ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: BUDOWNICTWO z. 93 Nr kol. 1514

Zbigniew PERKOWSKI*
Politechnika Opolska

EWOLUCJA USZKODZEŃ W LINIOWYCH OŚRODKACH IZOTROPOWYCH

Streszczenie. Przedstawiono prosty model rozwoju uszkodzeń w materiale. Założono, iż ewolucja uszkodzeń ma charakter izotropowy, co pozwala na użycie do jej opisu parametru skalarnego. Wzrost uszkodzeń warunkowany jest rozciągającymi składowymi tensora naprężeń oraz przyrostami temperatury. Dla przedstawionego modelu wyprowadzono równania fizyczne na naprężenia i ograniczenia termomechaniczne.

DAMAGE EVOLUTION IN LINEAR ISOTROPIC MEDIUM

Summary. A simple model of the damage evolution in material is presented. The damage evolution is assumed as an isotropic one and the level of damages in material is described by the scalar parameter. The growth of damages is related with the level of tensile stresses and temperature gain. The physical equations and thermomechanical limitations for this case are formulated.

1. Wstęp

Przepływy ciepła wywołują w materiałach nie tylko wewnętrzne stany naprężeń typu dystorsyjnego, ale również wpływają na zmianę ich własności. W wielu przypadkach procesy te wywołują uszkodzenia materiału i postępujące zniszczenie jego struktury (np. mikrorysy). Analiza przytoczonych zjawisk wzajemnie na siebie oddziałujących należy do zagadnień złożonych. Badanie omawianego problemu z uwagi na jego wyraźnie „dyssypatywny" charakter przeprowadzono w ujęciu termomechanicznym, w którym wykorzystuje się ogólny bilans energii do opisu procesu.

Celem pracy jest określenie równań fizycznych na naprężenia i strumień ciepła w materiale z uszkodzeniami. W opracowaniu niniejszym uwzględniono wpływ oddziaływań natury mechanicznej i termicznej na degradację parametrów określających podatność materiału, przy czym wprowadzono założenia upraszczające rozważania: relacja naprężenie-odkształcenie w

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik.

materiale nieuszkodzonym jest liniowa, uszkodzenia mają charakter ciągły i izotropowy, w przypadku oddziaływań natury mechanicznej przyjęto, iż ewolucja uszkodzeń związana jest z występowaniem głównych naprężeń rozciągających.

2. Transformacje stanów naprężeń i odkształceń

Na klasyczny wzór określający transformacje tensora naprężenia w materiale

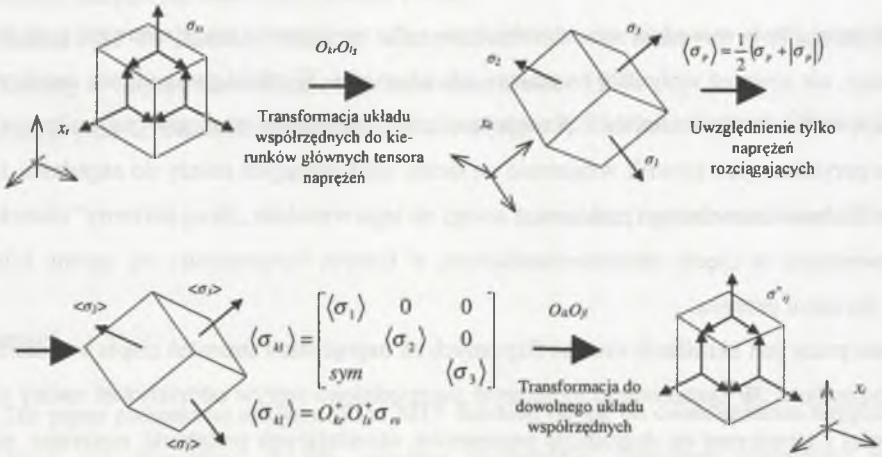
$$\sigma_{ij} = O_{ik} O_{jl} \sigma_{kl}; \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{1}$$

gdzie: σ_{ij} - tensor naprężenia, O_{ik} - tensor transformacji,

przy zmianie układu odniesienia należy narzucić dodatkowe ograniczenia wynikające z faktu, iż naprężenia rozciągające są główną przyczyną narastania uszkodzeń struktury materiału [1,2,3,4,5]. W efekcie dowolną transformację stanu naprężeń należy rozdzielić na dwa etapy. W pierwszym transformujemy tensor naprężeń do układu współrzędnych, którego kierunki osi są zgodne z kierunkami głównymi tensora naprężeń, a następnie do dowolnego usytuowania osi układu (rys.1) [6]. Wprowadzimy tutaj nową operację przeprowadzoną w układzie współrzędnych zgodnych z kierunkami głównymi tensora naprężeń eliminując naprężenia główne ściskające

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{1}{2}\left(\sigma_p + |\sigma_p|\right); \quad p = 1,2,3, \tag{2}$$

gdzie: σ_p - naprężenia główne.



Rys. 1. Transformacja stanu naprężenia uwzględniająca tylko naprężania główne rozciągające
Fig. 1. Transformation of stress tensor taking into account only tensile principle stresses

W efekcie obie operacje zapisujemy relacją

$$\sigma_{ij}^{+} = O_{ik}O_{jl}\left[O_{kr}^{+}O_{ls}^{+}\right]\sigma_{rs} = O_{ik}O_{jl}\langle\sigma_{kl}\rangle = P_{ijrs}^{+}\sigma_{rs}, \tag{3}$$

gdzie

$$P_{ijrs}^{+} = O_{ik}O_{jl}\left[O_{kr}^{+}O_{ls}^{+}\right]. \tag{4}$$

Takie samo prawo przekształceń stosujemy dla tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{ij}^{+} = P_{ijrs}^{+}\varepsilon_{rs}; \quad i,j,r,s = 1,2,3, \tag{5}$$

gdzie: ε_{ij} - tensor odkształcenia.

3. Równania fizyczne

Podamy obecnie ogólną postać równania fizycznego na naprężenia w materiale sprężystym podlegającym uszkodzeniu z dystorsyjnymi polami odkształceń wywołanych przyrostem temperatury

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= [1-\omega]E_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{\theta}\right) = [1-\omega]E_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}-\alpha_{kl}\theta\right) = \\ &= E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}\theta - \omega\left(E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}\theta\right) = \sigma_{ij}^{T} - \sigma_{ij}^{\theta} - \sigma_{ij}^{D},\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie

$$\omega = \omega(t) \in \langle 0,1\rangle, \; \varepsilon_{kl}^{\theta} = \alpha_{kl}\theta, \; \gamma_{ij} = E_{ijkl}\alpha_{kl}, \tag{7}$$

gdzie: ω - bezwymiarowy parametr uszkodzenia określający stopień uszkodzenia struktury materiału, t - czas, θ - przyrost temperatury, $E_{ijkl}, \alpha_{kl}, \gamma_{ij}$ - tensory stałych materiałowych, σ_{ij}^{T} - tensor naprężeń całkowitych, σ_{ij}^{θ} - tensor naprężeń termicznych, σ_{ij}^{D} - tensor naprężeń wywołanych uszkodzeniem struktury materiału, $\varepsilon_{kl}^{\theta}$ - tensor odkształceń termicznych.

Wprowadzony w relacji (6) parametr uszkodzenia ω przyjmuje wartości z przedziału od zera, na początku procesu, do jedności w chwili zniszczenia. Określa on jednostkową zmianę powierzchni nośnej powstałej wskutek powstawania mikrorys i rozluźnienia struktury materiału. Wartość parametru uszkodzenia zależy w omawianym procesie od stanu naprężeń i przyrostu temperatury, stąd należy go wyznaczyć z dodatkowego równania kinetycznego typu

$$\dot{\omega} = f(\boldsymbol{\sigma},\theta), \quad \omega(t=0^{+}) = 0. \tag{8}$$

Trzeci ze składników równania fizycznego (6) zawiera wpływ uszkodzeń. Aby uzależnić go tylko od dodatnich składowych tensora naprężeń rozpiszmy go z uwzględnieniem prawa transformacji (3)

$$\sigma_{ij}^{D} = \omega P_{ijrs}^{+} E_{rskl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\theta}\right)^{+}, \tag{9}$$

ale

$$\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\theta}\right)^{+} = P_{klmn}^{+} \left(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^{\theta}\right), \tag{10}$$

stąd

$$\sigma_{ij}^{D} = \omega P_{ijrs}^{+} E_{rskl} P_{klmn}^{+} \left(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^{\theta}\right) = \omega E_{ijkl}^{+} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\theta}\right) = \omega E_{ijkl}^{+} \varepsilon_{kl} - \omega \gamma_{ij}^{+} \theta, \tag{11}$$

gdzie:

$$E_{ijmn}^{+} = P_{ijrs}^{+} E_{rskl} P_{klmn}^{+}, \quad \gamma_{ij}^{+} = E_{ijkl}^{+} \alpha_{kl}. \tag{12}$$

Ostatecznie wzór (6) przyjmuje postać

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij} \theta - \omega \left(E_{ijkl}^{+} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}^{+} \theta\right). \tag{13}$$

W równaniu fizycznym (13) opisującym tensor naprężenia prócz klasycznych składników pojawił się nowy nieliniowy człon oddający wpływ uszkodzenia na rozkład naprężeń w materiale. Fakt ten wymaga uwzględnienia zmian naprężeń i temperatury w całym procesie deformacji. Wygodnie jest wówczas korzystać z przyrostowej formy równania fizycznego (13)

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} = {} & E_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} - \gamma_{ij} \Delta\theta - \Delta\omega \left(E_{ijkl}^{+} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}^{+} \theta\right) - \\ & - \omega \left(E_{ijkl}^{+} \Delta\varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}^{+} \Delta\theta\right) - \omega \left(\Delta E_{ijkl}^{+} \varepsilon_{kl} - \Delta\gamma_{ij}^{+} \theta\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Warto podkreślić, że forma tych równań, w których wyraźnie oddzielona jest część liniowa od składnika ujmującego narastanie defektów struktury, pozwala na konstruowanie stabilnych procedur obliczeniowych.

4. Termomechanika procesu - ograniczenia stawiane na równanie kinetyczne

Uszkodzenia struktury materiałów wywołane wspólnym działaniem naprężeń i przyrostów temperatury są zjawiskiem złożonym. Ich charakter zależy w dużym stopniu od cech indywidualnych konkretnego przypadku, jak na przykład od kształtu ciała, rodzaju materiału, warunków zewnętrznych. W związku z powyższym sensowne jest, by opis procesu przeprowadzić w ujęciu termomechanicznym ze względu na uniwersalność takiego podejścia. Termomechanika opisuje badane procesy w ramach ogólnego ujęcia bilansu energii.

W celu przeprowadzenia rozważań natury termomechanicznej przyjmijmy model ośrodka materialnego o obszarze V ograniczonego powierzchnią s jak na rys. 2. Dla tak przyjętego modelu ośrodka sformułować możemy bilans masy, pędu i energii oraz nierówność wzrostu entropii [7,8]. W dalszej kolejności założymy, iż niezależnymi polami w omawianym procesie będą: tensor odkształceń, przyrost temperatury i parametr uszkodzenia jako zmienna wewnętrzna, a podstawowym funkcjonałem energia swobodna

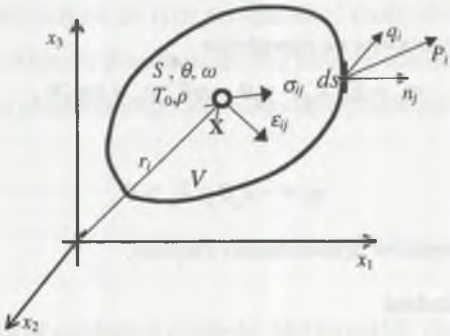
$$\rho A = \rho A(\varepsilon_{ij}, \theta, \omega). \tag{15}$$

gdzie: A - energia swobodna, ρ - gęstość materiału.

W wyniku „typowych" rozważań termodynamicznych z konfrontacji bilansów energii, pędu, masy i nierówności wzrostu entropii otrzymamy nierówność rezydualną

$$-\rho S\dot{\theta} - \rho\dot{A} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i\theta_{,i}}{T_0} \geq 0\,, \tag{16}$$

gdzie: q_i - strumień ciepła, T_0 - temperatura początkowa, S - entropia, $(\dot{\ })$ - pochodna lokalna po czasie,



Rys. 2. Model ośrodka materialnego
Fig. 2. Model of material medium

która powinna być spełniona w każdym rzeczywistym procesie narastania odkształceń, uszkodzeń i zmian temperatury. Podstawową dla naszych rozważań energię swobodną będziemy aproksymować wielomianem

$$\begin{aligned}\rho A = \rho A_0 - \rho S_0\theta - b\theta\omega - \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}c_v\theta^2 + \\ + \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\omega E^*_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}\theta\varepsilon_{ij} + \omega\gamma^*_{ij}\theta\varepsilon_{ij} + R.\end{aligned} \tag{17}$$

gdzie: A_0 - początkowa energia wewnętrzna, S_0 - entropia początkowa, σ^0_{ij} - tensor naprężeń początkowych, c_v - ciepło właściwe, b - stała materiałowa, R - reszta wielomianu.

Obliczając pochodną po czasie z wyrażenia (17) i wstawiając ją do (16) otrzymamy

$$\begin{aligned}&(-\rho S+\rho S_0+c_v\theta)\dot{\theta}+\\&+(\sigma_{ij}+\sigma_{ij}^0-E_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\gamma_{ij}\theta+\omega E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}-\omega\gamma_{ij}^{+}\theta)\dot{\varepsilon}_{ij}+\\&+\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-\gamma_{ij}^{+}\theta\varepsilon_{ij}+b\theta\right)\dot{\omega}-\frac{q_i\theta_{,i}}{T_0}\geq 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Tożsamościowe spełnienie tej nierówności dla każdej rzeczywistej zmiany temperatury i tensora odkształceń jest równoważne z przyjęciem, że

$$\begin{aligned}&\rho S=\rho S_0+c_v\theta,\\&\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\gamma_{ij}\theta-\omega E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}+\omega\gamma_{ij}^{+}\theta-\sigma_{ij}^0,\\&\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-\gamma_{ij}^{+}\theta\varepsilon_{ij}+b\theta\right)\dot{\omega}\geq 0,\\&-\frac{q_i\theta_{,i}}{T_0}\geq 0.\end{aligned}\tag{19}$$

Pomijając w rozważaniach naprężenia początkowe

$$\sigma_{ij}^0\equiv 0,\tag{20}$$

otrzymamy równanie konstytutywne na naprężenia

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\gamma_{ij}\theta-\omega E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}+\omega\gamma_{ij}^{+}\theta\,,\tag{21}$$

strumień ciepła

$$q_i=-\lambda_{ij}\theta_{,j};\lambda_{ij}>0\,,\tag{22}$$

gdzie: λ_{ij} - tensor współczynników przewodności cieplnej,

oraz warunek ewolucji uszkodzeń

$$\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}^{+}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-\gamma_{ij}^{+}\theta\varepsilon_{ij}+b\theta\right)\dot{\omega}\geq 0\,.\tag{23}$$

W przestrzeni naprężeń głównych zapis (23) można sprowadzić do formy

$$\left(\frac{1}{2}\left\langle\sigma_p^T-\sigma_p^\theta\right\rangle\varepsilon_p+b\theta\right)\dot{\omega}\geq 0\,.\tag{24}$$

Z powyższego warunku wynika, iż parametr uszkodzenia jest funkcją niemalejącą w czasie, a jego wzrost powiązany jest z pracą wykonaną przez cześć mechaniczną naprężeń głównych rozciągających na odkształceniach oraz przyrostem temperatury. Spełnienie warunku (24) prowadzi do równania ewolucji uszkodzeń

$$\dot{\omega} = a\left(\frac{1}{2}\left\langle\sigma_r^T - \sigma_r^e\right\rangle\varepsilon_r + b\theta\right) \quad a,b \geq 0, \tag{25}$$

gdzie: a - stała materiałowa.

5. Wnioski

W pracy zaprezentowano termomechaniczny opis narastania uszkodzeń w materiale wywołanych stanem naprężeń oraz przyrostem temperatury. Wyprowadzono równania fizyczne ujmujące wpływ głównych naprężeń rozciągających na proces destrukcji materiału, a z rozważań termomechanicznych otrzymano ograniczenia nakładane na proces narastania uszkodzeń wynikające z dyssypatywnego charakteru zjawiska. Należy przy tym zaznaczyć, że uzyskane zależności warunkujące wzrost uszkodzeń materiału tylko od naprężeń głównych rozciągających, pod kątem aplikacji, predysponuje je do opisu materiałów kruchych. Przyjęta postać wielomianu aproksymującego energię swobodną ogranicza klasę rozważanych procesów narastania uszkodzeń jedynie do tych przypadków, kiedy równanie określające naprężenia w materiale nieuszkodzonym pozostaje liniową funkcją odkształceń i temperatury. Dalsze uogólnienia wymagałyby przyrostowego sformułowania problemu termomechanicznego.

LITERATURA

1. Chen W.F.: Plasticity of reinforced concrete, McGraw-Hill, New York 1982.
2. Dragon A.: Kontynualny model ośrodka z parametrem przebudowy struktury, IPPT PAN, Warszawa 1974.
3. Kubik J., Perkowski Z., Opis narastania uszkodzeń betonu, III Konferencja Naukowo-Techniczna - Zagadnienia Materiałowe w Inżynierii Lądowej - Matbud`2000, 208-215, Kraków 2000.
4. Litewka A., Dębiński J., Anizotropowy model odkształcalności betonu w złożonym stanie naprężenia, XLIII KN KILiW PAN i KN PZITB, Poznań-Krynica 1997.
5. Perkowski Z., Opis odkształcalności betonu z uszkodzeniami, ZN Politechniki Śląskiej, ser. Budownictwo, z. 89, s. 163-170, Gliwice 2000.

6. Ortiz M., A constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete, Mech. of Mat. 4, 67-93, 1985.
7. Kubik J.: Thermodiffusion flows in solid with a dominant constituent. IffM44, Ruhr-Uni Bochum 1985.
8. Kubik J., Jakubiak A.: Wpływ dyfuzji na sprężysto-plastyczne i kruche deformacje , ZN WSI Opole, ser. Budownictwo, z. 35, Opole 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. Jerzy Białkiewicz

Abstract

Heat flows generate distortion stresses in material and change its properties by damaging and destroying structure of material. The analysis of the mentioned effects, influencing on each other, belong to complicated problems. Studies in this case can be made within the range of thermomechanics because of its dissipative character where the process is described by the global energy balance. The aim of the work is to formulate physical equations describing heat flux, stress tensor and thermomechanical limitations for material with damaged structure. In the paper the following assumptions are introduced: the damage evolution is an isotropic one and the level of damages in material is described by the scalar parameter, stress tensor in undamaged material is linear function of strain and temperature, the growth of damages is related with the level of tensile stresses and temperature gain.