

Tomasz KOZBIAŁ*
Politechnika Wroclawska

ZASTOSOWANIE ANALIZY FALKOWEJ W METODACH APROKSYMACYJNYCH MECHANIKI BUDOWLI

Streszczenie. W artykule zaprezentowano zastosowanie analizy falkowej w metodach przybliżonych mechaniki. Przedstawiono sposób doboru funkcji skalujących i falek do rozwiązywania zagadnień o modelu obliczeniowym w postaci równań różniczkowych. Efektywność transformacji falkowej przedstawiono na przykładzie zginania belki sztywno-przegubowej.

APPLICATION OF WAVELET ANALYSIS IN APPROXIMATIONAL METHODS OF MECHANICS OF STRUCTURE

Summary. In the paper the application of wavelet bases in the trial function methods are considered. The extended Ritz's method is described and bending of the fixed-hinged beam is presented as a test case to show, that the wavelet bases lead to accurate results. Wavelet bases can be successfully used instead of such conventional bases as Fourier, Legendre or Chebyshev.

1. Wprowadzenie

Analiza falkowa jest stosunkowo młodą dyscypliną matematyki, wzbudzającą w ciągu ostatniej dekady duże zainteresowanie wśród naukowców wielu dziedzin. Stosuje się ją między innymi w takich dziedzinach nauki i techniki, jak analiza sygnałów, kompresja danych czy aproksymacja rozwiązań równań różniczkowych.

Kluczową – pod względem użyteczności – cechą charakterystyczną falek jest ich zdolność do opisywania różnych „frakcji” funkcji w odpowiednich skalach. Konsekwencją tego jest możliwa aproksymacja funkcji szybkozmiennych, nieregularnych, a nawet nieciągłych przez liniową kombinację relatywnie małej liczby falek. Analiza Fouriera – dla porównania – wymaga użycia o wiele większej liczby funkcji bazowych w celu uzyskania podobnych rezultatów.

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Wojciech Głabisz, prof. PWr.

Teoretyczny opis analizy falkowej dostępny jest w wielu publikacjach, np. [1, 2, 3]. Podstawy analizy falkowej zostały przez autora tego artykułu zarysowane w [4].

Niniejszy referat ma na celu prezentację efektów badań nad zastosowaniem aproksymacji falkowej w metodach przybliżonych mechaniki, a w szczególności nad rozwiązaniem problemu doboru baz funkcji skalujących i falek oraz zagadnieniami związanymi ze zbieżnością rozwiązań. W punkcie 2 uzasadniono wybór użytej metody, a w punkcie 3 krótko omówiono dwa stosowane w pracy podejścia. W punkcie 4, na elementarnym przykładzie zginania belki sztywno-przegubowej, omówiono efektywność rozwiązywania zagadnień bezpośrednimi metodami wariacyjnymi przy wykorzystaniu baz funkcji aproksymujących w postaci kombinacji liniowych funkcji skalujących i falek. Wnioski zamieszczono w punkcie 5.

Obliczenia prezentowanego przykładu zostały przeprowadzone przy użyciu programu *Mathematica 4.1* i pakietu *Wavelet Explorer* [5].

2. Sformułowanie metody rozwiązania problemu

Punktem wyjścia w poszukiwaniu rozwiązań zagadnień mechaniki w tzw. metodach bezpośrednich są ich lokalne sformułowania, zwykle w postaci równań różniczkowych. Najogólniej taki opis można przedstawić następująco:

$$\mathbf{L}u = \bar{\mathbf{f}} \quad u \in V \quad (1)$$

$$\mathbf{B}u = \bar{\mathbf{g}} \quad u \in S \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{L}, \mathbf{B} – operatory różniczkowe działające na poszukiwany wektor funkcji u , $\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}}$ – znane, dane wektory określone wewnątrz analizowanego obszaru V lub na jego brzegu S .

Równanie (1) opisuje lokalnie sformułowany problem, który ma spełniać warunki brzegowe dane równaniami (2).

Rozwiązania u problemu przedstawionego równaniami (1), (2) poszukuje się w postaci jego aproksymacji \tilde{u} , którą wyrazić można jako:

$$\tilde{u} = \mathbf{N}_u(x)\hat{u} \quad (\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^m \hat{u}_i N_{ui}(x)) \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{N}_u(x)$ – macierz liniowo niezależnych funkcji próbnych $N_{ui}(x)$,

\hat{u} – wektor nieznanych m parametrów \hat{u}_i , których wartości poszukujemy tak, aby rozwiązanie było zadowalające w przyjętym sensie.

Aby rozwiązanie było poprawne, funkcje próbne powinny tworzyć tzw. układ zupełny funkcji analizowanego zagadnienia, tzn. zwiększenie ich liczby w opisie problemu powinno pociągać za sobą poprawę rozwiązania: $\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u}$ przy $m \rightarrow \infty$ i przy ich użyciu można opisać każdy z elementów analizowanej przestrzeni rozwiązań.

Wygodną bazę funkcji próbnych stanowią falki. Należy jednak zauważyć, że z reguły nie spełniają one warunków brzegowych problemu (2), co jest wymagane w klasycznych sformułowaniach najczęściej stosowanych metod wariacyjnych, takich jak metoda Ritz'a lub Galerkina [6]. Dlatego zachodzi konieczność przyjęcia tak zwanych poszerzonych sformułowań wymienionych metod, tak aby funkcje próbne nie były z góry ograniczane konkretnymi warunkami, a warunki brzegowe były uwzględnione w całkowym opisie zagadnienia. Najlepszą metodą przy przyjęciu falek jako funkcji bazowych wydaje się poszerzona metoda Ritz'a, gdyż wymagane jest przy niej całkowanie iloczynów drugich pochodnych funkcji próbnych, podczas gdy w metodzie Galerkina konieczne jest całkowanie czwartych pochodnych. Obniżenie rzędu pochodnej jest istotne. Wyższe pochodne funkcji skalujących i falek mają silnie oscylacyjny charakter i ich całkowanie numeryczne może okazać się mniej stabilne.

Poszerzona metoda Ritz'a wykorzystuje zasadę prac przygotowanych [6]:

$$\delta W = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_V dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \int_{S_u} \delta \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS = 0 \quad (4)$$

gdzie: δW , $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta \mathbf{u}$ – wariacje (główne liniowe części przyrostów) odpowiednio pracy W , odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ i przemieszczeń \mathbf{u} ;

S_u , S_p – części brzegu, na których odpowiednio określone są przemieszczeniowe $\bar{\mathbf{u}}$ i siłowe $\bar{\mathbf{p}}$ warunki brzegowe.

Dla belki o długości L i sztywności EI wyrażenie (4) przyjmuje postać:

$$\int_0^L EI w'' \delta w'' dx - \int_0^L \bar{p}_z \delta w dx - \underbrace{[\bar{T} \delta w + \bar{M} \delta \Theta]_b^l}_{na S_p} - \underbrace{[\delta T (w - \bar{w}) + \delta M (\Theta - \bar{\Theta})]_b^l}_{na S_u} = 0 \quad (5)$$

gdzie: w , Θ , T i M – funkcje zmiennej x opisujące odpowiednio ugięcie, kąt obrotu, siłę tnącą i moment zginający (nadkreśleniami oznaczono znane wielkości brzegowe);

\bar{p}_z – funkcja określająca obciążenie belki.

Zakładając, że wszystkie obciążenia i przemieszczenia brzegowe równe są zeru, możemy związek (5) wyrazić następująco:

$$\int_0^L EI w'' \delta w'' dx - \int_0^L \bar{p}_z \delta w dx + \underbrace{[\delta w''' EI w + w''' EI \delta w - \delta w'' EI w' - w'' EI \delta w']_0^L}_{na S_u} = 0 \quad (6)$$

Przyjmując aproksymację (3), otrzymujemy po prostych przekształceniach związku (6) symetryczny układ równań algebraicznych niejednorodnych na poszukiwane współczynniki aproksymacji \bar{w} :

$$[\mathbf{k}_u + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)] \bar{\mathbf{w}} - \mathbf{p}_u = 0 \quad (7)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{k}_u = EI \int_0^L \mathbf{N}_u''^T \mathbf{N}_u'' dx, \quad \mathbf{p}_u = \int_0^L \mathbf{N}_u^T \bar{p}_z dx, \quad \mathbf{R} = EI [\mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u''' - \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u'']_0^L.$$

3. Rozwinięcia falkowe

Dowolną funkcję $f(x)$ można opisać, zgodnie z teorią aproksymacji falkowych, na dwa sposoby:

- w postaci rozwinięcia jedynie w bazie funkcji skalujących $\phi_{j,k}(x)$ określonego poziomu J :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j,k}(x) \quad (8)$$

- w postaci rozwinięcia w bazie funkcji skalujących i towarzyszących im falek $\psi_{j,k}(x)$:

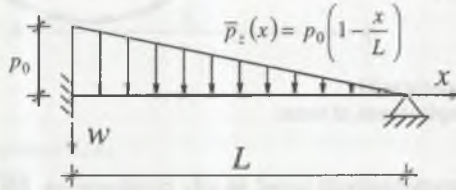
$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (9)$$

Współczynniki funkcji skalującej $c_{j_0,k}$ mogą być interpretowane jako lokalne średnie ważone funkcji f , podczas gdy współczynniki falkowe $d_{j,k}$ (lokalne średnie ważone przyrostów funkcji) służą do uzupełnienia opisu funkcji f o szczegóły pominięte przez funkcje skalujące.

Pierwszy sposób aproksymacji (8), stanowiący tak zwane podejście niestandardowe, lepiej opisuje funkcje gładkie – bez lokalnych nieregularności i nieciągłości. Natomiast drugi sposób (9) – podejście standardowe – bardziej nadaje się do opisu funkcji szybkozmiennych z lokalnymi silnymi wahaniami. W tym podejściu ograniczony zakres falek z różnych poziomów j pociąga za sobą quasi-diagonalizację (zerowanie niektórych wyrazów poza główną przekątną) macierzy \mathbf{k}_u z układu równań (7), a rozmiar zadania staje się co najmniej dwukrotnie mniejszy niż to występuje w podejściu niestandardowym.

4. Przykład

Rozważmy belkę prostą podpartą i obciążoną jak na rys. 1.

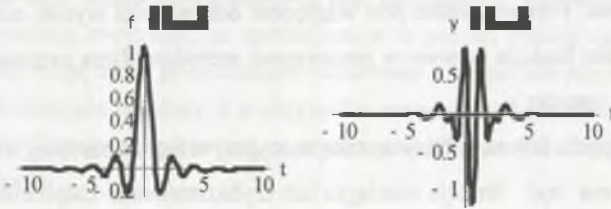


Rys. 1. Schemat statyczny rozwiązywanej belki
Fig. 1. Static scheme of solving beam

Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że belka ma długość $L = 1$, stałą sztywność $EI = 1$, a $p_0 = 1$. Poczynione założenia i warunki brzegowe tego zadania powodują modyfikację macierzy \mathbf{k}_u , \mathbf{p}_u i \mathbf{R} w sformułowaniu (7) poszerzonej metody Ritza. Macierze te przybierają postać:

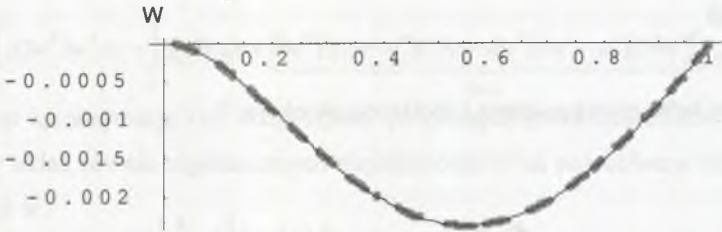
$$\mathbf{k}_u = \int_0^1 \mathbf{N}_u^{*T} \mathbf{N}_u^* dx, \quad \mathbf{p}_u = \int_0^1 \mathbf{N}_u^T \bar{p}_z dx, \quad \mathbf{R} = \mathbf{N}_u^T(1) \mathbf{N}_u'''(1) - \mathbf{N}_u^T(0) \mathbf{N}_u'''(0) + \mathbf{N}_u'^T(0) \mathbf{N}_u''(0) \quad (10)$$

Powyższe zadanie rozwiązano przyjmując bazę aproksymacyjną w postaci funkcji skalujących i falek Meyera trzeciego rzędu, których przykłady pokazano na rys. 2.



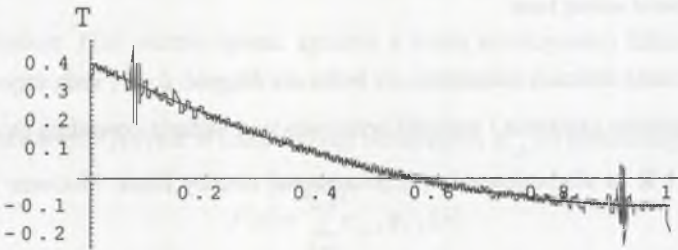
Rys. 2. Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ Meyera
Fig. 2. Scaling function $\phi(t)$ and Meyer wavelet $\psi(t)$

Na rys. 3 przedstawiono aproksymowaną krzywą ugięcia belki (linia przerywana) w bazie 32 funkcji skalujących jednego poziomu i odpowiednio 32, 64 i 128 funkcji falkowych z trzech poziomów. Krzywą tę porównano z rozwiązaniem ścisłym (linia ciągła). Oba wyniki pokrywają się – błąd aproksymacji jest pomijalnie mały.



Rys. 3. Szukany wykres ugięcia belki
 Fig. 3. Finding graph of displacement of beam

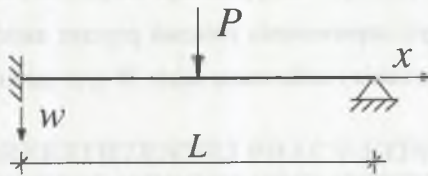
Pochodnymi aproksymowanych ugięć są siły przekrojowe. Na rys. 4 pokazano wynik obliczenia sił tnących – oscyluje on wokół rozwiązania ścisłego.



Rys. 4. Wykres sił tnących
 Fig. 4. Graph of share forces

Otrzymany wykres można różnymi sposobami wygładzać, co w praktyce nie przedstawia większego problemu. Porównywalne pod względem dokładności wyniki autor tego artykułu uzyskał stosując jako funkcje bazowe w poszerzonej metodzie Ritza zamiast falek wielomiany Czebyszewa i Legendre'a.

Korzyści z przyjęcia falkowej bazy aproksymacyjnej stają się bardziej widoczne, gdy wynikiem obliczeń ma być funkcja nieciągła lub szybkozmienna. Odpowiednią tego ilustracją może być rozwiązanie tego samego zagadnienia ze zmianą funkcji obciążenia belki na $\bar{p}_z = P\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$, co pokazano na rys. 5. Aproksymacje wielomianami Czebyszewa lub



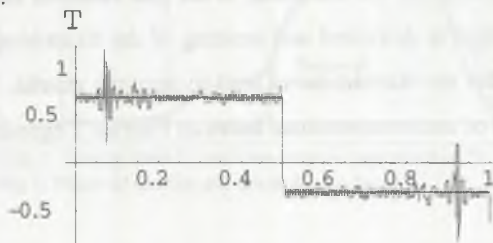
Rys. 5. Schemat statyczny rozwiązywanej belki

Fig. 5. Static scheme of solving beam

Legendre'a dają wtedy niezadowalające wyniki. Występują problemy nawet ze spełnieniem warunków brzegowych na końcach belki. Natomiast dokładność aproksymacji falkowych jest dobra. Na rys. 6 pokazano wykres sił tnących uzyskanych z rozwiązań wykorzystujących rozwinięcia falkowe, który poza lokalnymi zaburzeniami jest zgodny z rozwiązaniem ścisłym. W przypadku przyjęcia aproksymacji w postaci wielomianów Czebyszewa wykresy wyższych pochodnych ugięcia (do których proporcjonalne są momenty zginające i siły tnące) nie odpowiadają rozwiązaniom rzeczywistym.

5. Wnioski

W artykule opisano sposób zastosowania baz falkowych w metodach przybliżonych mechaniki. Na przykładzie poszerzonej metody Ritza przeprowadzono analizę rozwiązania zagadnienia zginania belki sztywno-przegubowej pod obciążeniem rozłożonym i skupionym. Wyniki badań pozwalają stwierdzić, że aproksymacje w postaci funkcji skalujących i towarzyszących im falek mogą być z powodzeniem stosowane w metodach przybliżonych mechaniki. Dają one zadowalające rezultaty, a w przypadku rozwiązań o charakterze nieciągłym lub szybkozmiennym wykazują zdecydowaną przewagę nad klasycznymi bazami Fouriera, Legendre'a i Czebyszewa.



Rys. 6. Wykres sił tnących dla belki obciążonej siłą skupioną

Fig. 6. Graph of share forces for beam with point force

Pożądaną są dalsze badania nad dopasowaniem typów i rzędów falek do różnych klas rozwiązywanych zagadnień. Istotną kwestią pozostaje też problem efektywności, której poprawy upatrujemy w technicznym usprawnieniu obliczeń poprzez zastosowanie nowych sposobów interpolowania, różniczkowania i całkowania falek. W tym też kierunku pójść dalsze wysiłki autora.

LITERATURA

1. Daubechies I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
2. Goswami J. C., Chan A. K., Fundamentals of Wavelets. Theory, Algorithms and Application, J. Wiley & Sons Inc., New York 1999.
3. Resnikoff H. L., Wells JR. R.O., Wavelet Analysis. The Scalable Structure of Information, Springer-Verlag, New York 1998.
4. Glabisz W., Koźbiał T., Napiórkowska M., Falki w wybranych zagadnieniach mechaniki. Materiały konferencyjne XLVI Konferencji Naukowej Krynica, wrzesień 2000, t. 1, s. 59-66.
5. Wolfram research, Mathematica Wavelet Explorer, Inc. First edition, June 1996.
6. Pilkey W. D., Wunderlich W., Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods, CRC Press Inc., Boca Raton 1994.

Recenzent: Dr hab. inż. Maria Radwańska

Abstract

In the paper the application of wavelet bases in the trial function methods are considered. The extended Ritz's method is described and bending of the fixed-hinged beam is presented as a test case to show, that the wavelet bases lead to accurate results. Wavelet bases can be successfully used instead of such conventional bases as Fourier, Legendre or Chebyshev.