

Tomasz LISZKA\*  
Politechnika Śląska

## OSZACOWANIE WARTOŚCI WŁASNYCH WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH II RZĘDU O PARAMETRACH PRZEDZIAŁOWYCH

**Streszczenie.** W pracy rozpatrywane jest zagadnienie wartości własnych układów dynamicznych drugiego rzędu o współczynnikach przedziałowych  $(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0$ . Przedstawione w pracy twierdzenie pozwala na oszacowanie wartości własnych takich układów wykorzystując fakt równoważności własności zespolonych przedziałowych macierzy i własności skończonego podzbioru nie przedziałowych macierzy rzeczywistych. Praktyczne zastosowanie tego twierdzenia zostanie zilustrowane przykładami z zakresu teorii konstrukcji.

## EIGENVALUES ESTIMATION OF SECOND ORDER MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM WITH INTERVAL PARAMETERS

**Summary.** The paper deals with eigenvalues problem of second order multidimensional dynamic system with interval parameters  $(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0$ . Eigenvalues estimation of such systems becomes possible using equivalence between some properties of complex interval matrices and equivalent properties of some finite subset of explicitly described non-interval real matrices. Practical application is illustrated with the example from structural design.

### 1. Wstęp. Podstawowe wzory i oznaczenia

W pracy rozpatrywane jest zagadnienie wartości własnych równań różniczkowych drugiego rzędu opisujących ruch układów dynamicznych  $M\ddot{y} + D\dot{y} + Ky = 0$ , gdzie występujące w równaniu macierze to odpowiednio symetryczne przedziałowe macierze: dodatnio określona macierz bezwładności  $M \in [M]$ , nieujemnie określone macierze tłumienia  $D \in [D]$  i sztywności  $K \in [K]$ . Wyznaczenie wartości własnych dla takich układów sprowadza się do rozwiązania równania charakterystycznego postaci:

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0. \quad (1)$$

\* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. PŚl.

Z takim zadaniem spotykamy się w zastosowaniach inżynierskich związanych z analizą stabilności, wyznaczaniem częstości drgań własnych oraz częstości drgań swobodnych z tłumieniem, w których parametry analizowanych systemów technicznych są wyznaczone z pewną tolerancją. Znakomitym narzędziem pozwalającym na uwzględnienie w macierzach niepewności parametrów jest algebra interwałowa.

W pracy wykorzystano wcześniejsze rezultaty badań Rohna [1] i Skrzypczyka [2-3].

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:  $A = \{a_{ij}\}$  – macierze rzeczywiste,  $R$  – zbiór liczb rzeczywistych,  $R^n$  – zbiór wektorów rzeczywistych,  $R^{n \times n}$  – zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach  $n \times n$ ,  $C^n$  – zbiór wektorów zespolonych  $\lambda_{\max}(A)$  – największa wartość własna macierzy  $A$  (jeżeli  $A$  jest symetryczna),  $\lambda_{\min}(A)$  – najmniejsza wartość własna macierzy  $A$  (jeżeli  $A$  jest symetryczna). Zauważmy, że dla wszystkich wektorów  $x, y \in R^n$ ,  $\langle x, x \rangle = x^T x$  oznaczać będzie iloczyn skalarny wektorów, natomiast  $(\cdot)^T$  zwykłą transpozycję wektorów, a dla wektorów  $x, y \in C^1$ ,  $\langle x, x \rangle = x^* x$ , gdzie  $x^* = \bar{x}$ ,  $\bar{x}$  – to wektor sprzężony do wektora  $x$ . Zbiór przedziałów rzeczywistych oznaczać będziemy  $I(R)$ , podobnie  $I(R^n)$  – zbiór wektorów przedziałowych,  $I(R^{n \times n})$  – zbiór macierzy przedziałowych.

Każdą rzeczywistą macierz przedziałową  $[A] \in I(R^{n \times n})$  możemy zapisać w postaci:

$$[A] := [\bar{A} - \Delta_A, \bar{A} + \Delta_A] = \{A : \bar{A} - \Delta_A \leq A \leq \bar{A} + \Delta_A\} \quad \bar{A}, \Delta_A \in R^{n \times n} \quad (2)$$

Za Rohnem [1] wprowadzimy do rozważań zwykły zbiór indeksowy

$$E^n := \{x \in R^n : |x_i| = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (3)$$

tnz.  $E^n$  będzie zbiorem wszystkich  $n$ -wymiarowych wektorów o wartościach  $\pm 1$ , moc tego zbioru wynosi  $2^n$ . Dla każdego  $x \in R^n$  oznaczymy przez  $T_x \in E^{n \times n}$  macierz diagonalną o wymiarach  $n \times n$ , która na diagonalu ma wektor  $\text{sign}(x)$ , gdzie

$$\text{sign}(x) := \{\text{sign}(x_i)\}_{i=1,2,\dots,n}, \quad \text{sign}(x_i) := \begin{cases} 1 & \text{dla } x_i \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x_i \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Dla dowolnego wektora  $z \in E^n$  i macierzy  $[A] \in I(R^{n \times n})$  zdefiniujemy następujące macierze

$$A_z^- = \bar{A} - T_z \Delta_A T_z, \quad A_z^+ = \bar{A} + T_z \Delta_A T_z \quad (5)$$

W pracy będzie używana uogólniona funkcja Rayleigha postaci  $r_{A,B} : R^{n \times n} \times R^{n \times n} \rightarrow R^1$  zdefiniowana dla dowolnej macierzy rzeczywistej  $A \in R^{n \times n}$  i dodatnio określonej macierzy  $B \in R^{n \times n}$  jako

$$F(A, B) := \{r_{A,B}(z) : 0 \neq z \in R^n\} \quad r_{A,B}(z) := \frac{\langle z, Az \rangle}{\langle z, Bz \rangle} = \frac{z^T A z}{z^T B z} \quad (6)$$

Własności tej funkcji dla macierzy rzeczywistych i zespolonych są omówione w pracach [2-3]. Ponadto będziemy używać form kwadratowych, które będziemy oznaczać  $x^*Ax = A_x$ .

## 2. Oszacowanie wartości własnych

Celem tej pracy jest przedstawienie twierdzenia pozwalającego na oszacowanie ekstremalnych wartości własnych, które mogą być wyznaczone z analizy skończonych podzbiorów macierzy rzeczywistych z przedziałów  $[M]$ ,  $[D]$  i  $[K]$ .

TWIERDZENIE 1. Dla dowolnych symetrycznych macierzy  $[M],[D],[K] \in I(\mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $[M]$  jest dodatnio określona,  $[D]$  i  $[K]$  są nieujemnie określone, dla których wyznacznik trójkątnu kwadratowego równania charakterystycznego (1)  $\Delta \in [\Delta^- \quad \Delta^*]$ , zachodzi:

A. Jeżeli  $\Delta^+ \leq 0$ , to

1.  $\inf_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}),$
2.  $\sup_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}),$
3.  $\inf_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} |\operatorname{Im} \lambda| \geq \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) + (r_{K^+, M^+})},$
4.  $\sup_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} |\operatorname{Im} \lambda| \leq \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) + (r_{K^+, M^+})},$

B. Jeżeli  $\Delta^- \geq 0$ , to  $\operatorname{Im} \lambda = 0$  oraz

1.  $\inf_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}) - (\sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) - (r_{K^+, M^+})}),$
2.  $\sup_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}) + (\sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) - (r_{K^+, M^+})}),$

C. Jeżeli  $\Delta^- < 0$  i  $\Delta^+ > 0$

1.  $\inf_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}) - (\sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) - (r_{K^+, M^+})}),$
2.  $\sup_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{2}(r_{D^+, M^-}) + (\sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) - (r_{K^+, M^+})}),$
3.  $\sup_{A \in [A], B \in [B], C \in [C]} |\operatorname{Im} \lambda| \leq \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^+, M^-}) + (r_{K^+, M^+})}.$

## DOWÓD

Równanie charakterystyczne (1) przekształcimy do postaci:

$$\lambda^2 x^* M x + \lambda x^* D x + x^* K x = 0 \quad (7)$$

a następnie poszukujemy rozwiązania postaci  $\lambda = \text{Re} + i\text{Im}$  rozpatrując, podobnie jak w twierdzeniu 1, trzy przypadki w zależności od znaku  $\Delta = (D_x)^2 - 4M_x K_x$ :

1. Jeżeli  $\Delta^+ \leq 0$ , to:

$$\text{Re}\lambda = -\frac{D_x}{2M_x}, \quad \text{Im}\lambda = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{4(M_x)^2}} = \pm \sqrt{-\frac{1}{4} \left( \frac{D_x}{M_x} \right)^2 + \frac{K_x}{M_x}} \quad (8)$$

Wykorzystując własności uogólnionej funkcji Rayleigha dla pary macierzy, opisanych w pracy [3], możemy zapisać:

$$\text{Re}\lambda = -\frac{1}{2}r_{D,M}, \quad \text{Im}\lambda = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D,M})^2 + r_{K,M}} \quad (9)$$

korzystając dalej z oszacowań uogólnionej funkcji Rayleigha ostatecznie otrzymujemy:

$$-\frac{1}{2}r_{D^+,M^+} \leq \text{Re}\lambda \leq \frac{1}{2}r_{D^+,M^+} \quad (10)$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^+,M^+})^2 + r_{K^+,M^+}} \leq |\text{Im}\lambda| \leq \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^+,M^+})^2 + r_{K^+,M^+}} \quad (11)$$

Jeżeli podobnie postąpimy dla pozostałych przypadków  $\Delta$ , potwierdzimy poprawność wyników otrzymanych w tw.1.

2. Jeżeli  $\Delta^- \geq 0$ , to  $\text{Im}\lambda = 0$  oraz

$$\text{Re}\lambda = -\frac{D_x}{2M_x} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{4} \left( \frac{D_x}{M_x} \right)^2 - \frac{K_x}{M_x} \right)} \quad (12)$$

i podobnie jak we wzorach (9-11) wykorzystując własności funkcji Rayleigha otrzymujemy

$$\text{Re}\lambda = -\frac{1}{2}r_{D,M} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(r_{D,M})^2 - r_{K,M}} \quad (13)$$

co ostatecznie prowadzi do oszacowania

$$-\frac{1}{2}r_{D^+,M^+} - \sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+,M^+})^2 - r_{K^+,M^+}} \leq \text{Re}\lambda \leq -\frac{1}{2}r_{D^-,M^-} + \sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^-,M^-})^2 - r_{K^-,M^-}} \quad (14)$$

3. W przypadku gdy  $\Delta^- < 0$  i  $\Delta^+ > 0$ , korzystając z przedstawionych dowodów otrzymujemy

$$-\frac{1}{2}r_{D^+,M^+} - \sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^+,M^+})^2 - r_{K^+,M^+}} \leq \text{Re}\lambda \leq -\frac{1}{2}r_{D^-,M^-} + \sqrt{\frac{1}{4}(r_{D^-,M^-})^2 - r_{K^-,M^-}} \quad (15)$$

$$|\text{Im}\lambda| \leq \sqrt{-\frac{1}{4}(r_{D^-,M^-})^2 + r_{K^+,M^-}} \quad (16)$$

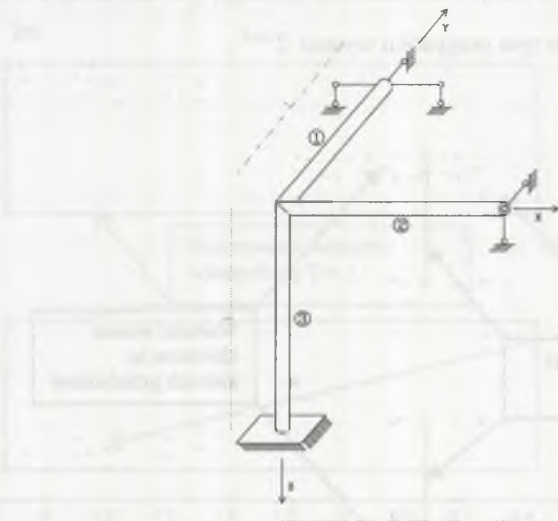
Znając oszacowania wartości własnych przedstawione w tw. 1 możemy je wykorzystać do wyznaczenia dla konstrukcji opisanej równaniem (1) częstości drgań własnych, częstości drgań swobodnych z tłumieniem, a także możemy przeprowadzić analizę stateczności konstrukcji.

Zastosowanie tego twierdzenia zostanie zilustrowane przykładami.

### 3. Przykłady

PRZYKŁAD 1. Dana jest jednowęzłowa rama przestrzenna, której schemat przedstawiono na rysunku 1. Dla tego układu przyjęto następujące dane geometryczne i materiałowe:

długości prętów  $l=5$  m, pole przekroju poprzecznego  $F=1,492e-3$  m<sup>2</sup>, ciężar prętów  $\rho=11,7142$  kg/mb, oraz przedziałowe sztywności giętne  $EI=[311450 \ 380670]$  Nm<sup>2</sup> i skrętne  $GI_s=[126710 \ 154870]$  Nm<sup>2</sup> prętów.



Rys. 1. Schemat statyczny

Fig. 1. Static structure

Przy obliczeniach częstości drgań własnych konstrukcji o parametrach interwałowych pominięto wpływ odkształceń podłużnych, a dla przyjętych danych otrzymano następujące macierze bezwładności i sztywności:

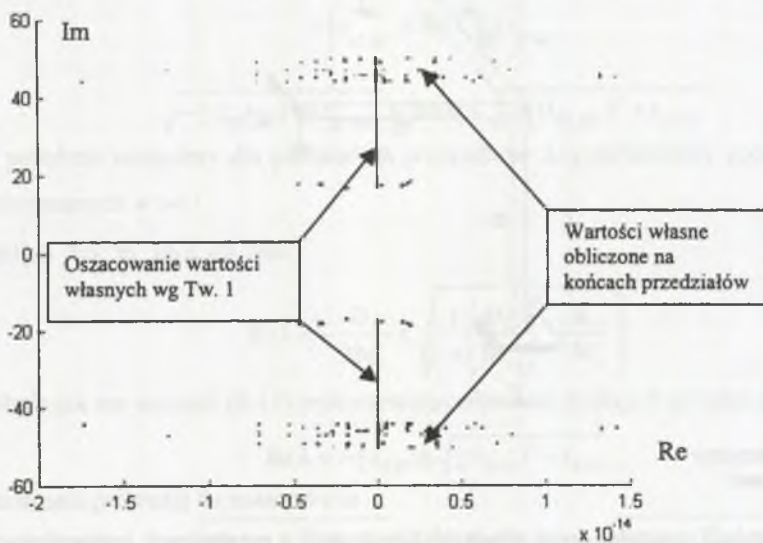
$$M = \begin{bmatrix} 58,571 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 244,311 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 244,1784 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 122,22 \end{bmatrix}$$

$$K = 10^5 * \begin{bmatrix} [0,2990 & 0,3654] & [-0,9136 & -0,7475] & 0 & 0 \\ [-0,9136 & -0,7475] & [4,8672 & 5,9488] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [4,3604 & 5,3293] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [2,3756 & 2,9035] \end{bmatrix}$$

Dla tak opisanego układu prętowego oszacowano wartości własne równania charakterystycznego (1), które zostały pokazane na rysunku 2, wraz z wartościami własnymi wyznaczonymi na końcach przedziałów równania o współczynnikach interwałowych  $M\ddot{y} + Ky = 0$  przekształconego do postaci

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}.$$

Daje ono dokładne rozwiązania skrajne dla macierzy spełniających założenia z twierdzenia 1, lecz złożoność obliczeniowa w tym przypadku wynosi  $2^{(2n)^2}$ .



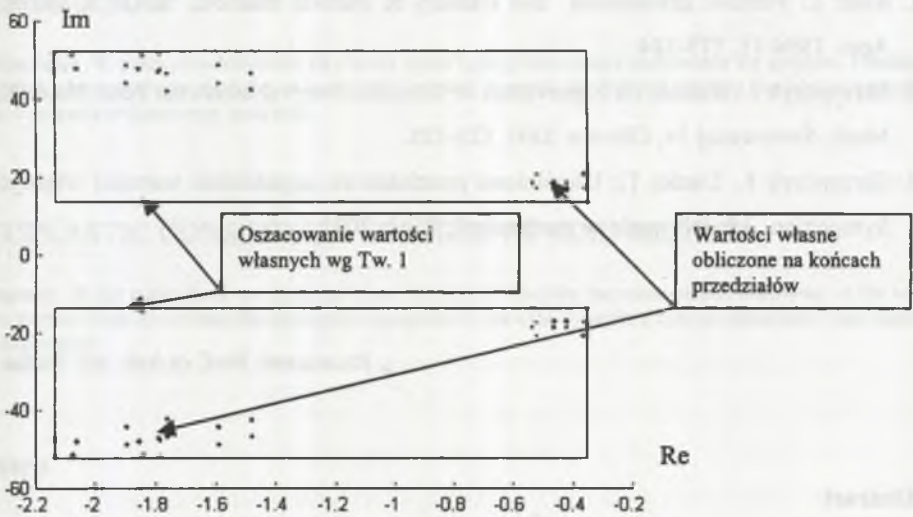
Rys. 2. Oszacowanie wartości własnych  
Fig. 2. Estimation of eigenvalues

Porównując obliczone wartości skrajne i oszacowania wartości własnych możemy przyjąć, że oszacowana wg twierdzenia 1 wartość własna  $\lambda = \pm 13,6863$  [rad/s] jest pierwszą częstotliwością drgań własnych konstrukcji o parametrach niepewnych, a przedział  $\Lambda = [\lambda_1] = [-52,0961 \quad -13,6863] \cup [13,6863 \quad 52,0961]$  [rad/s] zawiera wszystkie częstotliwości drgań własnych tej konstrukcji prętowej.

**PRZYKŁAD 2.** Dla konstrukcji jak w przykładzie 1 i parametrów jw. zostaną oszacowane częstotliwości drgań swobodnych układu z tłumieniem. Przyjęto macierz tłumienia  $D = \mu M + \kappa K$ , gdzie  $\mu = 0,4425$  [s<sup>-1</sup>] i  $\kappa = 0,00141$  [s], która dla danych jak w poprzednim zadaniu ma postać

$$D = \begin{bmatrix} [68,08 & 77,44] & [-128,82 & -105,40] & 0 & 0 \\ [-128,82 & -105,40] & [794,38 & 946,89] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [722,86 & 859,48] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [389,04 & 463,47] \end{bmatrix}$$

Po oszacowaniu wartości własnych i naniesieniu ich na wykres wraz z wartościami obliczonymi po końcach przedziałów otrzymujemy



Rys. 3. Oszacowanie wartości własnych

Fig. 3. Estimation of eigenvalues

Widzimy, że obszar ograniczony przez oszacowania wg tw.1 zawiera całe spektrum częstotliwości drgań swobodnych tłumionych konstrukcji o parametrach przedziałowych.

#### 4. Wnioski

Po analizie przykładów możemy stwierdzić, że przedstawione twierdzenie pozwala na oszacowanie przedziału, w którym są zawarte wszystkie wartości własne układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, w których parametry opisujące konstrukcję są określone z pewną tolerancją.

Znajomość tego przedziału pozwala na określenie w sposób przybliżony częstości drgań własnych konstrukcji, wpływu tłumienia na ruch konstrukcji, a także stabilności ruchu konstrukcji o parametrach przedziałowych.

#### LITERATURA

1. Rohn J.: Positive definiteness and stability of interval matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1994 15, 175-184.
2. Skrzypczyk J.: Bounds on Eigenvalues of Complex Interval Matrices, *Zesz. Nauk. Katedry Mech. Stosowanej* 14, Gliwice 2000, 123-128.
3. Skrzypczyk J., Liszka T.: Uogólnione przedziałowe zagadnienie wartości własnych, XL Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, Wisła 2001.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Jendo

#### Abstract

The paper is concerned on eigenvalues problem of second order multidimensional dynamic system with interval parameters  $(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0$ . Eigenvalues estimation of such systems becomes possible using equivalence between some properties of complex interval matrices and equivalent properties of some finite subset of explicitly described non-interval real matrices. Practical application is illustrated with the example from construction theory.