

Maciej MAJOR*
Politechnika Częstochowska

FALA PRZYSPIESZENIA WE WSTĘPNIE ODKSZTAŁCONYM MATERIALE MURNAGHANA

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważa się propagację fali przyspieszenia w nieliniowo sprężystym materiale Murnaghana. Na wstępie określono propagację powierzchni nieciągłości, podano warunek propagacji fali przyspieszenia. Założono wstępne odkształcenie na kierunku X^1 . Obliczono tensor akustyczny i określono prędkość U_i propagacji powierzchni dla $i=1,2,3$. Dalej opierając się na wektorach jednostkowych o kierunku amplitudy wyznaczono składowe promienia akustycznego i określono, że natężenie fali pozostaje stałe.

ACCELERATION WAVE IN THE MURNAGHANA'S INITIALLY STRAIN MATERIAL

Summary. The paper considers the propagation of acceleration waves in Murnaghana's nonlinear elastic materials. The definition of propagation of the slowness surfaces and the propagation condition of the acceleration wave is derived. There is assumed initially strain at X^1 direction that only one component of the strain tensor is different from zero. The acoustic tensor is calculated and velocity U_i of the propagation discontinuous surface for $i=1,2,3$ is introduced. Then with the aid of unitary vectors of amplitudes direction the components of acoustic ray are determined, furthermore wave strain is constant. In this case the amplitude strength of the acceleration wave is constant.

1. Powierzchnia nieciągłości

W ciele sprężystym ruch możemy zapisać w postaci funkcji

$$x^i = x^i(X^\alpha, t); \quad i, \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

gdzie X^α są kartezjańskimi współrzędnymi w konfiguracji odniesienia B_R , natomiast x^i są kartezjańskimi współrzędnymi określonymi w konfiguracji chwilowej B . Układy $\{x^i\}$ - tzw. przestrzenny, oraz $\{X^\alpha\}$ -tzw. materialny, parametryzują tę samą przestrzeń.

Podstawową wielkością kinematyczną, zgodnie z [5] jest gradient deformacji $x^i{}_{,\alpha}$

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Sławomir Kosiński, prof. PCz.

$$x'^{\alpha}(X^{\alpha}, t) = \frac{\partial x'(X^{\alpha}, t)}{\partial X^{\alpha}} \quad (1.2)$$

Równowaga dynamiczna sprężystego ciała może być wyrażona przez następujące równanie różniczkowe [1]

$$T_R^{i\alpha}{}_{,\alpha} + \rho_R b^i = \rho_R x'^i{}_{,tt} \quad (1.3)$$

gdzie przecinek oznacza różniczkowanie cząstkowe

$$(\cdot)_{,\alpha} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X^{\alpha}}; \quad (\cdot)_{,t} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \quad (1.4)$$

$T_R^{i\alpha}$ jest tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, b^i oznacza pole sił masowych, ρ_R gęstość masy w konfiguracji odniesienia B_R , $x'^i{}_{,tt}$ określa przyspieszenie.

Tensor naprężenia rzeczywistego T^{ik} (Cauchy'ego) można wyrazić za pomocą tensora nominalnego $T_R^{i\alpha}$ (Pioli-Kirchhoffa).

Związek naprężenie – odkształcenie [5] dla materiału sprężystego przybiera postać

$$T_R^{i\alpha} = \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x'^{\alpha}_i}; \quad (1.5)$$

$$T^{ik} = J^{-1} \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x'^{\alpha}_i} x^k{}_{,\alpha} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x'^{\alpha}_i} x^k{}_{,\alpha}$$

Dla jednorodnego izotropowego materiału sprężystego funkcję σ opisującą energię sprężystą odniesioną do jednostki masy w B_R można przedstawić jako funkcję trzech niezmienników

lewego tensora deformacji Cauchy-Greena $B^{ij} = x^i{}_{,\alpha} x^{j\alpha}$ [3]

$$\sigma = \sigma(I_1, I_2, I_3) \quad (1.6)$$

Dla niezbyt dużych odkształceń można przyjąć, że potencjał σ wynosi [3]

$$\rho \sigma = \frac{l+2m}{24} (I_1 - 3)^3 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{8} (I_1 - 3)^2 + \frac{8\mu+n}{8} (I_1 - 3) + \frac{m}{4} (I_1 - 3)(I_2 - 3) - \frac{4\mu+n}{8} (I_2 - 3) + \frac{n}{8} (I_1 - 1) \quad (1.7)$$

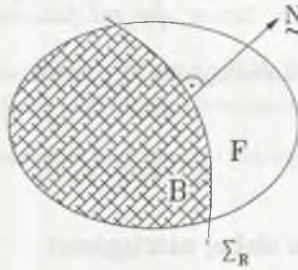
gdzie λ, μ stałe Lamego; l, m, n stałe sprężystości drugiego rzędu.

Ruchoma powierzchnia Σ_R w kontinuum materialnym zgodnie z [5] określona jest przez jedno z równań

$$X^{\alpha} = X^{\alpha}(M^K, t); \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad K = 1, 2 \quad (1.8)$$

$$t = \psi(X^{\alpha})$$

gdzie M^k parametryzuje powierzchnię.



Rys. 1.1. Ruchoma powierzchnia nieciągłości w kontinuum

Fig. 1.1. The moving slowness surface at the continuum

Kierunek propagacji określimy przez N_α , wektor normalny do Σ_R . Można zapisać związki [5]

$$N_\alpha = \frac{\psi_{,\alpha}}{\sqrt{\psi_{,\rho}\psi_{,\rho}}}; \quad \psi_{,\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial X^\alpha} \quad (1.9)$$

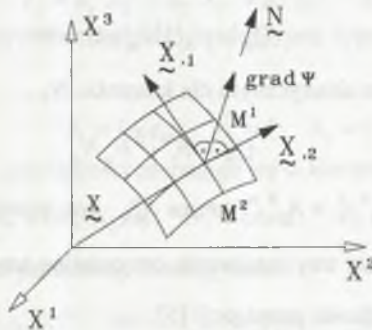
$$N_\alpha X^\alpha{}_{,k} = 0; \quad X^\alpha{}_{,k} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial M^k} \quad (1.10)$$

gdzie zgodnie z [1], $\psi_{,\alpha}$ jest wektorem powolności fali.

Zachodzi również tożsamość [5]

$$\psi_{,\alpha} X^\alpha{}_{,t} = 1 \quad (1.11)$$

gdzie $X^\beta{}_{,t}$ jest prędkością punktu powierzchni Σ_R , którego parametry M^k są stałe.



Rys. 1.2. Siatka współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni nieciągłości

Fig. 1.2. The grid of curvilinear coordinates at the slowness surface

Rzut prędkości $X^\beta{}_{,t}$ na normalną N_α jest niezależny od sposobu parametryzacji. Oznaczamy go przez U i nazywamy prędkością propagacji powierzchni Σ_R . Mamy więc [5]

$$U = X^{\alpha, \prime} N_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\Psi_{, \rho} \Psi^{\rho}}}; \quad N_{\alpha} = U \Psi_{, \alpha} \quad (1.12)$$

Skok funkcji pola na powierzchni nieciągłości Σ_R oznaczamy podwójnym nawiasem kwadratowym

$$[[\cdot]] = (\cdot)^F - (\cdot)^B \quad (1.13)$$

2. Fala przyspieszenia - fala słabej nieciągłości

Rozpatrując ruch $x' = x'(X^{\alpha}, t)$ zakładamy, że funkcje $x'(X^{\alpha}, t)$; $\frac{\partial x'(X^{\alpha}, t)}{\partial X^{\alpha}}$; $\frac{\partial x'(X^{\alpha}, t)}{\partial t}$ są ciągłe na powierzchni Σ_R , nieciągłe są natomiast drugie i wyższe pochodne.

Skoki drugich pochodnych funkcji $x'(X^{\alpha}, t)$ zapisujemy zgodnie z [5] w postaci

$$[[x', \alpha\beta]] = A^i N_{\alpha} N_{\beta} \quad (2.1)$$

$$[[x', \alpha]] = -UA^i N_{\alpha}$$

$$[[x', \prime]] = U^2 A^i$$

gdzie A^i jest amplitudą fali przyspieszenia.

Na podstawie analizy równania ruchu w przyjętym kartezjańskim układzie $\{X^{\alpha}\}$, przy założeniu, że gęstość oraz pole sił masowych są ciągłe, otrzymujemy warunek propagacji fali przyspieszenia [5] w konfiguracji odniesienia B_R

$$(Q_{ik} - \rho_R U^2 \delta_{ik}) A^k = 0 \quad (2.2)$$

gdzie tensor Q_{ik} jest tensorem akustycznym dla kierunku N_{α} .

$$Q_{ik} = A_i^{\alpha} A_k^{\beta} N_{\alpha} N_{\beta} \quad (2.3)$$

Ze względu na symetrię $A_i^{\alpha} A_k^{\beta} = A_k^{\beta} A_i^{\alpha}$ tensor Q_{ik} jest również tensorem symetrycznym $Q_{ik} = Q_{ki}$, istnieją więc zawsze trzy wzajemnie ortogonalne amplitudy i trzy odpowiadające im rzeczywiste kwadraty prędkości propagacji [5].

Z (2.3) wynika że amplituda A^k jest wektorem własnym, a iloczyn $\rho_R U^2$ wartością własną tensora akustycznego Q_{ik} . Jeżeli wartości własne są dodatnie, to istnieje rzeczywiste U i powierzchnia nieciągłości może się propagować. Warunek propagacji powierzchni, zgodnie z (1.10) i (1.13), możemy zapisać w postaci [6]

$$(A_i^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \rho_R\delta_{ik})A^k = 0 \quad (2.4)$$

Warunek istnienia niezerowej amplitudy ma więc postać

$$\det(A_i^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \rho_R\delta_{ik}) = 0 \quad (2.5)$$

W wyniku rozwiązania otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu na funkcję $\psi(X^\alpha)$, które określa położenie powierzchni nieciągłości.

3. Przykład obliczeniowy

Rozważamy jednorodną statyczną deformację ciała ściśliwego. W ustalonych, pokrywających się kartezjańskich układach współrzędnych $\{x^i\}, \{X^\alpha\}$ deformację tę można opisać wzorami

$$x_1 = \lambda_1 X^1; \quad x_2 = \lambda_2 X^2; \quad x_3 = \lambda_3 X^3 \quad (3.1)$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \text{const.}$

Gradient deformacji przy takim opisie jest niezależny od współrzędnych X^α i czasu t .

Lewy tensor deformacji oraz gradient wyrażają się następująco

$$[B^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}; \quad [x^i{}_{,\alpha}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Niezmienniki tensora deformacji

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2; \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \quad (3.3)$$

Zakładamy, że omawiany ośrodek sprężysty poddany jest tylko rozciąganiu w jednym kierunku.

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_{11}; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 1 \quad (3.4)$$

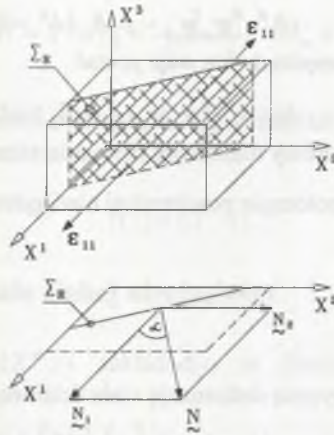
Zakładamy, że powierzchnia nieciągłości propaguje się w kierunku prostopadłym do osi X^3 .

$$N = [N_1, N_2, 0]; \quad N_1 = \cos\alpha; \quad N_2 = \sin\alpha \quad (3.5)$$

Funkcje materiałowe $A_i^{\alpha\beta}$ wyznaczamy według wzoru:

$$A_i^{\alpha\beta} = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i{}_{,\alpha}\partial x^k{}_{,\beta}} \cdot \rho_R; \quad A_i^{\alpha\beta} = \sigma_i^{\epsilon k\beta} \cdot \rho_R \quad (3.6)$$

Do obliczeń przyjęty został materiał sprężysty Murnaghana [3].



Rys. 3.1. Rozciąganie na kierunku X^1 dla powierzchni Σ_R pod dowolnym kątem

Fig. 3.1. The tension at the X^1 direction for the Σ_R surface in arbitrary angle

Dla wybranego kierunku propagacji powierzchni nieciągłości (3.5) tensor akustyczny ma postać

$$Q_{ik} = A_i^1 k^1 N_1 N_1 + A_i^1 k^2 N_1 N_2 + A_i^2 k^1 N_2 N_1 + A_i^2 k^2 N_2 N_2; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

Współrzędne Q_{ik} uzyskano uwzględniając jedynie liniowe człony odkształcenia ϵ_{11} .

Zestawienie współrzędnych Q_{ik} , dla $i, k = 1, 2$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \mu + (\lambda + \mu) \cos^2 \alpha + (2\mu + m + \lambda + (3m + 2\lambda + 4\mu + 2l) \cos^2 \alpha) \epsilon_{11} \\ Q_{12} &= (\lambda + \mu + (2l + m + \lambda + \mu) \epsilon_{11}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ Q_{13} &= 0 \\ Q_{21} &= (\lambda + \mu + (2l + m + \lambda + \mu) \epsilon_{11}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ Q_{22} &= \mu + (\lambda + \mu) \sin^2 \alpha + (\lambda + 2l \sin^2 \alpha + (m + 2\mu) \cos^2 \alpha) \epsilon_{11} \\ Q_{23} &= 0 \\ Q_{31} &= 0 \\ Q_{32} &= 0 \\ Q_{33} &= \mu + \left(m + \lambda - \frac{n}{2} \sin^2 \alpha + 2\mu \cos^2 \alpha \right) \epsilon_{11} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Współrzędne tensora akustycznego można zestawić w następującej macierzy:

$$[Q_{ik}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Prędkości propagacji powierzchni nieciągłości są wartościami własnymi tensora akustycznego. Dla tensora (3.9) otrzymujemy trzy prędkości:

$$U_1 = \pm \sqrt{\frac{Q_{11} + Q_{22} + \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}}{2\rho_R}}; \quad (3.10)$$

$$U_2 = \pm \sqrt{\frac{Q_{11} + Q_{22} - \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}}{2\rho_R}};$$

$$U_3 = \frac{Q_{33}}{\rho_R}$$

Po podstawieniu współrzędnych tensora akustycznego otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_R} [u_1] \right\}}; \quad (3.11)_1$$

$$u_1 = 2(\lambda + 3\mu) + 2(2l + m + 2\lambda + 2\mu + 2(2m + \lambda + 3\mu)\cos^2 \alpha) \cdot \epsilon_{11} + \\ + 2 \sqrt{\left[\frac{[2(\lambda + \mu + (2l + m + \lambda + \mu)\epsilon_{11})]^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha +}{+ [(\lambda + \mu)\cos 2\alpha + (m + 2\mu + 2(m + \mu + \lambda)\cos^2 \alpha + 2l \cos 2\alpha)\epsilon_{11}]^2} \right]}$$

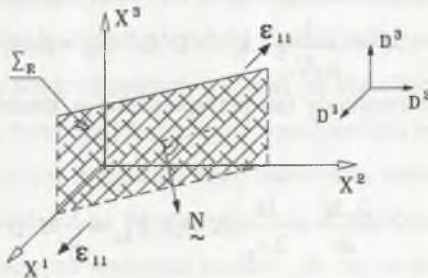
$$U_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_R} [u_2] \right\}}; \quad (3.11)_2$$

$$u_2 = 2(\lambda + 3\mu) + 2(2l + m + 2\lambda + 2\mu + 2(2m + \lambda + 3\mu)\cos^2 \alpha) \cdot \epsilon_{11} + \\ - 2 \sqrt{\left[\frac{[2(\lambda + \mu + (2l + m + \lambda + \mu)\epsilon_{11})]^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha +}{+ [(\lambda + \mu)\cos 2\alpha + (m + 2\mu + 2(m + \mu + \lambda)\cos^2 \alpha + 2l \cos 2\alpha)\epsilon_{11}]^2} \right]}$$

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_R} [u_3] \right\}}; \quad (3.11)_3$$

$$u_3 = 2\mu + 2 \left(m + \lambda - \frac{n}{2} \sin^2 \alpha \cdot + 2\mu \cos^2 \alpha \right) \epsilon_{11}$$

Współrzędną wektora jednostkowego D dla prędkości U_3 (tj. wektora o kierunku amplitudy fali) obliczamy z układu równań:



Rys. 3.2. Rozkład składowych wektora D'

Fig. 3.2. The vector D' components distribution

$$\begin{bmatrix} (Q_{11} - \rho_R U_3^2) & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & (Q_{22} - \rho_R U_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & (Q_{33} - \rho_R U_3^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.12)$$

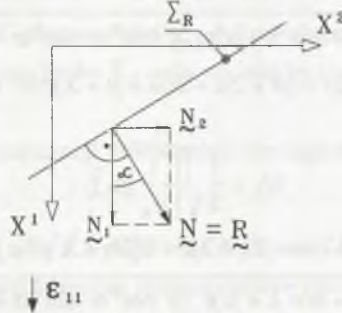
$$(D^1)^2 + (D^2)^2 + (D^3)^2 = 1$$

Otrzymujemy rozwiązanie

$$D^1 = 0; \quad D^2 = 0; \quad D^3 = \pm 1 \quad (3.13)$$

Na podstawie pracy [2] wyznaczamy składowe promienia akustycznego dla prędkości U_3 według wzoru:

$$R^\alpha = \frac{1}{\rho_R U_3^2} A_i^{\alpha k \beta} \cdot D^i D^k \cdot N_\beta \quad (3.14)$$



Rys. 3.3. Rozkład składowych R^α dla powierzchni Σ_R

Fig. 3.3. The R^α components distribution for the Σ_R surface

Dla $D^1 = 0$; $D^2 = 0$; $D^3 \neq 0$, oraz N_1 i N_2 mamy cztery współrzędne $A_i^{\alpha k \beta}$, z czego wartości $A_3^{13^2}$ i $A_3^{23^1}$ są równe zero. Z racji tego otrzymujemy dwie składowe promienia akustycznego R_1 i R_2

$$R^1 = \frac{1}{\rho_R U_3^2} \cdot A_3^{13^1} \cdot D^3 D^3 \cdot N_1 \approx \cos \alpha \quad (3.15)$$

$$R^2 = \frac{1}{\rho_R U_3^2} \cdot A_3^{23^2} \cdot D^3 D^3 \cdot N_2 = \sin \alpha \quad (3.16)$$

Na podstawie [2] równanie amplitudy fali przyspieszenia w kierunku R wyznaczmy opierając się na wzorze:

$$\frac{\partial_R M}{\partial t} + \frac{M}{2\rho_R} (R^\alpha \rho_R U) \Big|_\alpha = \frac{1}{2} M^2 Q \quad (3.17)$$

gdzie:

$\frac{\partial_R M}{\partial t}$ - pochodna przemieszczeniowa w kierunku linii pola R ,

R^α - znormalizowany jednostkowy wektor styczny do promienia akustycznego,

M - amplituda fali przyspieszenia,

dla płaskiego frontu fali $(R^\alpha \rho_R U) \parallel_\alpha = 0$, zatem

$$\frac{\partial_R M}{\partial t} = \frac{1}{2} M^2 Q \quad (3.18)$$

Wzdłuż dowolnego promienia powyższe równanie sprowadza się do rozwiązania

$$M(t) = \left(\frac{1}{M_o} - \frac{1}{2} Q t \right)^{-1} \quad (3.19)$$

Zgodnie z [2] wartość Q dla materiału hipersprężystego określimy według wzoru

$$Q = \frac{1}{\rho_R U_3^2} A_i^{\alpha k \beta m \gamma} \cdot D^i D^k D^m \cdot N_\alpha N_\beta N_\gamma \quad (3.20)$$

Dla materiału Murnaghana, oraz $i, k, m = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ mamy osiem niezerowych składowych tensora $A_i^{\alpha k \beta m \gamma}$

Wyrażenie dla trzeciej pochodnej $A_i^{\alpha k \beta m \gamma}$ zajmuje sporo miejsca oraz ma skomplikowaną budowę. Wartość Q jest dla wszystkich ośmiu współrzędnych $A_i^{\alpha k \beta m \gamma}$ równa zero. Wynika z tego, że natężenie fali pozostaje stałe $M = M_o$

$$\frac{\partial_R M}{\partial t} = 0; \quad M(X^1, X^2, t) = M_o(X^1, X^2 - R^\alpha U_3 t), \quad \text{dla } \alpha = 1, 2 \quad (3.21)$$

4. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonej analizy numerycznej wynika, że prędkość fali przyspieszenia propagującej się w materiale Murnaghana zależy od wstępnego odkształcenia ośrodka. Ten sam wniosek dotyczy wektora amplitudy dla fali podłużnej i jednej fali poprzecznej. Dla fali poprzecznej rozpatrywanej w pracy wektor amplitudy jest taki, jak dla ośrodka nieodkształconego.

Porównując otrzymane wyniki z identycznymi wynikami dla materiału nieodkształconego można stwierdzić, że różnice w przypadku stali, aluminium, miedzi są małe. Istnieją jednak techniki pomiarowe pozwalające na rejestrację różnic w prędkościach. Jest to podstawą do określenia stałych materiałowych wyższych rzędów, jak np. w pracy Takahashi S. i Mutegi R. „Analysis by the Eulerian viewpoint of ultrasonic wave velocity in the uniformly deformed

isotropic solid”, gdzie dla prostych modelowych wstępnych stanów odkształcenia uzyskano nowe poprawione wyniki w stosunku do wyników uzyskanych przez Fukuoka H. i Toda H. w pracy „Preliminary experiment on acousto-elasticity for stress analysis” z 1977 roku.

LITERATURA

1. Borejko P.: Reflection and refraction of an acceleration wave at boundary between two nonlinear elastic materials, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 31.3, Warszawa 1979, (373-384).
2. Braun M.: Beschleunigungswellen in anisotropen hyperelastischen Stoffen, *Acta Mechanica* 19, 1974, (237-249).
3. Kosiński S.: Odbicie i ewolucja fali uderzeniowej w wybranych materiałach hipersprężystych, Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa 1995.
4. *Mechanika techniczna t. IV, cz. 2*, Z. Wesołowski: Nieliniowa teoria sprężystości, Praca zbiorowa pod redakcją M. Sokołowskiego, PWN, Warszawa 1978.
5. Wesołowski Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974.
6. Wesołowski Z.: Linear Independence of Amplitudes of Reflected Acceleration Waves, *Bulletin de L'academie Polonaise des Sciences*, No. 12 - 1975, (547-552).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Grabacki

Abstract

The problem discussed in this paper runs on propagation of disturbance in continuum. The paper considers the propagation of acceleration waves in Murnaghana's nonlinear elastic materials. The definition of propagation of the slowness surfaces and the propagation condition of the acceleration wave is derived. There is assumed initially strain at X^1 direction. The acoustic tensor is calculated and propagation surface velocity U_i for $i=1,2,3$ is introduced. Then with the aid of unitary vectors of amplitudes direction the components of acoustic ray is appointed, furthermore wave strain is constant. At the end of the paper numerical analysis distribution of ray R^α value for $\alpha=1,2$ and velocity U_i for $i=1,2,3$ is investigated.