ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: BUDOWNICTWO z. 93 Nr kol. 1514

Andrzej POWNUK*
Politechnika Śląska

NIEZAWODNOŚĆ KONSTRUKCJI O PARAMETRACH PRZEDZIAŁOWYCH I LOSOWYCH

Streszczenie. W pracy wykazano, że metoda projektowania konstrukcji wykorzystująca parametry przedziałowe daje te same wyniki, co stosowana w obecnych normach projektowania metoda półprobabilistyczna. Przedstawiono nową metodę identyfikacji parametrów przedziałowych opartą na obowiązujących przepisach budowlanych. Zaprezentowana metoda umożliwia wykorzystanie istniejących współczynników bezpieczeństwa w metodzie elementów skończonych. Prezentowany algorytm może być wykorzystany do obliczeń bezpieczeństwa konstrukcji o parametrach przedziałowych i losowych.

RELIABILITY OF STRUCTURES WITH INTERVAL AND RANDOM PARAMETERS

Summary. In this paper, it was shown, that the interval methods gives the same results as the semi-probabilistic method. The new method of identification of interval parameters is presented. The method is based on existing civil engineering codes. Using this method we can apply safety factors in the finite element method. Presented algorithm can be applied to calculation of reliability of structures with interval and random parameters.

1. Wprowadzenie

Wszystkie parametry konstrukcji budowlanych znane są z pewną większą lub mniejszą dokładnością. W niektórych przypadkach niepewności te są na tyle duże, że nie mogą zostać pominięte w procesie projektowania. Występuje to np. w konstrukcjach murowych, betonowych, kompozytowych oraz w przypadku obciążeń wiatrem i śniegiem. Do modelowania niepewności parametrów obecnie wykorzystuje się metody półprobabilistyczne (współczynniki bezpieczeństwa). W niniejszej pracy do modelowania niepewności zostaną wykorzystane przedziały liczbowe (tolerancje). Ponadto zostanie pokazane, że istniejące metody półprobabilityczne są szczególnym przypadkiem metod przedziałowych.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. PŚl.

2. Metoda półprobabilistyczna

W ramach metod poziomu I, jedna wartość charakterystyczna określa każdy parametr losowy. Oznaczając dalej przez $\overline{\sigma}_0$ i s_{σ_0} odpowiednio wartość średnią i odchylenie standardowe wytrzymałości materiału, a przez $\overline{Q}$ i s_Q wartość średnią i odchylenie standardowe obciążenia, wytrzymałość charakterystyczna materiału σ_k oraz charakterystyczna wartość obciążenia Q_k zdefiniowane są jako

$$\sigma_k = \overline{\sigma}_0 - t_{\sigma_0} s_{\sigma_0}, \quad Q_k = \overline{Q} + t_Q s_Q \tag{1}$$

gdzie parametry t_{σ_0} i t_Q dobiera się tak, aby wartości charakterystyczne σ_k i Q_k były odpowiednimi kwantylami zmiennych losowych σ_0 i Q (np. na poziomie: 2%, 5% dla wytrzymałości oraz 98% rocznego maksimum dla obciążenia). Często przyjmuje się

$$t_{\sigma_0} = \begin{cases} 2 & \text{dla konstrukcji stalowych} \\ 1.645 & \text{dla konstrukcji betonowych} \end{cases} \tag{2}$$

Wprowadza się następnie tzw. wartości obliczeniowe (projektowe) σ_d i Q_d, dane jako [4]

$$\sigma_d = \frac{\sigma_k}{\gamma_s}, \quad Q_d = \gamma_f Q_k \tag{3}$$

gdzie γ_s i γ_f są odpowiednio współczynnikami częściowymi wytrzymałości i obciążenia.

Koncentrując się dalej na konstrukcjach stalowych, schemat 'normowego' podejścia do projektowania konstrukcji przedstawiono na podstawie normy PN-90/B-03200. Norma ta stanowi, iż wymiarowanie konstrukcji należy przeprowadzać metodą stanów granicznych, rozróżniając:

- stany graniczne nośności i odpowiadające im obciążenia obliczeniowe,
- stany graniczne użytkowania i odpowiadające im obciążenia charakterystyczne.

Przy wymiarowaniu konstrukcji należy wykazać, że we wszystkich możliwych do przewidzenia przypadkach projektowych, w fazach realizacji i eksploatacji, spełnione są warunki nośności i sztywności konstrukcji. W ogólnym przypadku warunek stanu granicznego zniszczenia zapisać można w postaci [4]

$$g(\mathbf{Q}_d, \sigma_d, \gamma_d, \gamma_n) \geq 0 \tag{4}$$

gdzie $g(\mathbf{Q}_d, \sigma_d, \gamma_d, \gamma_n) = R_d - S_d$. S_d jest wartością obliczeniową momentu lub siły przekrojowej. R_d jest nośnością obliczeniową elementu.

Przez γ_d oznaczono współczynniki uwzględniające niepewności modelu, inne niż te, które wzięto w rachubę przy specyfikowaniu współczynników γ_s i γ_f, natomiast γ_n oznacza współczynnik konsekwencji zniszczenia [1, 6].

Jak widać, w metodzie tej zakłada się, że parametry należą do następujących przedziałów

$$\sigma_0 \in \hat{\sigma} = [\sigma_d, \infty), \quad Q \in \hat{Q} = [0, Q_d] \tag{5}$$

Parametry projektowe **x** należą do następującego zbioru:

$$\{\mathbf{x} : \forall \boldsymbol{\sigma} \in \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \forall \mathbf{Q} \in \hat{\mathbf{Q}}, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathbf{x}}, g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Q}, \gamma_d, \gamma_n) \geq 0\} \tag{6}$$

W praktyce rzadko określa się cały zbiór (6). Zwykle sprawdza się tylko, czy parametry projektowanej konstrukcji spełniają relację (4). Dlatego bardziej istotne jest określenie następującego przedziału

$$\hat{g} = \{y : y = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Q}, \gamma_d, \gamma_n), \mathbf{x} \in \hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\sigma} \in \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{Q} \in \hat{\mathbf{Q}}\} \tag{7}$$

Jeśli

$$0 \leq inf\ \hat{g} \tag{8}$$

wtedy projektowana konstrukcja jest bezpieczna. Jak widać, aby sprawdzić warunek $0 \leq inf\ \hat{g}$, nie trzeba wyznaczać całego przedziału $\hat{g}$. Wystarczy obliczyć jedynie $g^- = inf\ \hat{g}$. Ponieważ w stosowanych obecnie normach projektowania zależność $y = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Q}, \gamma_d, \gamma_n)$ jest monotoniczna, dlatego wyznaczenie wielkości g^- jest bardzo proste. Wielkość g^- otrzymujemy przyjmując w obliczeniach $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_d$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_d$, tzn.

$$g^- = g(\mathbf{x}_d, \mathbf{Q}_d, \boldsymbol{\sigma}_d, \gamma_d, \gamma_n) \tag{9}$$

3. Wykorzystanie metody półprobablistycznej do identyfikacji parametrów przedziałowych

Założymy, że średnia wartość obciążenia projektowanej konstrukcji wynosi $\overline{Q}$. Na skutek występowania niepewności, do projektowania przyjmujemy wartości obliczeniowe (projektowe) Q_d określone wzorem (3). Wielkość Q_d stanowi górne ograniczenie wartości siły Q. W analogiczny sposób można wyznaczyć dolne ograniczenie. Ostatecznie otrzymujemy przedział, do którego mogą należeć wartości siły Q.

$$\hat{Q} = [Q^-, Q^+] = [\overline{Q} - \Delta Q, \overline{Q} + \Delta Q], \quad \text{gdzie} \quad \Delta Q = Q_d - \overline{Q} \tag{10}$$

Analogicznie określamy przedział zmienności wytrzymałości materiału σ

$$\hat{\sigma} = [\sigma^-, \sigma^+] = [\overline{\sigma} - \Delta\sigma, \overline{\sigma} + \Delta\sigma], \quad \text{gdzie} \quad \Delta\sigma = \overline{\sigma} - \sigma_d \tag{11}$$

W przypadku braku danych doświadczalnych jako wartości $\overline{Q},\overline{\sigma}$ można przyjąć odpowiednie wartości charakterystyczne określone przez projektanta. Podobną metodologię można zastosować w przypadku parametrów geometrycznych. Szczegółowe metody obliczania wartości charakterystycznych i obliczeniowych podane są w odpowiednich normach budowlanych. Należy podkreślić, że zwykle praktyczne znaczenie ma tylko jeden koniec przedziału. W przypadku obciążeń decydujące znaczenie ma obciążenie maksymalne P^+. W przypadku wytrzymałości materiałów zwykle korzysta się z wartości minimalnej σ_0^-. Wyznaczanie liczb P^-, σ_0^+ zwykle nie jest konieczne.

Jak zostało pokazane w poprzednim punkcie, tradycyjne metody projektowania do określenia bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystują koncepcję parametrów przedziałowych, dlatego wyniki otrzymane przy wykorzystaniu normowych metod projektowania pokrywają się z wynikami obliczeń przy wykorzystaniu metody przedziałowej.

Należy podkreślić, że metoda obliczania wielkości charakterystycznych i obliczeniowych nie musi mieć interpretacji probabilistycznej. Dlatego parametry przedziałowe mogą zostać wykorzystane do opisu niepewności, które nie mają charakteru losowego. W konstrukcjach budowlanych bardzo często mamy do czynienia z wyrobami o charakterze jednostkowym i nie można w takim przypadku wykonać wymaganej liczby pomiarów, aby obliczyć odpowiednie losowe charakterystyki.

Z podobną sytuacją mamy do czynienia podczas ekspertyz konstrukcji zabytkowych. W tym przypadku wykonanie potrzebnych badań jest utrudnione, gdyż mogłyby one doprowadzić do zniszczenia konstrukcji.

4. Zastosowanie metody półprobablistycznej do modelowania parametrów w komputerowych algorytmach mechaniki konstrukcji

Współcześnie coraz częściej do obliczania bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystuje się komputerowe metody mechaniki ciał stałych [3]. W metodach tych nie można bezpośrednio zastosować zaleceń norm budowlanych dotyczących bezpieczeństwa konstrukcji. Jednakże, bazując na istniejących przepisach, można zidentyfikować przedziały, do których należą obciążenia, wytrzymałości oraz inne parametry konstrukcji. Następnie w celu sprawdzenia bezpieczeństwa konstrukcji, można wykorzystać warunek (8). Jako funkcję graniczną można przyjąć odpowiednią hipotezę wytężeniową, np. warunek Hubera-Missesa

$$g(\mathbf{h}) = \sigma_0^2(\mathbf{h}) - \frac{3}{2}\mathbf{s}(\mathbf{h}) : \mathbf{s}(\mathbf{h}) \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \cdot tr\boldsymbol{\sigma}$ jest dewiatorem tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, σ_0^2 jest granicą plastyczności przy rozciąganiu oraz $\mathbf{h}$ jest wektorem parametrów niepewnych. Ponadto $\mathbf{s}(\mathbf{h}) : \mathbf{s}(\mathbf{h}) = \sum_{i,j} s_{ij}(\mathbf{h}) \cdot s_{ij}(\mathbf{h})$. Zaprezentowana koncepcja bezpieczeństwa konstrukcji jest słuszna dla wszystkich zagadnień mechaniki, dla których można sformułować hipotezy wytężeniowe. Przykładowymi działami mechaniki mogłyby być tutaj:

- teoria sprężystości,
- teoria plastyczności,
- teoria lepkosprężystości oraz lepkoplastyczności,
- mechanika zniszczenia,
- mechanika pękania,
- stateczność konstrukcji.

Podejście oparte na parametrach przedziałowych nie jest w stanie dokładnie opisać niepewności o charakterze losowym. Może to powodować projektowanie konstrukcji o zbyt konserwatywnych parametrach, co jest jego wadą.

Zastosowanie metody parametrów przedziałowych posiada następujące zalety:

- przy wykorzystaniu przedstawionej w niniejszej pracy metodologii, parametry przedziałowe są bardzo proste do identyfikacji,
- do określenia parametrów przedziałowych potrzebna jest bardzo mała liczba informacji (trzeba określić tylko dwie liczby),
- przedziały liczbowe mogą opisywać niepewności o charakterze nielosowym,
- obliczenia przy wykorzystaniu metody przedziałowej są znacznie prostsze od obliczeń przeprowadzonych za pomocą analogicznych metod probabilistycznych.

5. Bezpieczeństwo układów o parametrach przedziałowych i losowych

Jeśli w układzie mamy do czynienia zarówno z parametrami przedziałowymi $\hat{h}_i$ jak i losowymi X_i, to prawdopodobieństwo zniszczenia układu mechanicznego można obliczyć przy wykorzystaniu następującej zależności:

$$P_f = P\left(g(\mathbf{X},\mathbf{h}) < 0, \mathbf{h} \in \hat{\mathbf{h}}\right) = \int\limits_{\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x},\mathbf{h})<0, \mathbf{h}\in\hat{\mathbf{h}}\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{13}$$

gdzie $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ jest funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego **X**.

Rozważymy dla przykładu pręt rozciągany siłą P o przekroju A i wytrzymałości σ_0. Zakładam, że $\hat{P} = [P^-, P^+]$ oraz σ_0 jest zmienną losową o rozkładzie normalnym scharakteryzowanym wartością średnią $\overline{\sigma}_0$ i odchyleniem standardowym s_{σ_0}.

$$P_f = P(\{\omega : \sigma_0(\omega)A - P < 0, P \in \hat{P}\}) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_z(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{\beta^+} f_t(t)dt = \Phi(\beta^+) \tag{14}$$

gdzie $z = \sigma A - P$, $t = \dfrac{z - \overline{z}}{s_Z}$, $\beta = \dfrac{\overline{z}}{s_Z}$, $\beta^+ = \dfrac{A\overline{\sigma}_0 - P^-}{As_{\sigma_0}}$ oraz $\Phi(t)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$.

W przypadku stosowania metody elementów skończonych, do obliczenia ekstremalnych wartości funkcji granicznej można wykorzystać monotoniczną zależność rozwiązania od niepewnych parametrów oraz metody analizy wrażliwości.

Niech funkcja graniczna ma postać określoną za pomocą wzoru (12). Wrażliwość funkcji granicznej można określić następująco:

$$\frac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i} = 2\frac{\partial \sigma_0(\mathbf{h})}{\partial h_i} - \frac{3}{2}\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial h_i} : \mathbf{s}(\mathbf{h}) - \frac{3}{2}\mathbf{s}(\mathbf{h}) : \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial h_i} = 2\frac{\partial \sigma_0(\mathbf{h})}{\partial h_i} - 3\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial h_i} : \mathbf{s}(\mathbf{h}) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial h_i} = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial h_i} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i}(\mathbf{CBq}) = \frac{\partial \mathbf{CB}}{\partial h_i}\mathbf{q} + \mathbf{CB}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i} \tag{17}$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h_i}\mathbf{q} \tag{18}$$

Przy czym $\dfrac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{h})}{\partial h_i} : \mathbf{s}(\mathbf{h}) = \sum\limits_{m,n} \dfrac{\partial s_{mn}(\mathbf{h})}{\partial h_i} : s_{mn}(\mathbf{h})$. **C** jest macierzą stałych materiałowych. **q** jest wektorem przemieszczeń. **B** jest macierzą pozwalającą obliczyć odkształcenia na podstawie znanych przemieszczeń $\varepsilon = \mathbf{Bq}$. **K** jest macierzą sztywności. **Q** jest wektorem uogólnionych obciążeń przywęzłowych. Znaczenie poszczególnych symboli można znaleźć w pracy [3]. Ekstremalne wartości funkcji granicznej można znaleźć na podstawie znaku pochodnej $\dfrac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i}$ oraz końców przedziału $\hat{\mathbf{h}}$.

$$g^{-} = g\left(\hat{\mathbf{h}}, sign\left(\frac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i}\right)\right), \quad g^{+} = g\left(\hat{\mathbf{h}}, sign\left(\frac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i}\right)\right) \tag{19}$$

W układach liniowych funkcje wewnętrzne w elemencie prętowym „e" są funkcjami przemieszczeń $\mathbf{q}$, obciążeń konstrukcji $\mathbf{Q}$ oraz obciążeń $\mathbf{Q}^e$ elementu „e".

$$M_e(x) = f_M^e(x, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^e) \tag{20}$$

gdzie $M_e(x)$ jest momentem zginającym w punkcie x elementu „e". Wrażliwość funkcji momentów zginających można obliczyć przy wykorzystaniu następującego wzoru.

$$\frac{\partial M_e(x)}{\partial h_i} = \frac{\partial f_M^e(x, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^e)}{\partial h_i} \tag{21}$$

Na podstawie równania (18) można bezpośrednio obliczyć wrażliwość przemieszczeń $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i}$. $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_i}$ oraz $\frac{\partial \mathbf{Q}^e}{\partial h_i}$. Wykorzystując $\frac{\partial M_e(x)}{\partial h_i}$ można obliczyć obwiednię momentów zginających w bardzo skomplikowanych układach mechanicznych.

$$M_e^{-}(x) = f_M^{e-}\left(x, \hat{\mathbf{h}}, sign\left(\frac{\partial M_e(x)}{\partial \mathbf{h}}\right)\right), \quad M_e^{+}(x) = f_M^{e+}\left(x, \hat{\mathbf{h}}, sign\left(\frac{\partial M_e(x)}{\partial \mathbf{h}}\right)\right) \tag{22}$$

W analogiczny sposób można obliczyć obwiednię pozostałych sił wewnętrznych.

6. Wnioski

Głównym rezultatem niniejszej pracy jest wykazanie, że metoda półprobablistyczna oraz metoda parametrów przedziałowych dają w prostych przypadkach te same rezultaty. Podejście takie umożliwia wykorzystanie normowych współczynników bezpieczeństwa w obliczeniach z wykorzystaniem komputerowych metod mechaniki ciał stałych. Dzięki przedstawionej w niniejszej pracy metodologii identyfikacja parametrów przedziałowych jest bardzo prosta. W pracy opisano algorytm obliczania obwiedni sił wewnętrznych w układach z przedziałowymi parametrami. Obliczona w ten sposób obwiednia może uwzględniać niepewności stałych materiałowych oraz parametrów geometrycznych. Zastosowania zaprezentowanej tutaj metodologii zostaną zaprezentowane na konferencji.

LITERATURA

1. Biegus A.: Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych. PWN, Warszawa 1999.
2. Dubois D., Prade H.: Random sets and fuzzy interval analysis. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 38, 1991, s.309-312.
3. Kleiber M.: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. PWN, Warszawa 1995.
4. Łapko A.: Projektowanie konstrukcji żelbetowych. Arkady, Warszawa 2000.
5. Pownuk A.: Projektowanie układów z niepewnymi parametrami. Sympozjum „Trwałość budowli", Kamień Śląski 2-3.07.2001.
6. Stocki R.: Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń teoria i program komputerowy. Prace IPPT, 13/1999.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Jendo

Abstract

In this paper was shown, that the interval methods gives the same results as the semi-probabilistic method. The new method of identification of interval parameters is presented. The method is based on existing civil engineering codes. Using this method we can apply safety factors in the finite element method. Upper and lower bounds of limit state function g can be calculated using sensitivity analysis. This method can be applied when uncertainty of parameters is sufficiently small. Presented algorithm can be applied to calculate reliability of structures with interval and random parameters. Simple example of application is presented.