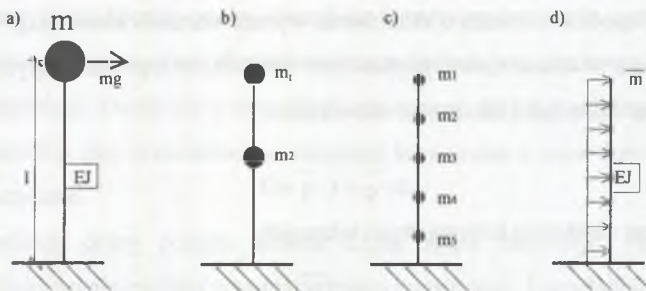
$$|\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{B}| = 0. \quad (3a)$$

Wartość ω można obliczyć w sposób przybliżony (rozwiązanie uproszczone) dla układu o jednym stopniu swobody (rys. 1a) ze wzoru Geigera [2]:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st,max}}}, \quad (4)$$

gdzie $y_{st,max}$ jest maksymalnym przemieszczeniem od statycznego działania masy

$$y_{st,max} = \frac{m \cdot g \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}. \quad (5)$$



Rys. 1. Rozważane modele konstrukcji
Fig. 1. Models of construction into consideration

Zagadnienie to można rozwinąć poprzez dyskretyzację układu do n -stopni swobody dynamicznej (rys. 1b; 1c). Wartości ω liczone wg metod energetycznych wynoszą:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\sum m_i \cdot \delta_{ii}}} \quad (\text{wzór Dunkerleya}), \quad (6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i \cdot y_i^2}} \quad (\text{wzór Rayleigha}). \quad (7)$$

W ten sposób można obliczyć tylko podstawową częstość drgań.

Przy wykorzystaniu metod macierzowych, rozwiązując wyznacznik (3), otrzymuje się równanie algebraiczne względem ω^2 , którego pierwiastkami są częstości drgań własnych: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$.

Uzyskane rozwiązania – wektory własne – pozwalają wyznaczyć podstawową i kolejne częstości drgań własnych, podstawową i kolejne postacie drgań własnych.

Im większa liczba punktów masowych, tym dokładniejsze rozwiązanie. Rozwiązanie idealne (w sensie modelowym) można otrzymać dla schematu, w którym masa słupa jest potraktowana jako obciążenie ciągłe [2] (rys. 1d):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y}} \quad (8)$$

gdzie:

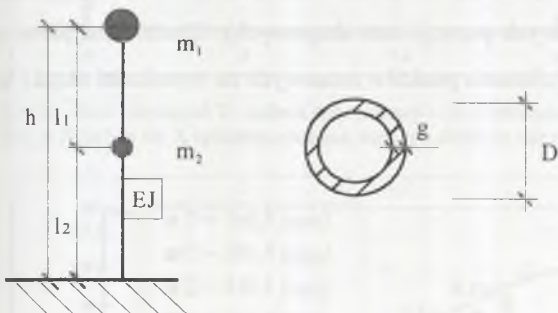
$$y_{st,max} = \frac{1}{3,516^2} \cdot \frac{\bar{m} \cdot g \cdot l^4}{E \cdot J} \quad (9)$$

Częstości podstawowe drgań, w zależności od przyjętej metody i schematu statycznego, przyjmują nieco rozbieżne wartości.

Zdecydowano, że ω liczone w zadaniu będzie według schematu 1b (górną masę skupioną m_1 to ciężar własny i użytkowy, dolną m_2 – tylko ciężar własny). Przyjęto dwie skrajne oceny: idealną (superpozycja: masa użytkowa wg rys. 1a + masa słupa wg rys. 1d) i uproszczoną (obie masy skupione w skrajnym punkcie – rys. 1a) jako wartości porównawcze do uzyskiwanych wyników.

3. Sformułowanie zadania optymalizacji

Objekt analizy to słup stalowy o wysokości $h = 4,8$ m, obciążony stałą masą użytkową $m_u = 300$ kg (rys.2). Jako przekrój poprzeczny zaproponowano rurę, której średnica D może przyjąć wartość od 168,3 mm do 244,5 mm (4 warianty) i grubość ścianek g w zakresie od 5,0 mm do 22,2 mm (12 wariantów). Zmiana przekroju słupa pociąga za sobą zmiany ciężaru własnego m_w i sztywności elementu. Ciężar własny został skupiony w dwóch punktach masowych, zmieniających swe położenie na elemencie. Przyrost sztywności przekroju powoduje zmniejszenie przemieszczeń mas na słupie równocześnie zwiększając wartość ω . Wprowadzono ograniczenia zachowawcze [4], m.in. – dla stanu granicznego użytkowania: przemieszczenie końca słupa nie przekraczające $f_{gr} = 1/100 h$, czyli $f_{gr} = 4,8$ cm.



Rys. 2. Schemat obliczeniowy zadania

Fig. 2. Statical scheme of problem

| | | |
|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Stałe obiektu: | $h = 4,8$ | [m] |
| | $m_u = 300$ | [kg] |
| Parametry: | m_w – z katalogu | [kg/m] |
| | $m_1 = m_u + 0,5 l_1 m_w$ | [kg] |
| | $m_2 = 0,5 m_w (l_1 + l_2)$ | [kg] |
| | $0,25 h < l_2 < 0,75 h$ | [m] |
| | $1,2 [m] < l_2 < 3,6 [m]$ | [m] |
| | $l_1 = h - l_2$ | [m] |
| | $3,6 [m] < l_1 < 1,2 [m]$ | [m] |
| | $l_2 = 1,2 + 0,3 n$ | [m] |
| | n – krok iteracyjny | ($n = 0, 1, 2, \dots, 8$) |

Przy definiowaniu zadania optymalizacji ustalono następujące dyskretne wartości zmiennych decyzyjnych (rys.2):

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \quad (10)$$

$$x_1 = \mathbf{D} \quad x_1 = (168,3; 193,7; 219,1; 244,5) \quad [\text{mm}] \quad (\text{wg [1]})$$

$$x_2 = \mathbf{g} \quad x_2 = (5,0; 5,6; 6,3; 7,1; \dots; 22,2) \quad [\text{mm}] \quad (\text{wg [1]})$$

$$x_3 = \mathbf{l}_2 \quad x_3 = (1,2; 1,5; 1,8; 2,1; \dots; 3,6) \quad [\text{m}]$$

Przyjęto następujące funkcje celu oceniające obiekt optymalizacji:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})]^T \quad (11)$$

$f_1(\mathbf{x})$ – częstość drgań własnych,

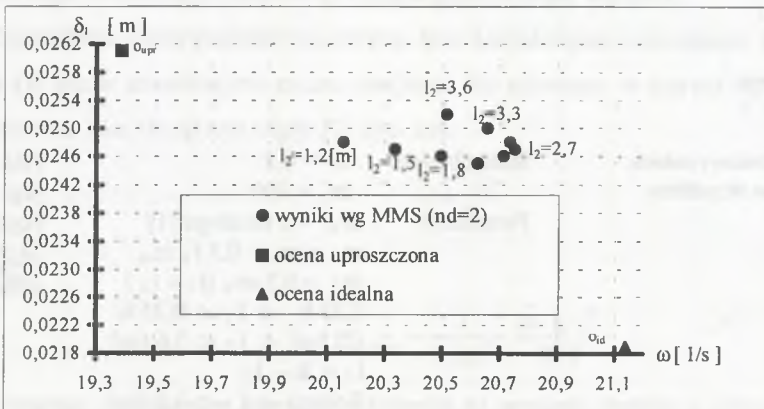
$f_2(\mathbf{x})$ – masa własna słupa.

Poszukiwano maksimum $f_1(\mathbf{x})$ i minimum $f_2(\mathbf{x})$.

4. Analiza optymalizacyjna

Zadanie optymalizacji rozwiązano dla ustalonych dyskretnych zmiennych decyzyjnych, przy przyjętych funkcjach celu. Analizowano je jako zagadnienie dwukryterialne.

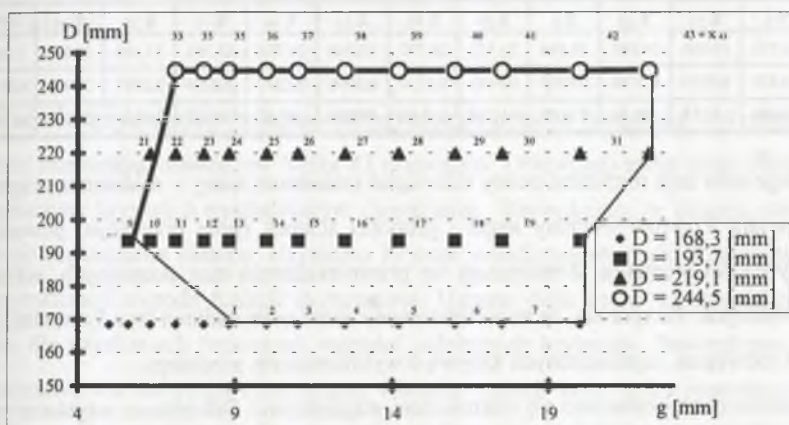
Metodą pełnego przeglądu [6] wykonano serię 432 obliczeń (dla każdej średnicy 12 różnych grubości ścianek, 9 możliwych pozycji mas skupionych). Zbadano najpierw zależność częstości drgań własnych od położenia punktów masowych na wysokości słupa ($\omega = f(l_2)$ – rys.3).



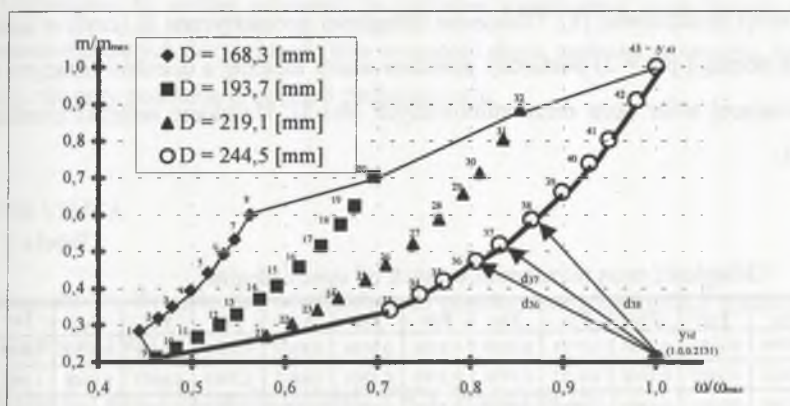
Rys. 3. Przykładowy rozkład częstości drgań własnych dla rury ϕ 193,7/12,5 (x_{16})

Fig. 3. Exemplary distribution of eigenfrequency for tube ϕ 193,7/12,5 (x_{16})

Uzyskano dwa rozwiązania zdominowane. Te wyniki uznano za satysfakcjonujące ze względu na odległości od skrajnych ocen (idealnej i uproszczonej) – w położeniu masy skupionej m_2 na wysokości $l_2 = 2,4$ lub $2,7$ m. Największa różnica względna w otrzymanych obliczeniach wynosiła: $-3,252\%$ (dla oceny idealnej) i najmniejsza $+3,762\%$ (dla uproszczonej). Stwierdzono na podstawie wszystkich /432/ rozwiązań, że można sformułować pewną prawidłowość dotyczącą zmiennej decyzyjnej $x_3 = l_2$. Mianowicie: dla $n = 5$ ($l_2 = 2,7$ m) występuje największa wartość częstości drgań własnych. Z wszystkich obliczeń wybrano te wyniki /48/. Zostały one wzięte pod uwagę przy dalszej analizie optymalizacyjnej. Ze względu na ograniczenia normowe odrzucono kolejne, zawężając obszar poszukiwań do 43 wariantów (rys.4).



Rys. 4. Zbiór rozwiązań X zadania optymalizacji o dwu zmiennych decyzyjnych
 Fig. 4. Solution set X optimum problem with two decisive variables



Rys. 5. Zbiór ocen Y dwukryterialnego zadania optymalizacji
 Fig. 5. Valuation set Y bicriterial optimization problem

Dla pozostawionych 43 dyskretnych rozwiązań otrzymano wyniki w zakresie:

14,978 – ω – 33,743 [1/s] częstość drgań własnych, przy maksymalnych
przemieszczeniach rzędu 0.0462 – 0,0098 [m],
124,8 – m_w – 585,6 [kg] masa własna słupa.

Przykładowe wartości ze zbioru rozwiązań przedstawiono w tabeli 1, dla elementów brzegowych ($x_1, x_9, x_{21}, x_{33}, x_8, x_{20}, x_{32}, x_{43}$) i zawartych wewnątrz ($x_{16}, x_{19}, x_{25}, x_{27}, x_{30}$) zbioru rozwiązań dopuszczalnych X.

Tabela 1

Wybrane wartości ze zbioru rozwiązań X

| X_i | x_1 | x_9 | x_{21} | x_{33} | x_8 | x_{20} | x_{32} | x_{43} | x_{16} | x_{19} | x_{25} | x_{27} | x_{30} |
|-----------------|---------------|---------------|----------|----------|--------|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ω | 14.978 | 15.557 | 19.564 | 24.062 | 18.966 | 23.472 | 28.777 | 33,743 | 20.752 | 22.766 | 23.168 | 24.895 | 27.314 |
| δ_{\max} | 0,0462 | 0.0423 | 0.0270 | 0.0180 | 0.0300 | 0.0198 | 0.0134 | 0,0098 | 0.0247 | 0.0209 | 0.0197 | 0.0173 | 0.0147 |
| m_w | 166.08 | 124,80 | 158.88 | 199.68 | 350.88 | 411.36 | 518.40 | 585,60 | 268.32 | 364.80 | 247.68 | 305.76 | 417.60 |

Przyjęte funkcje celu dają rozbieżne oceny rozwiązań (minimum masy – maksimum częstości drgań własnych). Przyrost średnicy słupa i grubości ścianek (poła przekroju) powoduje zwiększenie sztywności elementu. Zmniejszają się przemieszczenia mas skupionych, wzrasta częstość drgań własnych. To sprawia, że znormalizowany zbiór ocen zadania (rys.5) zawiera się w obszarze ocen rozwiązań, ograniczonych krzywą o wykładniczym przebiegu.

Do analizy zbioru ocen posłużono się wartościami względnymi. Odniesiono uzyskane wyniki (masę i częstość) do maksymalnych. Na podstawie nowych (względnych) danych ustalono wartość oceny idealnej – $y_{id} = [1,0; 0,2131]^T$. Dokonano wyboru rozwiązania preferowanego metodą funkcji dystansowej [4]. Obliczono odległości geometryczne d_i (czyli w sensie euklidesowym, z normą $\|p\| = 2$) pomiędzy punktem oceny idealnej a ocenami leżącymi na krzywej ograniczającej zbiór ocen niezdominowanych (rys.5). Uzyskane metryki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Odległości ocen niezdominowanych od oceny idealnej

| y_{id} | y_9 | y_{21} | y_{33} | y_{34} | y_{35} | y_{36} | y_{37} | y_{38} | y_{39} | y_{40} | y_{41} | y_{42} | y_{43} |
|----------|--------|----------|----------|---------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1,0000 | 0.4610 | 0.5798 | 0.7131 | 0.7452 | 0.7711 | 0.8059 | 0.8316 | 0.8654 | 0.8983 | 0.9278 | 0.9491 | 0.9785 | 1.0000 |
| 0,2131 | 0.2131 | 0.2713 | 0.3410 | 0.3828 | 0.4197 | 0.4738 | 0.5189 | 0.5861 | 0.6607 | 0.7393 | 0.8033 | 0.9098 | 1.0000 |
| d_i | 0.5390 | 0.4242 | 0.3141 | 0,3061 | 0,3084 | 0.3250 | 0.3491 | 0.3965 | 0.4590 | 0.5312 | 0.5924 | 0.6971 | 0.7869 |

Po przeglądzie stwierdzono, że dwie oceny można określić jako najlepiej spełniające oczekiwania. Są to oceny y_{34} i y_{35} . Odpowiadają im elementy x_{34} i x_{35} ze zbioru rozwiązań. W

sensie materialnym są to rury o średnicy zewnętrznej $D = 244,5$ [mm] i grubości ścianek odpowiednio: $g = 8,0$ lub $8,8$ [mm]. Wartości funkcji celu: $f_1(\mathbf{x})$ – częstość drgań własnych, $f_2(\mathbf{x})$ – masa własna słupa wynoszą dla nich:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_{34}) &- 25,146 \text{ [1/s];} & f_2(\mathbf{x}_{34}) &- 224,16 \text{ [kg];} \\ f_1(\mathbf{x}_{35}) &- 26,018 \text{ [1/s];} & f_2(\mathbf{x}_{35}) &- 245,76 \text{ [kg].} \end{aligned}$$

Uzyskane rozwiązania nie są rozwiązaniami ostatecznymi. Podlegają dyskusji. Istnieje możliwość modyfikacji zadania po zaostreniu ograniczeń lub wprowadzeniu nowych kryteriów. Pracę nad optymalizacją konstrukcji wysokich rozpoczęto i będzie ona kontynuowana.

5. Wnioski

Zadanie optymalizacji przeprowadzono metodą pełnego przeglądu, wykonano serię 432 obliczeń, rozważając ostatecznie liczbę 43 rozwiązań. Utworzono zbiór ocen niezdominowanych, ograniczony krzywą o wykładniczym charakterze. Stwierdzono, że istnieje ocena idealna, nie istnieje rozwiązanie idealne. Uzyskano 13 ocen niezdominowanych. Rozwiązano zadanie poplioptimalizacji metodą funkcji dystansowej. Uznano dwie oceny za satysfakcjonujące. Określono dla uzyskanych rozwiązań wartości założonych kryteriów. Stwierdzono, że o wyborze rozwiązania nie decydują ekstremalne wartości funkcji celu, tylko pośrednie. Na podstawie przebiegu krzywych ocen dla rozpatrywanych przekrojów (stała wartość D , zmienna g), zauważono, że mają one podobny, wykładniczy charakter.

Uogólnienie to można przenieść na podobne zagadnienia, przy inaczej zdefiniowanym wektorze zmiennych decyzyjnych (inna wysokość słupa, zmienna sztywność, inny kształt przekroju), ale przy podobnie przyjętych funkcjach celu.

LITERATURA

1. Bogucki W., Żybertowicz M.: Tablice do projektowania konstrukcji metalowych. Arkady, Warszawa 1984.
2. Dyląg Z. i inni: Mechanika budowli. PWN, Warszawa 1977.
3. Górecki H.: Optymalizacja systemów dynamicznych. PWN, Warszawa 1993.
4. Łubiński M., Żółtowski W.: Konstrukcje metalowe, t.2, Arkady, Warszawa 1992.

5. Osiński Z., Wróbel J.: Teoria konstrukcji. PWN, Warszawa 1995.
6. Paczkowski W. M.: Wybrane problemy dyskretnej optymalizacji ewolucyjnej. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej nr 544, Szczecin 1999
7. Pyrak S. (red): Wybór norm budowlanych. Cz. 1 i 2, Komitet Doskonalenia Kadr ZG PZITB, Warszawa 1992.
8. Rakowski G (red): Mechanika budowli – ujęcie komputerowe, t.2, Arkady, Warszawa 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Flaga

Abstract

An attempt has been undertaken for an optimization the eigenfrequency of steel column (statical scheme is bracket 4,8 m long and user mass = 300 kg loading). The tubular section with constant stiffness be proposed. Four alternatives of diameter with different thicknesses have been considered. The situation reduced mass from dead weight load have been treated as decisive variable of optimum problem. Full presentation of solution set have been done. The goals were to minimize dead weight of construction and to maximize eigenfrequency of column. The obtained alternative designs (valuation and solution sets) have been discussed as bicriterial optimum problem.