

Rafał KRZYWOŃ*
Politechnika Śląska

NOŚNOŚĆ ŚCISKANYCH ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH A KRYTERIA ZNISZCZENIA BETONU

Streszczenie. Powszechnie, przy określaniu nośności elementu żelbetowego, stosowane są kryteria zniszczenia w jednoosiowym stanie naprężenia. W obliczeniach nośności elementu zginanego lub mimośrodowo ściskanego pomija się wpływ sił tnących. To podejście przyjmowane jest jako aksjomat nawet w przypadkach, w których mamy do czynienia z oczywistym złożonym stanem naprężenia. W pracy przedstawiono przykładowe analizy prostego wspornika żelbetowego poddanego jednoczesnemu obciążeniu momentem zginającym, siłą osiową i tnącą. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem MES, bazując na sprężysto-plastycznym modelu materiałowym z prawem izotropowego wzmocnienia / osłabienia. Nawet w tak prostych przypadkach możemy obserwować wpływ złożonego stanu naprężenia na nośność elementu.

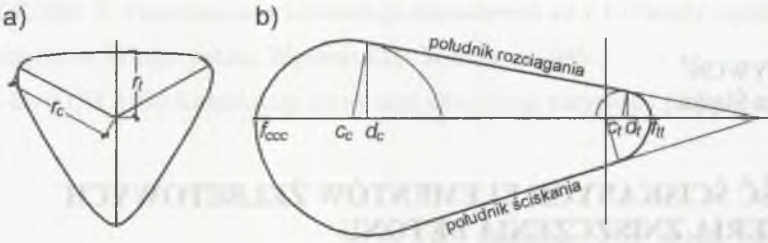
ULTIMATE LOAD CAPACITY OF COMPRESSED RC MEMBERS REFERRING TO FAILURE CRITERIA OF CONCRETE

Summary. The uni-axial failure criteria are in common use in estimation of ultimate load capacity of reinforced concrete members. The shear is neglected while considering the load capacity of members subjected to flexure or eccentric compression. This approach became a nearly axiom and is applied even in case of apparently complex stress state. Analysing a simple reinforced concrete cantilever subjected to combined action of bending moment, axial and shear force the ultimate load capacity was determined. Calculation based on elasto-plastic material model with associated, isotropic hardening/softening rule proved, that even in so simple case of plain stress state, ultimate load capacity should not be determined on the base of one uni-axial strength characteristic only.

1. Wstęp

Zazwyczaj obliczenia nośności konstrukcji żelbetowych są wykonywane z wykorzystaniem sprężysto-idealnieplastycznego modelu materiałowego. Bardziej realistyczny opis środowiska, jakim jest żelbet, daje nam model sprężysto-plastyczny z prawem osłabienia. Jest on przedstawiony w Eurokodzie 2, ale dotychczas rzadko stosowany w praktyce. W ostatnich latach obserwujemy duży rozwój modeli konstytutywnych opartych na tym modelu. W tej części zaprezentowany zostanie skrótowy opis modelu materiałowego oraz pakietu programów MAFEM opracowanych w Katedrze Inżynierii Budowlanej Politechniki Śląskiej i wykorzystanych do wykonania prezentowanych w dalszej części referatu obliczeń.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Stanisław Majewski, prof. PŚI.



Rys. 1. Powierzchnia zniszczenia: a) przekrój dewiatorowy, b) przekrój południkowy
 Fig. 1. Failure surface: a) deviatoric section, b) meridian section

2. Opis modelu materiałowego

Zachowanie takich materiałów jak beton, kamień, grunt może być realistycznie opisane poprzez zastosowanie sprężysto-plastycznego modelu materiałowego ze stowarzyszonym izotropowym prawem wzmocnienia/osłabienia. Powierzchnia zniszczenia w przestrzeni naprężeń zdefiniowana poprzez naprężenie główne $\sigma_m = J_1$, intensywność naprężenia $\bar{\sigma} = \sqrt{J_2^D}$ i kąt Lodego Θ została schematycznie zaprezentowana na rysunku 1.

Krzywa jej południka składa się z trzech części: linii prostej w części środkowej ($d_c \leq \sigma_m \leq d_t$), kołowej nasadki w części rozciąganej ($\sigma_m > d_t$), kołowej nasadki w części ściskanej ($\sigma_m < d_c$). Przekrój dewiatorowy stanowi krzywa znajdująca się pomiędzy trójkątem Rankina i okręgiem Druckera-Pragera (Willam & Warnke, 1974).

Powierzchnia zniszczenia jest określona przez charakterystykę wytrzymałościową materiału. Dla betonu jest to wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie f_t oraz na jedno-, dwu- i trójosiowe ściskanie f_c, f_{cc}, f_{ccc} .

- Główna część tej powierzchni (prosty południk) jest dana wzorem:

$$F_1 = \bar{\sigma} - (\beta - 3\alpha\sigma_m)Y\rho_\Theta = 0,$$

$$\rho_\Theta = \frac{\tan\Theta}{2\rho_t\sqrt{3}\cos\Theta} + \frac{1}{\cos\Theta} \left(1 - \frac{\tan\Theta}{\sqrt{3}}\right), \quad (1)$$

$$\rho_t = \frac{r_t}{r_c},$$

gdzie α i β – parametry zależne od charakterystyki wytrzymałościowej, Y – funkcja odkształcenia, Θ – kąt Lodego.

Parametry α i β dla południka rozciągania obliczamy ze wzorów:

$$\alpha = \frac{m_{cc} - m_t}{2m_{cc} + m_t} \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = \frac{m_{cc} m_t \sqrt{3}}{2m_{cc} + m_t} f_c \quad (2)$$

$$m_t = \frac{f_t}{f_c}, \quad m_{cc} = \frac{f_{cc}}{f_c}$$

gdzie f_c, f_{cc}, f_t – odpowiednio wytrzymałość betonu w stanie jedno-, dwu- i trójosiowego ściskania.

- Zamykające nasadki w strefie rozciąganej i ściskanej zdefiniowane są następująco:

$$(\sigma_m - c_t)^2 + \bar{\sigma}^2 = r_t^2, \quad (3)$$

$$(\sigma_m - c_c)^2 + \bar{\sigma}^2 = r_c^2.$$

gdzie c są współrzędnymi środka okręgu, r oznacza promień, a indeksy t, c odpowiadają odpowiednio rozciąganej i ściskanej strefie. Współrzędne środków okręgów oraz wielkość ich promieni są tak dobrane, aby były one styczne do odpowiednich południków. Dodatkowo założono, że południk ściskania $c_t = 0$ i c_c przecina kierunek naprężeń głównych w punkcie f_{ccc} . Założenie to fizycznie określa parametr f_{ccc} jako wytrzymałość betonu w trójosiowym stanie naprężenia hydrostatycznego, jakkolwiek jest to raczej tylko matematyczny parametr określony na podstawie ekstrapolacji wyników trójosiowych badań betonu.

Dwuparametrowe izotropowe prawo wzmocnienia-osłabienia określa ewolucję powierzchni zniszczenia. Pierwszy z tych parametrów κ_1 jest obliczany jako pierwiastek kwadratowy plastycznej części drugiego niezmiennika dewiatora stanu odkształcenia. Funkcja plastyczności Y dana jest wtedy wzorem:

$$Y = C_4 + (C_3 - C_4) \exp(-C_2 \kappa_1), \quad (4)$$

gdzie C_2, C_3 i C_4 są stałymi materiałowymi.

Funkcja plastyczności wynosi $Y = 1$ dla $\kappa_1 = 0$ i maleje do C_4 po pojawieniu się nieodwracalnych odkształceń postaciowych. Powoduje to zmniejszenie kątów nachylenia południków powierzchni zniszczenia.

Drugi parametr osłabienia κ_2 jest określony jako plastyczna część odkształcenia objętościowego. Po uwzględnieniu tego parametru maksymalne naprężenie główne dane jest wzorami:

$$\begin{aligned}
 f_{ccc} &= f_{ccc,i} && \text{dla } \kappa_2 \leq 0, \\
 f_{ccc} &= 0.001 + f_{ccc,i} \exp(-C_1 \kappa_2) && \text{dla } \kappa_2 > 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Dwuparametrowe prawo osłabienia powoduje kurczenie się powierzchni granicznej poprzez zmniejszanie wartości f_{ccc} zależnie od plastycznej części odkształcenia objętościowego oraz poprzez zmniejszanie kąta pomiędzy kierunkiem naprężeń głównych a południkiem powierzchni zniszczenia zależnie od nieodwracalnej części odkształceń postaciowych.

Podsumowując, właściwości materiałowe są w modelu materiałowym zdefiniowane poprzez 10 parametrów:

- parametry wytrzymałościowe dla betonu: f_c , f_{cc} , f_{ccc} oraz f_t ,
- parametry związane z odkształceniem: początkowe wartości E_i i ν_i oraz maksymalne odkształcenie w jednoosiowym stanie naprężenia ε_c ,
- parametry osłabienia: C_2 , C_3 oraz C_4 .

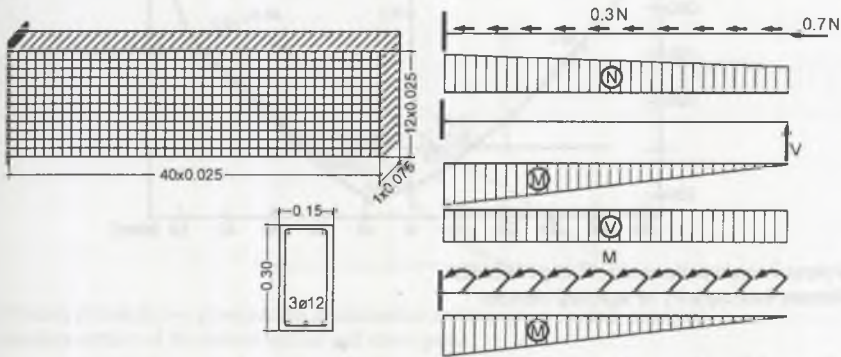
Poprzez określenie wszystkich parametrów wytrzymałościowych przez wytrzymałość w jednoosiowym stanie naprężenia f_c możemy zredukować ilość parametrów do 8. Większość z tych parametrów można wyznaczyć podczas prostych testów laboratoryjnych. Pewne problemy pojawiają się podczas próby określenia parametrów wzmocnienia/osłabienia. Pomocne w tym przypadku mogą okazać się obliczenia porównawcze elementów, dla których znane są dokładne wyniki testów laboratoryjnych.

3. Oprogramowanie

W obliczeniach wykorzystano opracowany przez Stanisława Majewskiego pakiet programów MAFEM. Główny program liczący jest oparty na iteracyjno-przyrostowej procedurze z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Elementy betonowe są modelowane jako 8-węzłowe elementy sześciennie z 24 stopniami swobody. Zbrojenie jest reprezentowane przez elementy liniowe rozciągnięte pomiędzy węzłami siatki elementów sześciennych. Dla zbrojenia zastosowano idealnie sprężysto-plastyczny model materiałowy. Sprężysto-plastyczny model betonu z prawem izotropowego osłabienia został szczegółowo przedstawiony w poprzednim punkcie.

4. Analiza mimośrodowo obciążonego pręta żelbetowego

Zazwyczaj do analiz prostych elementów w płaskim stanie naprężenia używane są dwuwymiarowe wersje programów liczących. W przedstawianym przykładzie zastosowano program umożliwiający trójwymiarowe analizy w złożonym stanie naprężenia. Obliczany żelbetowy wspornik poddany został jednoczesnemu oddziaływaniu momentu zginającego, siły osiowej i siły tnącej. Przeprowadzono analizy dla różnych kombinacji momentu zginającego i siły osiowej z jednoczesnym wpływem siły tnącej lub bez tego wpływu.



Rys. 2. Siatka podziału na elementy skończone oraz schematy obciążenia

Fig. 2. Finite element's mesh and local schemes

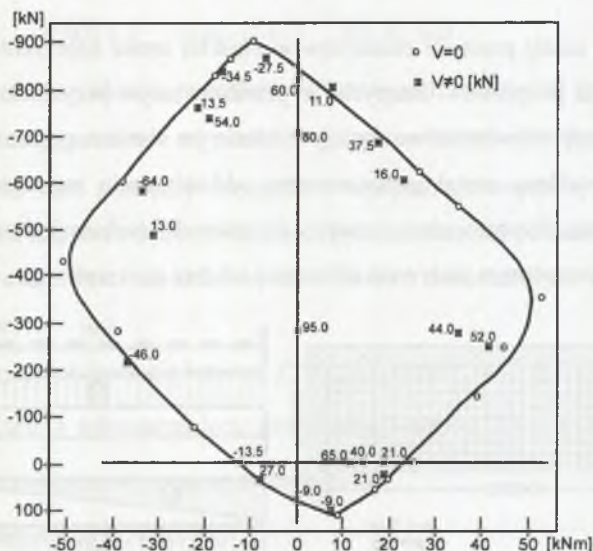
Wymiary belki wraz z zaznaczonym zbrojeniem przedstawiono na rysunku 2. Belka została podzielona na 480 sześciennych elementów. Aby uniknąć lokalnych zniszczeń w części bezpośrednio obciążonej na obu końcach belki, cztery ostatnie kolumny elementów zastąpiono elementami o identycznej odkształcalności, ale zwiększonej wytrzymałości. Poniżej przedstawiono przyjęte charakterystyki betonu:

- wytrzymałości na ściskanie: $f_c = -33.8 \text{ MPa}$, $f_{cc} = -39.5 \text{ MPa}$, $f_{cc} = -18200 \text{ MPa}$,
- wytrzymałość na rozciąganie: $f_t = 3.03 \text{ MPa}$,
- początkowy moduł sprężystości i moduł Poissona $E_i = 26250 \text{ MPa}$, $\nu = 0.20$
- maksymalne odkształcenie podczas ściskania $\epsilon_c = -0.0022$,
- parametry osłabienia: $C_2 = 1428,5712$, $C_3 = 0.80$, $C_4 = 0.05$.

Bazując na testach laboratoryjnych przyjęto następujące charakterystyki stali zbrojeniowej:

- wytrzymałość na ściskanie / rozciąganie $f_y = \pm 421 \text{ MPa}$,
- moduł sprężystości $E_s = 197000 \text{ MPa}$.

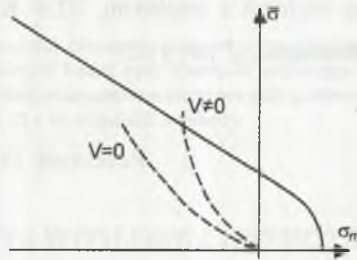
Założono takie przyrosty obciążenia, aby zniszczenie następowało w 15-20 kroku.



Rys. 3. Wykres interakcji dla analizowanego elementu
Fig. 3. Ultimate load capacity of analysed element

Rezultaty obliczeń przedstawiono na rysunku 3. Na wykresie interakcji każdy punkt odpowiada nośności przekroju dla pewnej kombinacji siły osiowej i momentu zginającego. Wszystkie punkty połączone linią odpowiadają wartościom wyznaczonym dla obciążenia bez wpływu siły tnącej ($V = 0$). Kształt krzywej interakcji otrzymany w wyniku analiz potwierdza przydatność zastosowanego oprogramowania i modelu materiałowego, jest wyjątkowo zgodny z wykresem określonym według normowych warunków nośności granicznej. Wyniki analiz z udziałem siły ścinającej przedstawiono na wykresie w postaci punktów z zaznaczoną wartością siły V . Większa ilość tych punktów znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą interakcji. Oznacza to, że naprężenie styczne wywołane siłą poprzeczną zmniejsza nośność przekroju. Kilka punktów znajdujących się na osiach współrzędnych odpowiada przypadkom zniszczenia dla zerowych wartości siły osiowej lub momentu zginającego. Można zauważyć, że im wyższa wartość siły tnącej, tym szybciej następuje zniszczenie. Dwa punkty znajdują się nieco poza obszarem ograniczonym krzywą interakcji. Ich umiejscowienie jest spowodowane dyskretnym charakterem analizy. Obciążenia są przykładane w różnych przyrostach i czasami procedura wskazująca zniszczenie odbywające się na granicy dwóch kroków wykazuje je dopiero w kroku wyższym. Procedura ta jest niezależna od zało-

zonych materiałowych kryteriów zniszczenia. Sumuje ona wyniki obliczeń dla wszystkich elementów w obszarze w którym spodziewane jest zniszczenie i na tej podstawie decyduje o wyczerpaniu nośności analizowanej belki. Z tymi samymi przyczynami jest związany niezbyt gładki kształt krzywej interakcji. Różnice pomiędzy nośnością elementu analizowanego z lub bez udziału siły tnącej mogą być prosto wytłumaczone na rysunku powierzchni zniszczenia dla wykorzystanego w programie modelu materiałowego betonu. Przekrój południkowy takiej powierzchni przedstawiono na rysunku 4. Ścieżka naprężeń dla niezerowej wartości siły tnącej przyrasta znacznie szybciej, prędzej osiągając powierzchnię zniszczenia.



Rys. 4. Przekrój południkowy powierzchni zniszczenia z zaznaczeniem ścieżek naprężeń
Fig. 4. Meridian section of the failure surface and stress paths

5. Podsumowanie

Pominięcie wpływu trójosiowego stanu naprężenia i założenie w obliczeniach jednoosiowych kryteriów zniszczenia może być przydatne w wielu praktycznych zastosowaniach, jednakże nawet w przypadku płaskiego stanu naprężenia wspólne oddziaływanie sił osiowych i poprzecznych może zmienić rzeczywistą nośność analizowanego elementu. Uproszczenia te są, niestety, także stosowane podczas analiz elementów w trójosiowym stanie naprężenia, gdzie może to prowadzić do znacznie większych błędów. Przykładem może być chociażby przebiec. Zaprezentowane wyniki analizy wykazują przydatność zaprezentowanego oprogramowania do analiz przestrzennych elementów w złożonym stanie naprężenia.

LITERATURA

1. Majewski S.: Elasto-Plastic Double-Cap-Model for Structure-Subsoil Interaction Problems, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, Warszawa 1994, tom XL, z3/4, 487-506.
2. Wiliam K.J., Warnke E.P.: Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete, *IABSE Sem. of Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, Bergamo, Italy 1995.
3. Majewski S. Wandzik G. Krzywoń R.: Numeryczna i doświadczalna weryfikacja pakietu programów MAFEM do obliczania metodą MES konstrukcji żelbetowych i rozwiązywania problemów współpracy budowli z podłożem, *XLV Konferencja naukowa Krynica 1999*, tom 2, *Konstrukcje Betonowe*, s. 167-174.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Michał Knauff

Abstract

The uni-axial failure criteria are in common use in estimation of ultimate load capacity of reinforced concrete members. The shear is neglected while considering the load capacity of members subjected to flexure or eccentric compression. Analysing a simple reinforced concrete cantilever subjected to combined action of bending moment, axial and shear force the ultimate load capacity was determined. Calculations were made using software package MAFEM with implemented elasto-plastic material model with associated, isotropic hardening/softening rule. Majewski developed material model and software. Even in so simple elements with plain stress state, ultimate load capacity should not be determined on the base of one uni-axial strength characteristic only. Combined action of normal and shear stress changes significantly the load capacity. It is showed on figure no 3. Points representing non-zero shear force are situated inside the interaction diagram. It means, that the shear force decrease the load capacity of the element.