ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: BUDOWNICTWO z. 93 Nr kol. 1514

Andrzej MARYNOWICZ*
Politechnika Opolska

NAPRĘŻENIA DYFUZYJNE W OŚRODKU WIELOSKŁADNIKOWYM

Streszczenie. Analizowane będą naprężenia dyfuzyjne w ośrodku wieloskładnikowym, w którym dokonuje się identyfikacji poszczególnych składników o różnych właściwościach fizykochemicznych. Składnikami tymi mogą być np. szkielet, woda związana chemicznie lub fizycznie, dyfundująca ciecz lub para, media agresywne itp.

DIFFUSION STRESS IN THE MULTI-CONSTITUENT BODIES

Summary. There is presented a description of diffusion stress caused by flowing medium. This media usually have various structures and appear in various phases. As the migrating constituent we can assume such substances as moisture, various vapours, including aggressive one, etc.

1. Wprowadzenie

Typowe materiały budowlane, takie jak beton, ceramika czy też zaprawy należą do kategorii materiałów wieloskładnikowych o strukturze niejednorodnej, zaś w ich wnętrzu sąsiadują ze sobą i wzajemnie na siebie oddziałują fazy stałe, ciekłe i gazowe. Jeśli wszystkie rodzaje tych niejednorodności mają być wzięte pod uwagę przy opisie procesów fizycznych zachodzących w takim ośrodku, to może okazać się, że opis taki jest zagadnieniem trudnym. Można jednak analizować pewne przypadki szczególne zjawisk zakładając, że mają one dominujące znaczenie. Poniżej przedstawiony zostanie taki właśnie przypadek szczególny związany ze zmianą naprężeń w ośrodku powstałą na skutek przepływu dyfuzyjnego. W przedstawionym modelu pominięto wpływ efektów cieplnych towarzyszących procesowi.

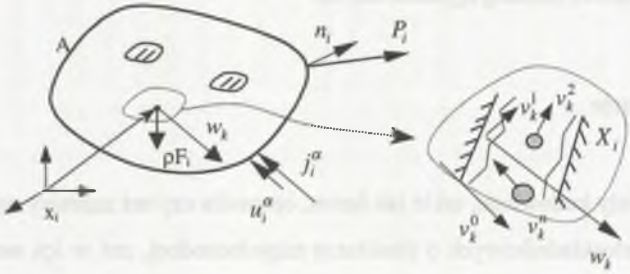
---

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik.

2. Model ośrodka wieloskładnikowego

Ośrodek wieloskładnikowy modelować można na wiele sposobów [3]. W niniejszej pracy przyjęto do dalszych rozważań model fenomenologiczny, otrzymany na bazie formalizmu termodynamiki procesów nierównowagowych. Materiał budowlany będziemy tu traktować jako jednorodną mieszaninę wszystkich zawartych w nim składników, czyli fazy stałej (szkieletu), ciekłej oraz gazowej. Korzystając z podejścia termodynamicznego i teorii mieszanin, rozważano przepływy masy, pędu i energii w poszczególnych punktach ośrodka. Przyjęto, że każda cząstka (w sensie fenomenologicznym) X_i ośrodka składa się z n oddziałujących ze sobą elementów o różnych gęstościach ρ^α ($\alpha = 0,1,...n$), prędkościach v_k^α, energiach wewnętrznych U^α, entropii S^α. Specyfika omawianych przepływów wymaga wyróżnienia wśród składników szkieletu, względem którego następują przepływy, co prowadzi do opisu termodynamicznego z wyróżnionym składnikiem [2].

Przyjęty model ośrodka w układzie współrzędnych kartezjańskich x_i przedstawia poniższy rysunek.

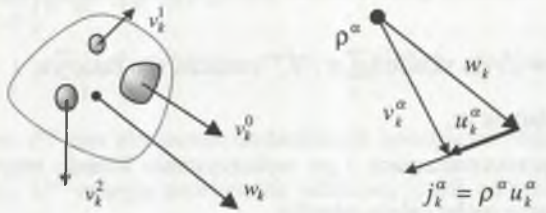


Rys.1. Ośrodek wieloskładnikowy
Fig.1. Multi-constituent body

Na rysunku 1 wielkości v_k^α, $\alpha = 0,1,2,...,n$ oznaczają prędkości poszczególnych składników elementu X_i, w_k jest prędkością barycentryczną (środka masy), wyrażoną zależnością

$$w_k = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha \rho^\alpha v_k^\alpha, \tag{2.1}$$

w której ρ^α i ρ oznaczają odpowiednio gęstość składnika α i całkowitą gęstość ośrodka. W powyższym modelu w_k jest prędkością wypadkową wszystkich składników ośrodka. Jeżeli przez u_i^α oznaczymy prędkość dyfuzyjną, a przez j_i^α strumień masy, to ruch w każdym punkcie w ośrodku można schematycznie opisać tak, jak to pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Opis ruchu ośrodka
Fig. 2. Description of body movent

3. Bilanse parcjalne ośrodka wieloskładnikowego

W przedstawionym układzie winny być spełnione równania bilansów parcjalnych ośrodka, a następnie, na ich podstawie, będzie można przejść do ich postaci globalnych.

3.1. Bilans masy

Z zasady zachowana masy wynika, że masa wydzielonej objętości ciała V nie ulega zmianie, czyli

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \left(\rho^\alpha v_k^\alpha\right)_{,k} = \rho R^\alpha . \tag{3.1}$$

We wzorze tym ρR^α oznacza człony źródłowe, zaś wskaźnik po przecinku k wskazuje na różniczkowanie względem współrzędnej X_k. Po zsumowaniu lewych i prawych stron równania (3.1) po wszystkich składnikach α ośrodka i po uwzględnieniu związku (2.1) otrzymamy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho w_k\right)_{,k} = 0 . \tag{3.2}$$

3.2. Bilans pędu

W ośrodku wieloskładnikowym dla każdego składnika zachodzi klasyczny bilans pędu, uzupełniony o przekaz pędu od pozostałych składników [2]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^\alpha w_i^\alpha dV = \int_V \left[\rho^\alpha F_i^\alpha + \Phi_i^\alpha\right] dV + \int_A P_i^\alpha dA , \tag{3.3}$$

w którym $\Phi_i^\alpha = \sum_\beta \varphi_i^{\alpha\beta}$ oznacza gestość źródeł pędu w składniku α, czyli przekaz pędu od pozostałych składników β do składnika α, F_i^α oznacza siłę masową, a P_i^α siłę powierzchniową działającą na składnik α.

Po odpowiednich przekształceniach i po wykorzystaniu bilansu masy całej mieszaniny (3.2) otrzymamy równanie ruchu całego ośrodka

$$\rho \frac{dw_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ij,j} - \sum_\alpha \left(\rho^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha\right)_{,j} . \tag{3.4}$$

Ostatni człon w (3.4) określany jest jako tzw. tensor ciśnień dyfuzyjnych i do dalszych rozważań, ze względu na mały wpływ u_i (a tym samym jego iloczynu) na przebieg procesu, można przyjąć, że jest on równy zero, por. [1].

3.3. Bilans energii i nierówność wzrostu entropii

W przypadku gdy w bilansach uwzględnimy jedynie energią mechaniczną ośrodka, to zasadę zachowania energii można otrzymać np. z równań ruchu Eulera. Realizujemy to mnożąc te równania przez prędkość w_i i wykonując całkowanie po objętości w chwili t.

Po przekształceniach otrzymamy

$$\int_A P_i w_i dA + \int_V \rho F_i w_i dV = \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{w_i w_i}{2} dV , \tag{3.5}$$

gdzie d_{ij} oznacza tensor prędkości odkształceń.

Pierwsze dwie całki lewej strony równania (3.5) określają moc sił zewnętrznych, trzecia, występująca po prawej stronie tego równania, określa moc mechaniczną, zaś ostatnia zmianę energii kinetycznej. Moc mechaniczna definiowana jest jako pochodna po czasie energii wewnętrznej.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho U = \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV . \tag{3.6}$$

W analizowanym przypadku, oprócz energii mechanicznej, należy uwzględnić również energię chemiczną procesu dyfuzji. Po uwzględnieniu pierwszej zasady termodynamiki otrzymamy bilans energii w ośrodku wieloskładnikowym [1]

$$\sum_{\alpha}\frac{d}{dt}\int_{V}\rho^{\alpha}\left(U^{\alpha}+K^{\alpha}\right)dV = \\ =\sum_{\alpha}\int_{V}\left(\rho_{r}^{\alpha}+\rho^{\alpha}F_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}+E^{\alpha}\right)dV+\sum_{\alpha}\int_{A}\left(P_{i}^{\alpha}v_{i}^{\alpha}-q_{i}^{\alpha}n_{i}^{\alpha}\right)dA \tag{3.7}$$

W wyrażeniu tym E^{α} jest elementem dodatkowym opisującym redystrybucję energii między składnikami [1], U^{α} energią wewnętrzną właściwą (czyli odniesioną do składnika α), K^{α} energią kinetyczną właściwą, natomiast element ρ_{r}^{α} jest związany z produkcją energii wewnętrznej przez źródła ciepła. Wprowadzając po lewej stronie równania (3.7) pochodną względem czasu pod całkę, wykorzystując następnie wzór Greena i sumując po wszystkich składnikach otrzymujemy

$$\int_{V}\rho\frac{d}{dt}(U+K)dV=\int_{V}(\rho_{r}+\rho F_{i}w_{i})dV+ \\ +\int_{V}\left[\left(\sigma_{ij}w_{j}\right)_{,i}-q_{i,i}+\sum_{\alpha}\left[\underbrace{\left(\frac{p_{0}^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}-\left(U^{\alpha}+K^{\alpha}\right)\right)j_{i}^{\alpha}}_{M}\right]_{,i}\right]dV \tag{3.8}$$

w którym p_{0}^{α} określa ciśnienie hydrostatyczne.

Występujący w powyższym równaniu człon oznaczony symbolem M można zinterpretować na podstawie lokalnego sformułowania II zasady termodynamiki, zgodnie z którą dla zjawisk nieodwracalnych produkcja entropii wewnętrznej jest zawsze dodatnia:

$$dS_{W}\geq 0. \tag{3.9}$$

Na tej podstawie wprowadza się pojęcie tzw. funkcji dyssypatywnej, definiowanej jako iloczyn wydajności źródła entropii i temperatury bezwzględnej, czyli

$$\Psi^{\alpha}=T\frac{d\left(\rho^{\alpha}S_{W}\right)}{dt}\geq 0, \tag{3.10}$$

w której t oznacza czas, a T - temperaturę.

Sformułowanie powyższe opisuje nam pojedynczy czynnik wywołujący produkcję entropii. W ośrodku wieloskładnikowym występuje wiele takich bodźców, stąd też można je zapisać jako ich sumę [4]

$$\Psi=\sum_{\alpha}J^{\alpha}X^{\alpha}\geq 0. \tag{3.11}$$

Wielkości X^{α} określają tu uogólnione bodźce termodynamiczne, natomiast J^{α} przedstawia uogólnione przepływy będące skutkiem działania tych bodźców. Zgodnie z tymi założeniami M należy rozumieć jako potencjał chemiczny składnika α wywołujący strumień masy j_k^{α}. Po przekształceniach otrzymamy ostatecznie

$$\rho\frac{dU}{dt}=\rho_r-q_{i,i}+\sigma_{ij}d_{ij}+\sum_{\alpha}\rho^{\alpha}\frac{dC^{\alpha}}{dt}M^{\alpha}-\sum_{\alpha}\rho^{\alpha}R^{\alpha}M^{\alpha}-\sum_{\alpha}j_k^{\alpha}M_k^{\alpha}. \tag{3.12}$$

Ostatnie trzy człony, czyli część związana z przepływem masy, odpowiadają za zmianę energii wewnętrznej spowodowaną zmianą stężeń składników oraz źródeł ciepła, a także określają jej wpływ na zmianę strumienia masy j_k^{α}.

Nierówność wzrostu entropii otrzymujemy w rozważanym przypadku wykorzystując nierówność Clausiusa-Duhema która zakłada, że szybkość zmian całkowitej entropii S jest mniejsza niż suma strumienia entropii przez powierzchnię ośrodka i objętościowa produkcja entropii w ośrodku. Nierówność ta ma postać

$$\frac{dS}{dt}\geq\int_V\frac{\rho_r}{T}dV-\int_A\frac{q_in_i}{T}dA, \tag{3.13}$$

gdzie: $\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V\rho s\,dV$, ρs - gęstość entropii.

Dopływ entropii do ośrodka z jego otoczenia (druga całka) następuje w efekcie: a) działania konwekcyjnego przepływu entropii, przenoszonego wraz z makroskopowym ruchem całej substancji oraz b) wypadkowego przepływu entropii wywołanego dyfuzją poszczególnych składników. Dopływ ten może mieć wartość dodatnią, ujemną, lub w szczególnym przypadku być równy zero.

W przypadku ciała wieloskładnikowego nierówność (3.13) ma postać

$$\int_V\left[\rho\frac{dS}{dt}+\sum_{\alpha}\left(\rho^{\alpha}U_i^{\alpha}S^{\alpha}\right)_{,i}\right]dV\geq\int_V\frac{\rho_r}{T}dV-\int_A\frac{q_in_i}{T}dA. \tag{3.14}$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$\rho\frac{dS}{dt}T+T\sum_{\alpha}\left(\rho^{\alpha}U_i^{\alpha}S^{\alpha}\right)_{,i}-\left(\rho_r-q_{i,i}\right)+\frac{q_iT_{,i}}{T}\geq 0. \tag{3.15}$$

4. Nierówność rezydualna

Nierówność rezydualną otrzymamy z bilansów masy, pędu, energii i nierówności wzrostu entropii. Występuje w niej zmiana energii wewnętrznej oraz zmiany natury mechanicznej i niemechanicznej, z tym że zmiana energii wewnętrznej wywołana jest zmianą entropii i odkształceń. Jest to sytuacja niekorzystna, gdyż zmiana entropii jest trudna do zmierzenia. Nierówność tę można zmodyfikować, wiążąc ją z energią swobodną, zwaną też potencjałem termodynamicznym Helmholtza, w postaci

$$\rho A = \rho U - \rho ST \tag{4.1}$$

Potencjał ten jest odpowiednikiem potencjału Gibbsa w warunkach izotermicznych i izochorycznych, czyli dla $T = const$ i $V = const$.

Różniczkując (4.1) po czasie otrzymamy

$$\rho \dot{A} = \rho \dot{U} - \rho \dot{S} T - \rho S \dot{T} . \tag{4.2}$$

Po podstawieniu (4.2) do nierówności wzrostu entropii (3.15) i pominięciu, zgodnie z założeniami, członu temperaturowego, otrzymamy

$$\rho \frac{dA}{dt} + \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha} d_{ij} + \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \frac{dC^{\alpha}}{dt} M^{\alpha} - \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} R^{\alpha} M^{\alpha} - \sum_{\alpha} j_{k}^{\alpha} M_{,k}^{\alpha} \geq 0 . \tag{4.3}$$

5. Równania konstytutywne

Aby pełniej określić równania konstytutywne w przypadku ciała wieloskładnikowego, niezbędne jest wprowadzenie tzw. parametru wewnętrznego. Parametr taki opisuje wewnętrzne, nieodwracalne zmiany struktury ośrodka i nie występuje w nierówności rezydualnej. Przyjmiemy ponadto, że energia wewnętrzna jest funkcją odkształceń, stężeń i parametrów wewnętrznych (skalarnych), związanych z odkształceniami zależnością liniową [2]

$$\dot{\xi}^{\alpha} = B_{ij}^{\alpha} \dot{\varepsilon}_{ij} . \tag{5.1}$$

Energię wewnętrzną przyjmujemy zatem w postaci

$$\rho A = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} A\left(\varepsilon_{ij}, C^{\alpha}, \xi^{\alpha}\right). \tag{5.2}$$

Po zróżniczkowaniu powyższej nierówności względem czasu, a następnie podstawieniu tego wyniku do nierówności (4.3) przy uwzględnieniu (5.1) otrzymamy

$$\sum_{\alpha}\left(\sigma_{ij}^{\alpha}-\rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}-\rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \xi_{\alpha}}B_{ij}^{\alpha}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}+\sum_{\alpha}\rho^{\alpha}\left(M^{\alpha}-\frac{\partial A}{\partial C^{\alpha}}\right)\dot{C}^{\alpha} \\ -\sum_{\alpha}\rho^{\alpha}R^{\alpha}M^{\alpha}-\sum_{\alpha}j_{k}^{\alpha}M_{k}^{\alpha}\geq 0 \tag{5.3}$$

5.1. Naprężenia w składniku α

W określonych warunkach możemy z zależności (4.5) uzyskać równanie konstytutywne opisujące naprężenia w składniku α: a) wywołane przepływami dyfuzyjnymi, a także b) zależność definiującą potencjał chemiczny. Naprężenie wyrażone jest poniższą zależnością

$$\sigma_{ij}^{\alpha}=\rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}+\rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \xi^{\alpha}}B_{ij}^{\alpha}. \tag{5.4}$$

Przyjmując w (5.4) oznaczenie

$$\rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}^{0} \text{ oraz } \rho^{\alpha}\frac{\partial A}{\partial \xi^{\alpha}}B_{ij}^{\alpha}=\tau_{ij}^{\alpha}, \tag{5.4a}$$

otrzymujemy

$$\sigma_{ij}^{\alpha}=\sigma_{ij}^{0}+\tau_{ij}^{\alpha}. \tag{5.4b}$$

W zależnościach powyższych element σ_{ij}^{0} interpretować należy jako naprężenie uśrednione po wszystkich składnikach, natomiast element τ_{ij}^{α} traktować należy jako odchyłkę (zmianę) naprężeń wywołaną zmianami wewnętrznymi, zależną od cech indywidualnych składnika α.

6. Uwagi końcowe

W przedstawionej pracy zaproponowano opis zjawisk towarzyszących dyfuzji w ośrodku porowatym. Ze względu na złożoność procesu konieczne stało się wprowadzenie wielu uproszczeń. W prezentowanym modelu zastosowano parametr opisujący wewnętrzne oddziaływania miedzy składnikami ośrodka. Podstawowym problem jest określenie ilościowe wartości tego parametru, co wiąże się z opracowaniem odpowiedniego modelu eksperymentalnego. Nie mniej złożone jest zagadnienie wyznaczenia składowych tensora B_{ij}^{α}.

LITERATURA

1. Bowen R. M.: Theory of mixtures, Continuum Physics (A.C. Eringen ed.), 3, Academic Press, New York 1976.
2. Kubik J.: Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent, I.F.M. 44, Ruhr-Uni, Bochum 1985.
3. Świrska J.: Analiza procesów cieplno-wilgotnościowych towarzyszących kondensacji pary wodnej w przegrodach budowlanych. Rozprawa doktorska, WSI, Opole 1998.
4. Tokarski M., Tkaczyk St.: Wprowadzenie w termodynamikę stopów, Skrypt nr 44 WSI w Opolu, Opole 1977.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski

Abstract

There is presented a description of diffusion stress caused by flowing medium. This media usually have various structures and appear in various phases. As the migrating constituent we can assume such substances as moisture, various vapours, including aggressive one, etc.