

Dorota LECIEJ - PIRCZEWSKA*

Politechnika Szczecińska

MODELOWANIE TEMPERATURY W POMIESZCZENIU PRZY ZMIENNEJ TEMPERATURZE ZEWNĘTRZNEJ

Streszczenie. W literaturze znane są matematyczne modele przeznaczone do badania dynamiki ciepłej ogrzewanych obiektów. Większość z nich jest jednak tak skomplikowana, że właściwie nie spełnia oczekiwań w zakresie możliwości ich zastosowania w praktyce inżynierskiej dla wymiarowania i analiz symulacyjnych procesów ogrzewania. W związku z tym w niniejszej pracy podjęto próbę opracowania takiego modelu, który byłby uproszczony w stopniu umożliwiającym jego łatwe wykorzystanie w praktyce. Na podstawie tego modelu określono, jak zmieniają się temperatury w budynku mieszkalnym ogrzewanym ze stałą mocą cieplną przy zmiennej temperaturze zewnętrznej.

THE ROOM TEMPERATURE MODELLING BY THE CHANGING EXTERNAL TEMPERATURE

Summary. Mathematical dynamic models for simulation of the thermal behaviour of a centrally heated building are shown in the literature. Most of them are so complicated, that it makes them impossible to use in practice for describing the state of the heated objects. Referring to this, the paper presents such a simplified model that could be easy exploit in practice. Changes of the temperatures in the apartment building heated continuously by the changing external temperature are determinated on the basis of this model.

1. Wstęp

Działania dążące do zmniejszenia zużycia energii i ekonomicznego gospodarowania nią w układach ogrzewania stale zwiększają swój zasięg. Zagadnienia związane z dokładnością i jednocześnie łatwością prowadzenia obliczeń zapotrzebowania energii cieplnej należą do jednych z najintensywniej rozwijanych w obszarze inżynierii sanitarnej. Prace prowadzone w tym zakresie związane są w dużej mierze z optymalizacją procesu ogrzewania i wprowadzaniem nowych metod jego realizowania. Jedną z takich metod oszczędzania energii przy ogrzewaniu budynków jest wykorzystanie systemu ogrzewania niestacjonarnego. Rozwiązanie takie zakłada, że rozpatrywany obiekt użytkowany (i jednocześnie ogrzewany) jest okre-

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Wacław Szaflik, prof. PSz.

sowo albo że realizuje się proces ogrzewania ze zmienną intensywnością. Dzięki odpowiednio dobranym okresom wyłączenia lub osłabienia ogrzewania w cyklu dobowym można uzyskać pewne oszczędności energii, nie powodując tym samym pogorszenia warunków komfortu cieplnego użytkowników pomieszczeń. Stosowanie takiego systemu ogrzewania wymaga opracowania matematycznego modelu odpowiedniego do badania dynamiki cieplnej takich obiektów. Większość z istniejących modeli matematycznych nie spełnia oczekiwań w zakresie możliwości ich zastosowania w praktyce inżynierskiej dla wymiarowania i analiz symulacyjnych procesów ogrzewania niestacjonarnego. Są one najczęściej opracowane przy założeniu stałości temperatury zewnętrznej, która w rzeczywistości jest zmienna. W związku z tym w niniejszej pracy podjęto próbę opracowania prostego modelu matematycznego odpowiedniego do badań dynamiki cieplnej obiektów ogrzewanych zarówno niestacjonarnie, jak i ze stałą mocą cieplną przy zmiennej temperaturze zewnętrznej.

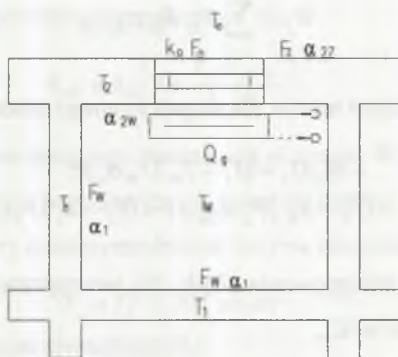
2. Sformułowanie modelu matematycznego

Do opisu matematycznego nieustalanej wymiany ciepła przyjęto model fizyczny obiektu przedstawiony na rysunku 1. Ogrzewane pomieszczenie od powietrza zewnętrznego o temperaturze T_e oddzielone jest przegrodą zewnętrzną o powierzchni F_z . W przegrodzie tej znajduje się okno o powierzchni F_o i współczynniku przenikania k_o .

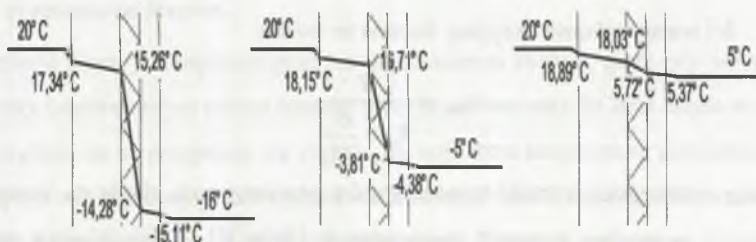
W nowoczesnym budownictwie stosuje się przegrody wielowarstwowe składające się z zewnętrznej warstwy fakturowej, izolacji termicznej o znacznym oporze cieplnym i wewnętrznej warstwy konstrukcyjnej. Dla ścian betonowych wartość współczynnika przewodzenia ciepła betonu jest duża i przy dobrej izolacji temperatura w przekroju poprzecznym warstwy konstrukcyjnej ma praktycznie tę samą wartość. Przykładowe rozkłady temperatur w stosowanym rozwiązaniu zewnętrznej ściany wielowarstwowej przy różnych wartościach temperatury zewnętrznej i temperaturze wewnętrznej równej $T_w = 20^{\circ}\text{C}$ przedstawiono na rysunku 2. Temperatury te zostały określone dla ściany o następującej budowie:

- warstwa zewnętrzna - beton o grubości 6 cm,
- izolacja termiczna - styropian o grubości 6 cm,
- warstwa wewnętrzna - beton zbrojony o grubości 15 cm.

W rozważaniach przyjęto, że przewodzenie ciepła w betonie jest na tyle duże, że w przekroju warstwy konstrukcyjnej przegrody można przyjąć stałą temperaturę T_2 odpowiadającą temperaturze w osi tej warstwy, zaś pojemności cieplne pozostałych warstw można pominąć. Dla przegrody zewnętrznej we współczynnikach przyjmowania ciepła uwzględniono opory poszczególnych warstw przyjmując, że pojemność przegrody skupiona jest w osi warstwy konstrukcyjnej.



Rys. 1. Schemat pomieszczenia ogrzewanego przyjętego w modelu
Fig. 1. The scheme of the heated room



Rys. 2. Rozkład temperatur w przegrodzie zewnętrznej wielowarstwowej
Fig. 2. Temperature profiles in the external multilayer wall

Od pomieszczeń sąsiednich pomieszczenie rozpatrywane jest oddzielone przegrodami wewnętrznymi. Przyjęto, że nie występuje oddziaływanie cieplne przegród między sobą (przegród wewnętrznych nie potraktowano jako żeber przegrody zewnętrznej, tylko jako elementy odosobnione), a przepływ ciepła przez przegrody jest jednowymiarowy - prostopadły do ich powierzchni. Przy opracowywaniu tego modelu założono również, że powietrze wypełniające pomieszczenie jest idealnie mieszane i w związku z tym jego stan może być opisany jedną temperaturą T_w . Kolejnym uproszczeniem było założenie, że jedynym źródłem ciepła w pomieszczeniu jest grzejnik przekazujący strumień ciepła o mocy Q_g . Pominięto wszelkie zyski

ciepła pochodzące od źródeł wewnętrznych i nasłonecznienia. Przyjęto, że temperatura wszystkich przegród wewnętrznych jest taka sama, stała w całym ich przekroju i równa T_1 . Łączna pojemność cieplna przegród wewnętrznych W_1 wynosi:

$$W_1 = \sum_{j=1}^J F_{Wj} \delta_{Wj} \rho_{Wj} c_{Wj} + \sum_{k=1}^K F_{Sk} \delta_{Sk} \rho_{Sk} c_{Sk} \quad (1)$$

Pojemność cieplną "L" przegród zewnętrznych W_2 określa się jako sumę ich pojemności:

$$W_2 = \sum_{l=1}^L F_{Zl} \delta_{Zl} \rho_{Zl} c_{Zl} \quad (2)$$

Dla tak zdefiniowanych założeń można dla rozpatrywanego modelu napisać następujące równania bilansu energii:

$$-W_1 dT_1 = (T_1 - T_w) F_w \alpha_1 d\tau \quad (3)$$

$$-W_2 dT_2 = (T_2 - T_w) F_z \alpha_{2w} d\tau + (T_2 - T_e) F_z \alpha_{2z} d\tau \quad (4)$$

gdzie: α_1 – współczynnik przejmowania ciepła dla wewnętrznej powierzchni przegród wewnętrznych [W/m^2K],

α_{2w} – zastępcza wartość współczynnika przejmowania ciepła na wewnętrznej powierzchni przegród zewnętrznych [W/m^2K] uwzględniająca opór połowy grubości warstwy konstrukcyjnej, liczona ze wzoru:

$$\alpha_{2w} = \frac{l}{R_i + \frac{\delta_1}{2\lambda_1}} \quad (5)$$

α_{2z} – zastępcza wartość współczynnika przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni przegród zewnętrznych [W/m^2K] uwzględniająca opór połowy grubości warstwy konstrukcyjnej, opór warstwy izolacji i warstwy fakturowej, liczona ze wzoru:

$$\alpha_{2z} = \frac{l}{\frac{\delta_1}{2\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + R_e} \quad (6)$$

R_i, R_e – opory przejmowania ciepła na odpowiednio wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni przegród zewnętrznych [m^2K/W],

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – grubość kolejnych warstw przegrody zewnętrznej [m],

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – współczynnik przewodzenia ciepła dla materiału kolejnych warstw przegrody [W/mK].

W równaniach tych mamy trzy niewiadome temperatury. Niezbędne jest zatem dodatkowe równanie zamykające ten układ. Równaniem takim jest bilans energii dla powietrza zawartego w pomieszczeniu przy założeniu, że pojemność cieplną powietrza można w porównaniu z pojemnością cieplną przegród pominąć:

$$(T_1 - T_W)F_W\alpha_1 d\tau + (T_2 - T_W)F_Z\alpha_{2W}d\tau + Q_g d\tau - (T_W - T_e)F_O k_{OZ} d\tau = 0 \quad (7)$$

gdzie: k_{OZ} - "zastępcza" wartość współczynnika przenikania ciepła dla okna uwzględniająca infiltrację strumienia powietrza zewnętrznego V_P

$$k_{OZ} = k_o \left(1 + \frac{V_P \rho_P c_P}{k_o F_o} \right) \quad (8)$$

Temperatura powietrza zewnętrznego zmienia się w czasie. Występują zmiany długofalowe związane z rocznym cyklem pogodowym, na które nakłada się cykl dobowy temperatury. Dobowy przebieg temperatury można przedstawić krzywą sinusoidalną:

$$T_e = T_e^o + \Delta T_e \sin a\tau \quad (9)$$

gdzie: T_e^o - średnia temperatura zewnętrzna [K]

ΔT_e - połowa dobowej amplitudy temperatury

a - przesunięcie fazowe.

Powierzchnia ziemi jest najzimniejsza tuż przed samym świtem, gdyż gdy nie ma powłoki chmur, to przy bezchmurnym niebie istnieją sprzyjające warunki do strat ciepła w ciągu całej nocy. Ze względu na to przyjmuje się zwykle, że najniższa temperatura powietrza zewnętrznego występuje około jednej godziny przed wschodem Słońca. Gdy tylko Słońce wszędzie, to jego promieniowanie zaczyna ogrzewać powierzchnię Ziemi. Temperatura Ziemi wzrasta i ciepło z jej powierzchni jest unoszone przez warstwy powietrza leżące tuż nad nią. W ten sposób następuje stopniowy wzrost temperatury powietrza w miarę jak Słońce wznosi się na niebie. Przyrost ten utrzymuje się jeszcze przez pewien czas po przejściu Słońca przez zenit, ponieważ pewna ilość ciepła przejęta przez Ziemię od Słońca przed południem i zakumulowana w górnych warstwach jest tracona wczesnym południem. W związku z tym najwyższa temperatura powietrza występuje około dwie, trzy godziny po południu. Pomiędzy godziną 13⁰⁰ a 17⁰⁰ nie występują duże zmiany temperatury zewnętrznej. W rzeczywistości sinusoida obrazująca dobowy przebieg temperatury nie jest całkowicie symetryczna, ponieważ czas między najniższą a najwyższą temperaturą nie musi być koniecznie równy okresowi między najniższą a najwyższą wartością funkcji. Silne zachmurzenie działające jako osłona przed

napromieniowaniem i wypromieniowaniem ciepła powoduje spłaszczenie krzywej - obniża maksimum temperatury w dzień, a w nocy podwyższa jej minimum.

Z równania (7) można wyznaczyć temperaturę powietrza wewnętrznego T_w i po wstawieniu jej do równań (3), (4) oraz uwzględniając zależność (9) otrzymuje się następujące równania dla rozpatrywanego modelu:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\tau} = & -T_1 \frac{(F_O k_{OZ} + F_Z \alpha_{2W}) F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \\ & + T_2 \frac{F_Z \alpha_{2W} F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \\ & + \frac{F_W \alpha_W F_O k_{OZ}}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \Delta T_e \sin a\tau + \frac{(F_O k_{OZ} T_e^o + Q_g) F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{d\tau} = & T_1 \frac{F_Z \alpha_{2W} F_W \alpha_W}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \\ & - T_2 \left(\frac{(F_O k_{OZ} + F_W \alpha_{2W}) F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) + \\ & + \left(\frac{F_O k_{OZ} F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) \Delta T_e \sin a\tau + \\ & + \left(\frac{F_O k_{OZ} F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) T_e^o + \frac{Q_g F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \end{aligned} \quad (11)$$

Po podstawieniu:

$$A = - \frac{(F_O k_{OZ} + F_Z \alpha_{2W}) F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \quad (12)$$

$$B = \frac{F_Z \alpha_{2W} F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \quad (13)$$

$$H = \frac{F_O k_{OZ} F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \Delta T_e \quad (14)$$

$$Y = \frac{(F_O k_{OZ} T_e^o + Q_g) F_W \alpha_W}{W_1 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \quad (15)$$

$$E = \frac{F_Z \alpha_{2W} F_W \alpha_W}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \quad (16)$$

$$F = - \left(\frac{(F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W) F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) \quad (17)$$

$$J = \left(\frac{F_O k_{OZ} F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) \Delta T_e \quad (18)$$

$$L = \left(\frac{F_O k_{OZ} F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} + \frac{F_Z \alpha_{2Z}}{W_2} \right) T_e^o + \frac{Q_s F_Z \alpha_{2W}}{W_2 (F_O k_{OZ} + F_W \alpha_W + F_Z \alpha_{2W})} \quad (19)$$

otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{dT_1}{d\tau} = AT_1 + BT_2 + H \sin a\tau + Y \quad (20)$$

$$\frac{dT_2}{d\tau} = ET_1 + FT_2 + J \sin a\tau + L, \quad (21)$$

kóry można rozwiązać analitycznie i po uzupełnieniu warunkami początkowymi uzyskać rozwiązanie dla przypadku odpowiadającego tym warunkom.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Układ równań (20), (21) rozwiązano niezależnie dwoma różnymi metodami - Eulera i d'Alemberta. W obu przypadkach otrzymano poszukiwane rozwiązanie naszego układu równań w postaci:

$$T_1 = \frac{F - A + \sqrt{(A - F)^2 + 4BE}}{2\sqrt{(A - F)^2 + 4BE}} \left[C_1 e^{(A+K_1 E)\tau} - \frac{H + K_1 J}{a^2 + (A + K_1 E)^2} (a \cos a\tau + (A + K_1 E) \sin a\tau) - \frac{Y + K_1 L}{A + K_1 E} \right] + \frac{F - A - \sqrt{(A - F)^2 + 4BE}}{2\sqrt{(A - F)^2 + 4BE}} \left[C_2 e^{(A+K_2 E)\tau} - \frac{H + K_2 J}{a^2 + (A + K_2 E)^2} (a \cos a\tau + (A + K_2 E) \sin a\tau) - \frac{Y + K_2 L}{A + K_2 E} \right] \quad (22)$$

$$T_2 = \frac{E}{\sqrt{(A-F)^2 + 4BE}}$$

$$\left[-C_1 e^{(A+K_1 E)\tau} + \frac{H+K_1 J}{a^2 + (A+K_1 E)^2} (a \cos a\tau + (A+K_1 E) \sin a\tau) + \frac{Y+K_1 L}{A+K_1 E} + \right. \\ \left. + C_2 e^{(A+K_2 E)\tau} - \frac{H+K_2 J}{a^2 + (A+K_2 E)^2} (a \cos a\tau + (A+K_2 E) \sin a\tau) - \frac{Y+K_2 L}{A+K_2 E} \right] \quad (23)$$

gdzie:

$$K_1 = \frac{F-A - \sqrt{(A-F)^2 + 4BE}}{2E} \quad (24)$$

$$K_2 = \frac{F-A + \sqrt{(A-F)^2 + 4BE}}{2E} \quad (25)$$

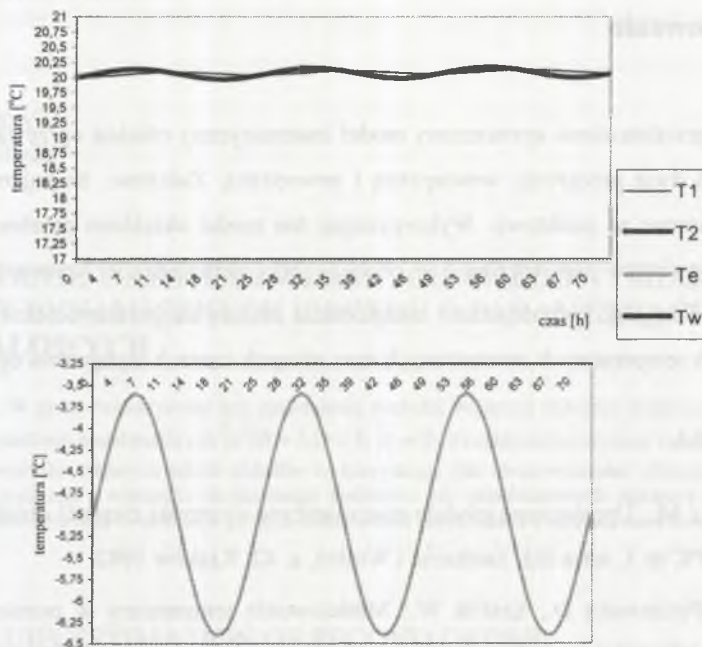
Stałe C_1 i C_2 określa się na podstawie warunków początkowych.

4. Wykorzystanie modelu do analizy stanu cieplnego budynku przy zmiennej temperaturze zewnętrznej

Przedstawiony model wykorzystano do analizy zachowania się obiektu ogrzewanego ze stałą mocą ciepłą przy zmiennej temperaturze zewnętrznej. Obliczenia przeprowadzono na przykładzie budynku mieszkalnego wielorodzinnego, wykonanego w technologii Wk-70, o kubaturze 24689 m³. Zewnętrzne ściany konstrukcyjne budynku są trzywarstwowe o budowie takiej, jak przedstawiono w punkcie 2 niniejszej pracy. Współczynnik przenikania ciepła dla ścian zewnętrznych wynosi $k = 0.62$ W/m²K. Okna w budynku są drewniane zespolone o współczynniku przenikania ciepła $k_0 = 2.6$ W/m²K o łącznej powierzchni $F_0 = 1265$ m².

Przyjęto następujący model fizyczny badanego procesu:

- założono, że w chwili początkowej obiekt znajduje się w stanie ustalonego przenikania ciepła przez przegrody, temperatura zewnętrzna wynosi $T_e = -5$ °C i temperatura przegród wewnętrznych $T_1 = 20$ °C,
- w chwili rozpoczynającej analizowany proces ($\tau = 0$) temperatura zewnętrzna zaczyna zmieniać się sinusoidalnie o amplitudzie $\Delta T_e = 2,8$ °C. Zakładamy, że moc ciepła grzejnika Q_g jest stała (taka, jak w stanie ustalonym).



Rys. 3. Wykres zmian temperatur w budynku i temperatury zewnętrznej w ciągu 72 godzin
 Fig. 3. Temperature variation diagram during the 72 hours

Celem obliczeń było wyznaczenie zmian temperatur powietrza i przegród w budynku w ciągu pewnego okresu. Otrzymane wyniki dla 72 godzin przedstawiono na wykresie zamieszczonym na rys. 3.

Analizując otrzymane wyniki można zauważyć, że wahania temperatury powietrza wewnętrznego o amplitudzie $\Delta T_e = 2,8^{\circ}\text{C}$ wywołują bardzo małe wahania temperatur w budynku. Temperatura wewnętrzna zmienia się w ciągu doby zaledwie o około $0,17 - 0,19^{\circ}\text{C}$, a wahania temperatur ścian są jeszcze mniejsze. Przebieg wahań temperatur w budynku i jego przegródach można uważać za sinusoidalnie zmienny. Otrzymane krzywe są przesunięte w czasie w stosunku do sinusoidy temperatury zewnętrznej. Najszybciej na zmiany temperatury zewnętrznej reaguje temperatura wewnętrzna (opóźnienie wynosi około 2 godziny), a najwolniej temperatura przegród wewnętrznych (po około 7 godzinach).

Wahania temperatury wewnętrznej rzędu $0,17 - 0,19^{\circ}\text{C}$ są praktycznie niezauważalne przez człowieka. Takie małe różnice temperatur są wynikiem dużej pojemności cieplnej rozpatrywanego budynku. Wynika z tego, że przy stałej wydajności cieplnej grzejników stosunkowo duże zmiany temperatury zewnętrznej wywołują niewielkie zmiany temperatury wewnętrznej.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono uproszczony model matematyczny obiektu ogrzewanego. Wyróżniono w nim dwie przegrody: wewnętrzną i zewnętrzną. Założono, że pojemności ciepłe przegród skupione są punktowo. Wykorzystując ten model określono przebieg temperatury przegród i powietrza wewnętrznego w obiekcie przy sinusoidalnie zmiennej temperaturze zewnętrznej. Przy jego wykorzystaniu można badać zmiany temperatur obiektów przy zmiennych i stałych temperaturach zewnętrznych oraz różnych czasach wyłączenia ogrzewania [1].

LITERATURA

1. Hopkowicz M.: Uproszczone modele matematyczne dynamiki cieplnej obiektów ogrzewanych, ZNPK nr 1, seria Inż. Sanitarna i Wodna, z. 42, Kraków 1992.
2. Leciej - Pirczewska D., Szaflik W.: Modelowanie temperatury w pomieszczeniu przy zmianie wydajności grzejnika, PNPS nr 561, IIL nr 34, Szczecin 2000.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał, prof. PO

Abstract

The paper presents simply mathematical model of the heated room. On the basis of this model the changes of the temperatures in the apartment building heated continuously are determined by the changing external temperature. Making use of this model one can test the temperatures changes in different buildings by constant and changing external temperatures and by different times of heat exclusion.