

Urszula LASKOWSKA*
Politechnika Świętokrzyska

ELEMENTY PRZEJŚCIOWE Z ROTACYJNYMI STOPNIAMI SWOBODY

Streszczenie. W pracy przedstawiono elementy tarczowe z uwzględnieniem rotacyjnych stopni swobody. Podstawowym założeniem prowadzonych badań była obecność sztywnego węzła, którego przemieszczenia, tj. przesunięcia i obroty, wywołują w płaskim kontinuum tarczowe pole przemieszczeń i naprężeń. Rozważane były czterowęzłowe elementy tarczowe o 12 i 10 stopniach swobody.

TRANSITION ELEMENTS WITH DRILLING ROTATIONS

Summary. In this paper an engineering approach to drilling rotations for membrane finite elements is proposed. The approach is based on the following assumption: in the area of membrane a rigid nodal point exists. A twelve-degrees-of-freedom and ten-degrees-of-freedom four-nodal membrane element having three or two-degrees-of-freedom per node was considered.

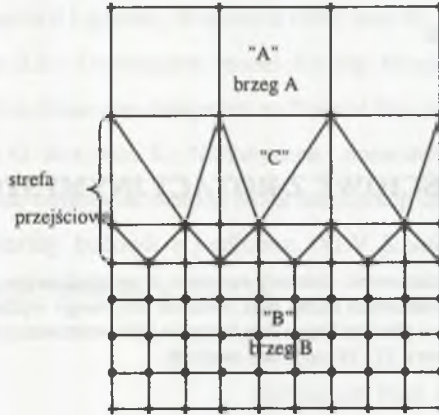
1. Wprowadzenie

Metoda elementów skończonych (MES) stała się powszechnie stosowaną metodą w modelowaniu i analizie obiektów inżynierskich. Metoda jest przybliżona i daje wyniki obarczone błędami. Istotnym źródłem błędów jest niewłaściwe modelowanie badanych obiektów. Dotyczy to w szczególności modelowania obszarów, w których występują podobszary z problemami opisanymi w różnych wymiarach (np. 2D, 3D). Powoduje to konieczność stosowania elementów z różnymi rodzajami stopni swobody. Połączenie podobszarów z różnymi stopniami swobody wymaga wydzielenia stref przejściowych i zamodelowania ich tzw. elementami przejściowymi.

*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Gustaw Rakowski.

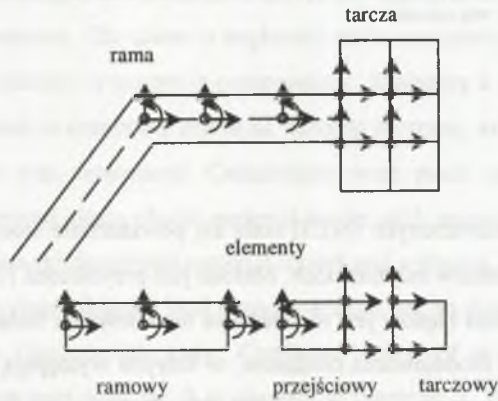
Rozróżniamy dwa typy elementów przejściowych [9]:

- a) elementy przejściowe, które umożliwiają przejście między strefami z siatkami podziału o różnej gęstości, węzły mają te same stopnie swobody,



Rys. 1. Elementy przejściowe o tych samych stopniach swobody
Fig. 1. Transition elements with the same degrees-of-freedom

- b) elementy umożliwiające przejście między obszarami o różnych stopniach swobody (rama – tarcza, rama – kontinuum trójwymiarowe).



Rys. 2. Elementy przejściowe z rotacyjnymi stopniami swobody
Fig. 2. Transition elements with drilling degrees-of-freedom

Zagadnienie *elementów przejściowych* nie zostało, jak dotąd, dostatecznie opracowane. Liczba publikacji na ten temat jest bardzo ograniczona, w literaturze światowej nie przekracza kilkunastu, a w krajowej kilku pozycji.

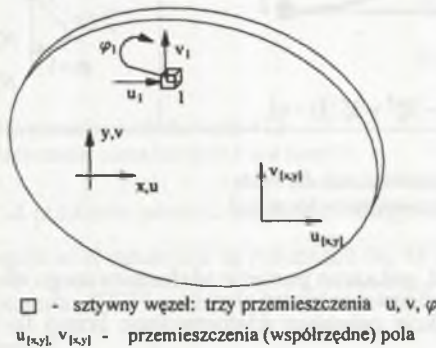
W ostatnich latach wzrosło zainteresowanie tematyką dotyczącą elementów przejściowych.

Elementy umożliwiające przechodzenie między obszarami z siatkami podziału o różnej gęstości i tymi samymi stopniami swobody zostały opisane m.in. przez: Gupta [1], który zaproponował prostokątny ośmiowęzłowy element z czterema węzłami przejściowymi leżącymi w połowie długości boków. Jeyachandrabose i Kirkhope [2] przedstawili rodzinę elementów trójkątnych z węzłami przejściowymi wewnątrz elementu i wzdłuż jego krawędzi.

Elementy, dzięki którym możliwe staje się przejście między obszarami o różnych stopniach swobody, przedstawione zostały m.in. w pracach: Allmana [3], zaproponował on element trójkątny o dziewięciu stopniach swobody z funkcjami kształtu drugiego stopnia. Podobne elementy zostały opisane przez: Bergana i Fellipa [4] oraz Cooka [5]. W elementach tych doświadczalnie dobrane zostały dodatkowe (swobodne) parametry, które zapewniły optymalne rozwiązanie szczególnych problemów. Hughes i Brezzi [6] zaprezentowali zmodyfikowany mieszany i przemieszczeniowy model sformułowań wariacyjnych stosując niezależne pola rotacyjne.

2. Zakres tematyczny dysertacji

Tematykę mojej pracy stanowią elementy umożliwiające przechodzenie między strefami o różnych stopniach swobody. Podstawowym założeniem prowadzonych badań jest obecność sztywnego węzła, którego przemieszczenia, tj. przesunięcia i obroty, wywołują w płaskim kontinuum tarczowe pole przemieszczeń i naprężeń, a w kontinuum trójwymiarowym odpowiednie przestrzenne stany naprężeń i odkształceń, wyłączając bliskie sąsiedztwo węzła, gdzie zanikają odkształcenia postaciowe.

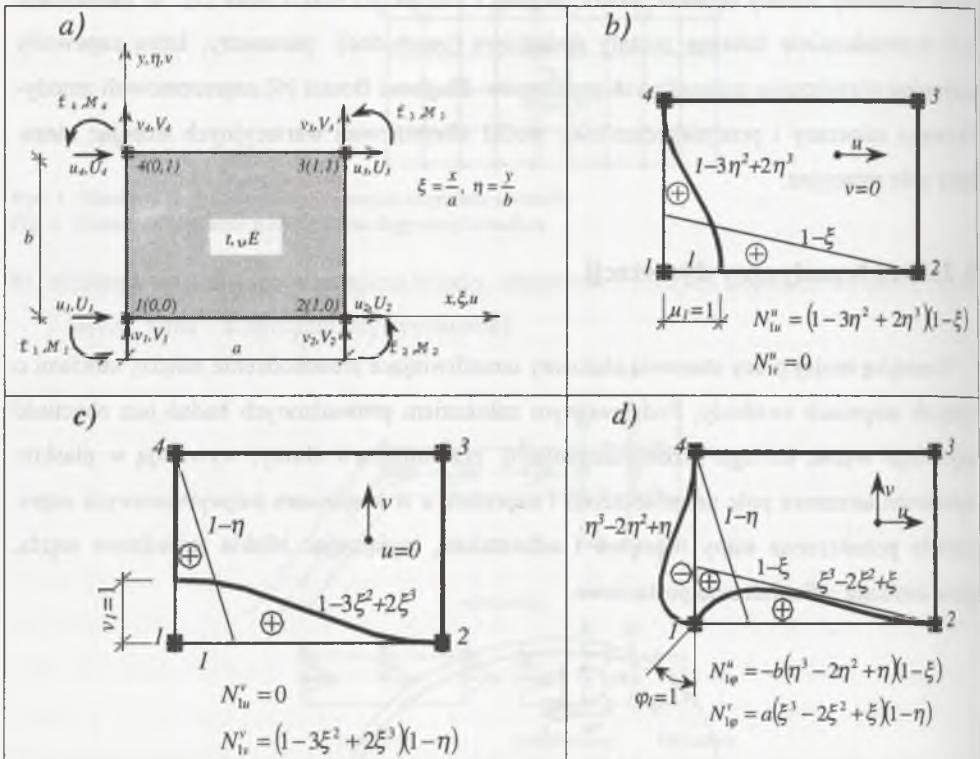


Rys. 3. Element ze sztywnym węzłem
 Fig. 3. Element with rigid point

3. Rozpatrywane elementy przejściowe

Dotychczas zostały opracowane dwa prostokątne czterowęzłowe elementy tarczowe uwzględniające wpływ rotacyjnych stopni swobody. Podstawowym i jednocześnie najtrudniejszym problemem w budowie macierzy sztywności elementu jest opis pola przemieszczeń - czyli dobór odpowiednich funkcji kształtu.

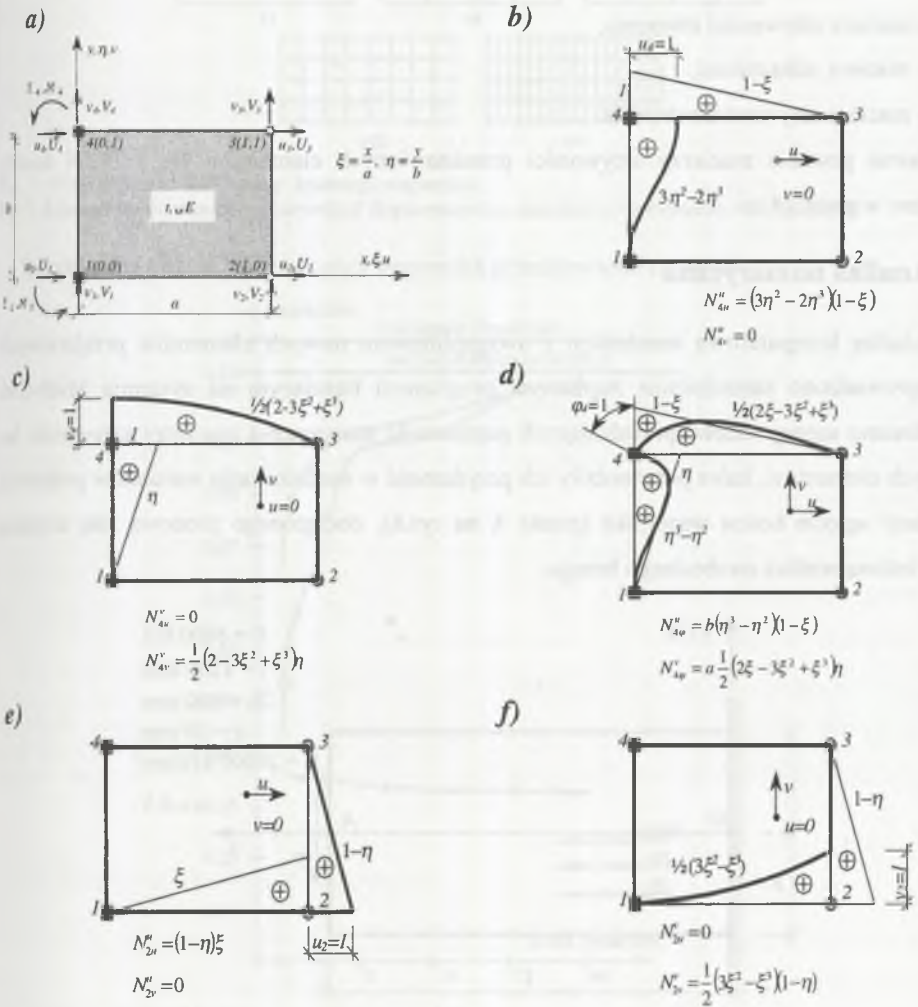
Prostokątny element o czterech węzłach sztywnych 4R



Rys. 4. Element 4R, opis pola przemieszczeń dla węzła 1
 Fig. 4. Element 4R, unit-displacements states for node 1

Na rysunkach 4b, 4c, 4d, pokazano postacie zdeformowanego elementu w stanach jednostkowych dla węzła 1. Funkcje opisujące zdeformowane brzegi to wielomiany Lagrange'a i Hermita, przedstawiają one jednocześnie funkcje kształtu.

Prostokątny element o dwóch węzłach sztywnych i dwóch węzłach przegubowych 2R2H



Rys. 5. Element 2R2H, opis pola przemieszczeń dla węzła 4 i 2
 Fig. 5. Element 2R2H, unit-displacement states for node 4 and hinge 2

Na rysunkach 5b, 5c, 5d pokazano postacie zdeformowanego elementu w stanach jednostkowych dla sztywnego węzła nr 4, natomiast na rysunkach 5e, 5f dla węzła przegubowego nr 2. Pole przemieszczeń elementu 2R2H podobnie jak w elemencie 4R opisane zostało wielomianami Lagrange'a i Hermita.

Macierze sztywności elementów: 4R i 2R2H zostały zbudowane według standardowego pięciopunktowego algorytmu MES prowadzącego do znanego wzoru:

$$\mathbf{k}_e = \int_V \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dV \quad (1)$$

gdzie:

\mathbf{k}_e - macierz sztywności elementu,

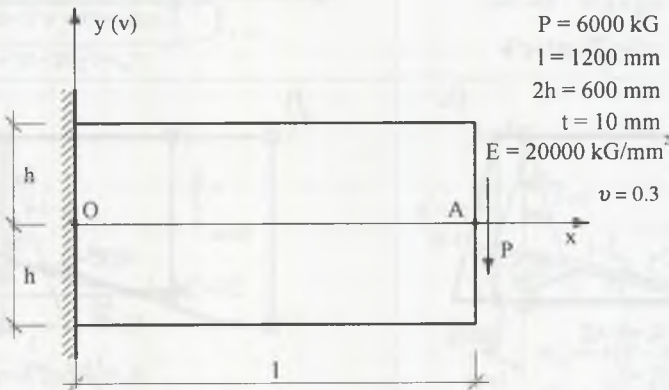
\mathbf{B}_e - macierz odkształceń,

\mathbf{D}_e - macierz sztywności materiału.

Jawne postacie macierzy sztywności przedstawionych elementów 4R i 2R2H zostały podane w pracy [8].

4. Analiza numeryczna

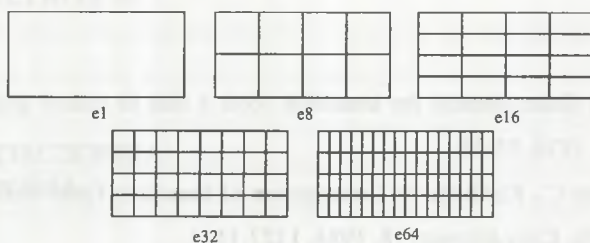
Analizę komputerową konstrukcji z uwzględnieniem nowych elementów przejściowych przeprowadzono samodzielnie napisanym programem bazującym na systemie Math-Cad. Wykonano szereg testów sprawdzających poprawność numeryczną macierzy sztywności badanych elementów, które potwierdziły ich przydatność w modelowaniu warunków podparcia. Badano ugięcie końca wspornika (punkt A na rys.6), obciążonego pionową siłą skupioną przyłożoną wzdłuż swobodnego brzegu.



Rys. 6. Wspornik obciążony pionową siłą P
 Fig. 6. In-plane bending of a plate

Obliczenia przeprowadzono dla trzech przypadków zamodelowania wspornika:

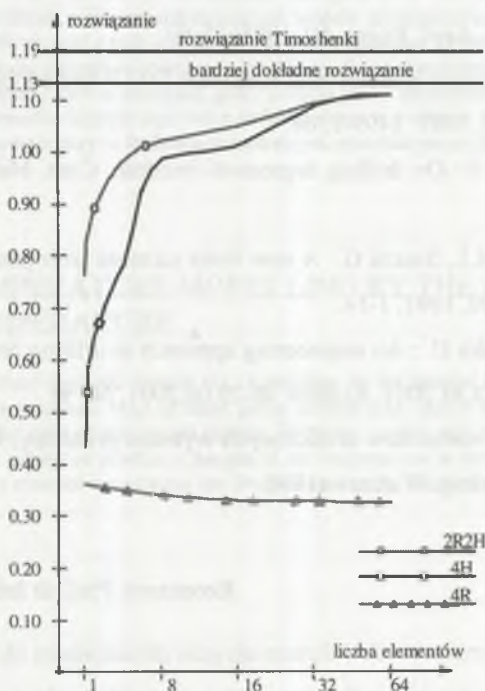
- 1) wspornik zamodelowany elementami o wszystkich węzłach sztywnych [4H],
 - 2) podparcie wspornika zamodelowane elementami o dwóch węzłach sztywnych i dwóch przegubowych [2R2H] jako przejście do klasycznych elementów tarczowych,
 - 3) wspornik zamodelowany klasycznymi elementami tarczowymi [4R],
- przy siatkach podziału zilustrowanych na rys. 6.



Rys. 7. Siatki podziału na elementy badanego wspornika

Fig. 7. Selected mesh refinement for vertical displacement v_A calculation for elements: 4R, 2R2H, 4H

Wyniki odnośnie do ugięcia końca wspornika przedstawiono na rys.8



Rys. 8. Zbieżność wyników badanego ugięcia w punkcie A

Fig. 8. Convergence of calculated vertical displacement at the point A

5. Możliwości zastosowań praktycznych i uwagi końcowe

- Stosowanie elementów przejściowych ma istotne znaczenie dla minimalizowania błędów obliczeniowych, bowiem umożliwia budowanie bardziej realistycznych modeli.
- Przy użyciu elementów przejściowych możliwa staje się analiza połączeń węzłowych z uwzględnieniem wymiarów i odkształcalności węzła traktowanego jako element płaski lub element przestrzenny, podatności podłoża traktowanego jako półprzestrzeń sprężysta.

LITERATURA

1. Gupta A.K.: A finite element for transition from a fine to coarse grid, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 12, 1978, 35-45.
2. Jeyachandrabose C., Kirkhope J.: Construction of transition finite elements for the plane triangular family, *Com.&Struct.* 18, 1984, 1127-1134.
3. Allman D.J.: Evaluation of the constant strains triangle with drilling rotations, *Int. J.Num. Meth. Engrg.* 26, 1988, 2645-55.
4. Bergan P.G., Fellipa C.A.: A triangular membrane element with rotational degrees-of-freedom, *Comp. Meth. Appl. Engrg*, 50, 1985, 25-69.
5. Cook R.D.: A plane hybrid element with rotational D.O.F and adjustable stiffness, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 24, 1987, 1499-1508.
6. Hughes T.J.R, Brezzi F.: On drilling degrees-of-freedom, *Com. Meth. Appl. Engrg.*, 72, 1989, 105-121.
7. Chinosi C., Comodi M.J., Sacchi G.: A new finite element with „drilling” D.O.F, *Comp. Meth. Appl. Engrg*, 149, 1997, 1-14.
8. Rakowski G. Laskowska U. : An engineering approach to drilling rotations for membrane finite elements, 2nd ECCM 2001, Kraków 26-29.06.2001, No 92
9. Rakowski G.: *Metoda elementów skończonych-wybrane problemy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Piotr Konderla

Abstract

The approach is based on the assumption of existing a rigid nodal point in the area of membrane. The nodal displacements cause on all over the membrane displacements and strains fields typical for in-plane problems. Using the standard procedure, the 12x12 and 10x10 stiffness matrixes for four nodes element were obtained. A series of numerical verification study has been carried out.