

Jarosław STRZESZYŃSKI*
Politechnika Krakowska

WSPÓLPRACA ŻELBETOWYCH PODKŁADÓW POSADZEK Z PODŁOŻEM GRUNTOWYM

Streszczenie. W artykule opisano metody analizy betonowych i żelbetowych podkładów posadzek na gruncie. Omówiono najczęściej spotykane modele podłoża sprężystego. Przedstawiono kolejne fazy pracy płyty żelbetowej na gruncie obciążonej siłą skupioną i założenia przyjmowane w metodach projektowych oraz wpływ szczelin technologicznych na nośność płyt jako główne kryterium projektowania posadzek.

JOINT ACTION OF REINFORCED CONCRETE FLOOR SLABS AND SOIL

Summary. In the paper the methods of analysis of concrete floors on grade is given. The most often used models for elastic foundation are described. Basing on the principles the load action and response for a slab on soil system and the main assumptions for calculation methods are presented. The influence of the joints on slab bearing capacity is assumed to be the main criterion of design of concrete floors.

1. Wstęp

Podstawowym elementem konstrukcyjnym przemysłowych posadzek na gruncie są betonowe i żelbetowe podkłady przekazujące obciążenia na podłoże. We współczesnych technologiach wykonywania posadzek ogranicza się liczbę warstw konstrukcyjnych. W najprostszym przypadku są to trzy warstwy:

- odpowiednio przygotowane podłoże gruntowe,
- warstwa nośna, czyli podkład,
- posadzka, którą stanowi odpowiednio zmodyfikowana warstwa powierzchniowa płyty.

Warstwy wykończeniowe wykonywane są w dwóch technologiach:

- jako posadzki betonowe, poprzez utwardzenie powierzchni płyt żelbetowych np. preparatami proszkowymi i zatarcie (technologia DST),

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Sanowski.

- jako posadzki epoksydowe i poliuretanowe poprzez powlekanie powierzchni płyt cienką warstwą żywic z wypełniaczami. Ze względu na grubość warstwy rozróżnia się tu posadzki powłokowe (ok. 0,5 mm), wylewane (2 – 5 mm) i szpachlowe (6 – 25 mm).

Układ, który stanowi płyta podkładu oraz warstwa wykończeniowa, określa się nazwą posadzka na gruncie [1]. W obliczeniach statycznych tego typu konstrukcji najczęściej przyjmuje się schemat płyty na podłożu sprężystym. W rozwiązaniach podających sposoby obliczania sił wewnętrznych w takim układzie spotykane są różne modele obliczeniowe zarówno dla płyty, jak i dla podłoża.

2. Modele podłoża

W zagadnieniach dotyczących posadzek na gruncie uwzględnia się głównie model podłoża sprężystego. Dokładniejsze modele, np. półprzestrzeń konsolidująca, są w obliczeniach tego typu konstrukcji używane wyjątkowo, ponieważ odpowiednie przygotowanie podłoża (wymiana lub wzmocnienie geowłókninami) pozwala ograniczyć osiadanie w czasie użytkowania posadzki do wartości pomijalnych.

Najczęściej stosowanym modelem podłoża sprężystego jest jednoparametrowe podłożo Winklera. Główną zaletą tego modelu jest prosta postać równania przemieszczeń podłoża, wyrażona zależnością:

$$p(x) = k w(x) \quad (1)$$

W modelu tym grunt przedstawiony jest jako niezależne od siebie sprężyny, o stałej sprężystości k , nazywanej współczynnikiem sprężystości podłoża i jest jedynym parametrem charakteryzującym grunt. W rzeczywistości wartość k nie jest wielkością fizyczną możliwą do pomierzenia – zależy ona od głębokości warstwy gruntu, geometrii ustroju i rozkładu obciążenia, dlatego rozwiązań opartych na modelu Winklera nie można traktować jako dokładnych.

Zastosowanie podłoża winklerowskiego w analizie numerycznej wymaga wyeliminowania z modelu naprężeń rozciągających poprzez wprowadzenie warunków:

$$q \geq 0; \quad (q + v - w) \geq 0; \quad q(g + v - w) = 0 \quad (2)$$

gdzie:

w , v oznaczają przemieszczenia odpowiednio gruntu i płyty,

$g = (v - w)$ stanowi odległość pomiędzy płytą i podłożem.

Równania (2) oznaczają kolejno, że grunt nie może być rozciągany, płyta i grunt nie przenikają się wzajemnie, oraz że odpór podłoża i odległość pomiędzy płytą i podłożem nie mogą być jednocześnie różne od zera.

Jednoparametrowe podłoże Winklera jest wystarczające przy opisie płyt obciążonych siłami skupionymi, nie nadaje się natomiast do opisu płyt pod obciążeniem jednorodnym lub jednorodnie zmiennym rozłożonym na całej powierzchni. Zgodnie z tym modelem płyta dozna wówczas pionowego przemieszczenia lub przemieszczenia i obrotu bez wywołania sił wewnętrznych, co jest niezgodnie z rzeczywistością. Wyeliminowanie tej niedokładności wymaga zastosowania podłoża dwuparametrowego, uwzględniającego interakcję pomiędzy poszczególnymi sprężynami modelu. Takie modele przedstawione zostały m.in. w pracach Fiłonienko-Borodicza [2], Pasternaka [3], Kerra [4] oraz Własowa i Leontiewa [5], różniących się między sobą sposobem definiowania parametrów podłoża.

Dwuparametrowy model Własowa i Leontiewa wykorzystujący zasadę prac wirtualnych do wyznaczenia sprężystych sił reakcji gruntu na krawędziach i w narożach płyty wykorzystany został w kompletnym rozwiązaniu belek i płyt na gruncie opracowanym przez Vallabhana i innych [6, 7, 8].

W modelu Własowa, tak jak w modelu Winklera, przemieszczenia poziome równe są zero, natomiast funkcja przemieszczeń pionowych zapisana jest jako:

$$w(x, y, z) = w(x, y) \cdot \phi(z) \quad (3)$$

Funkcja $\phi(z)$ pozwala na opisanie zanikania przemieszczeń w gruncie. Dla przypadków projektowych, gdy warstwa odkształcalnego gruntu o miąższości H ułożona jest na podłożu skalistym bądź warstwie gruntu o znacznie większej sztywności przybiera ona wartości graniczne $\phi(0) = 1,0$ i $\phi(H) = 0$.

Parametry gruntu opisywane są modułem ścisłości gruntu E_s i współczynnikiem Poissona μ_s . Oryginalne rozwiązanie Własowa i Leontiewa wprowadza niezależny parametr γ , który opisuje profil wykresu odkształceń pionowych o wartości między 1,0 i 2,0. W pracach [6] i [7] podana została iteracyjna metoda wyznaczania γ w zależności od charakterystyki konstrukcji i podłoża – (E_s/E) , $(l/d)^3$ i (H/l) .

Wyznaczenie ϕ pozwala na ustalenie wartości dwóch parametrów opisujących macierze sztywności gruntu dla deformacji pionowych k_k^e oraz poprzecznych k_{2k}^e wyznaczanych z zależności:

$$k = \int_0^H (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz \quad (4a)$$

$$2l = \int_0^H G \phi^2 dz \quad (4b)$$

λ i G stanowią współczynniki Lamego dla gruntu. Macierze k_k^e oraz k_{2l}^e przedstawione zostały w pracy [8]. Metoda ta pozwala ponadto na uwzględnienie liniowej zmiany wartości modułu ściśliwości gruntu na grubości warstwy. Zmienia się wówczas postać równań (4).

Wartości sprężystych reakcji na krawędziach płyty i w narożnikach płyty wynoszą odpowiednio:

- pionowa reakcja działająca na jednostkę długości na krawędzi płyty

$$r = \sqrt{2kt} \cdot W_b \quad (5)$$

- sprężysta siła działająca w narożniku płyty

$$R_c = \frac{3}{2} t W_c \quad (6)$$

w których W_b i W_c stanowią przemieszczenia pionowe na krawędzi i w narożniku płyty.

Momenty skręcające M_x i M_y wyrażone na jednostkę długości na krawędzi płyty opisane są równaniami:

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 2t \sqrt{\frac{2t}{k}} \cdot \theta_x \quad (7a)$$

$$M_y = \frac{1}{2} \cdot 2t \sqrt{\frac{2t}{k}} \cdot \theta_y \quad (7b)$$

Część prac dotyczących konstrukcji na podłożu sprężystym wykorzystuje do opisu gruntu schemat półprzestrzeni sprężystej, oparty na równaniu Boussinesqa (lub równania Flamanta w przypadku zadania płaskiego odkształcenia) opisujące przemieszczenia punktów płaszczyzny ograniczającej od góry powierzchnię półprzestrzeni sprężystej pod działaniem siły skupionej P przyłożonej do jednego z punktów tej powierzchni [9]:

$$w(r) = \frac{P \cdot (1 - \nu_s^2)}{\pi \cdot E_s \cdot r} \quad (8)$$

W modelu tym właściwości gruntu opisywane są poprzez moduł ściśliwości E_s i współczynnik Poissona ν_s , które nie zależą od geometrii konstrukcji ani rozkładu obciążenia. Tym niemniej aproksymacja podłoża gruntowego jako jednorodnego, sprężystego ciała o nieskończonej grubości jest podobnie jak model Winklera, daleka od rzeczywistości.

3. Model płyty w zagadnieniach obliczania posadzek na gruncie

Podstawowym modelem posadzek na gruncie jest płyta Kirchhoffa, pracująca w zakresie sprężystym. Złożenia Kirchhoffa dla płyt obejmują dwie zależności dotyczące funkcji przemieszczeń:

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (9)$$

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) - z d_2 w(x, y) \quad (10)$$

gdzie:

$$u^0 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u dz \quad \text{jest średnim przemieszczeniem w płaszczyźnie środkowej płyty,}$$

$$d_2^T = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad \text{jest macierzą operatorową.}$$

Z powyższych równości wynika, że punkty znajdujące się na odcinku prostym do płaszczyzny środkowej płyty, po przyłożeniu obciążenia znajdować się będą na odcinkach prostych do odkształconej powierzchni.

Równanie powierzchni ugięcia płyty po uwzględnieniu założeń Kirchhoffa oraz założeń upraszczających w równaniach odwrotnych uogólnionego prawa Hooke'a ($\sigma_z = 0$) przedstawia wzór 11:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q - (1 + \nu) \frac{D \alpha_t}{h} \nabla^2 \Delta T, \quad (11)$$

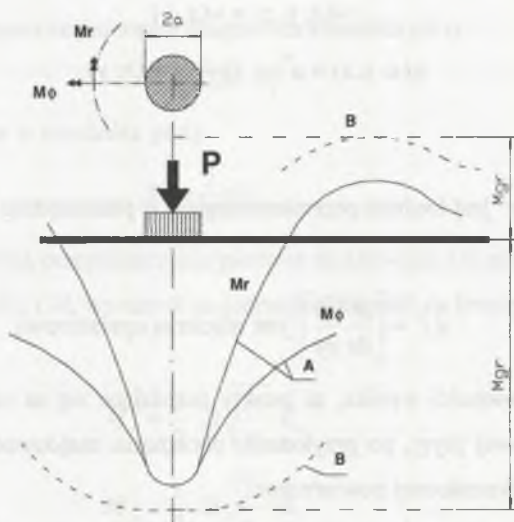
gdzie:

$$D = \frac{Eh^3}{(1 - \nu^2)} \quad \text{oznacza sztywność płyty na zginanie.}$$

Rozwiązanie równania (11) jest poprawne tylko w pewnym zakresie obciążeń. Chcąc wyznaczyć graniczną nośność płyty trzeba posłużyć się analizą sprężysto-plastyczną. Analityczne obliczenia płyt w zakresie sprężystym przeprowadzane są zgodnie z metodą linii załomów Johanssena [10]. Nośność graniczna płyty wyznaczana jest na podstawie analizy linii załomów, które stanowią rysy powstałe w miejscu działania największych naprężeń rozciągających. W obliczeniach rozpatruje się plastyczne obroty wokół tych linii ograniczonych nimi fragmentów płyty traktowanych jako elementy sztywne lub sprężyste (metoda kinematyczna) lub równania równowagi w momencie powstania załomów (metoda statycznej nośności granicznej).

4. Analiza sił wewnętrznych w płycie na sprężystym podłożu obciążonej siłą skupioną

Wykres momentów zginających w kolejnych fazach pracy płyty obciążonej siłą rozłożoną na powierzchni A przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Wykres momentów w płycie na podłożu sprężystym. Krzywe A i B przedstawiają wykres momentów zginających w stadium sprężystym pracy płyty i w momencie pojawienia się rys pod środkiem powierzchni obciążenia

Fig. 1. Moment distribution due to concentrated load in concrete slab on elastic foundation. Curves A and B show the moment distribution according to the elasticity theory and basically after the slab has passed into plastic stage under the loading center

Przy obciążeniu siłą skupioną o niewielkiej wartości płyta odkształca się w zakresie sprężystym. Maksymalny moment zginający M_0 powstaje na dolnej powierzchni płyty, pod środkiem przyłożonego obciążenia. W miarę zwiększania obciążenia rośnie również wartość momentu, aż do chwili, gdy wywołane nim naprężenia rozciągające na dolnej powierzchni płyty osiągną wartość równą wytrzymałości betonu na rozciąganie przy zginaniu. Wówczas zapoczątkowane zostają pierwsze rysy, o kierunkach promienistych i początku pod środkiem obciążenia. Wraz z powstaniem rys zmienia się także sztywność płyty. Dalsze zwiększanie obciążenia prowadzi do ich powiększania i dalszej zmiany sztywności. Równocześnie zwiększa się ujemna wartość momentu M_r , wywołująca naprężenia rozciągające na górnej powierzchni płyty. Zwiększają się one wraz ze wzrostem obciążenia do chwili, gdy przekroczą wartość wytrzymałości betonu na rozciąganie, co spowoduje pojawienie się rysy o kształcie kolistym na górnej powierzchni płyty, a to stanowi kryterium wyczerpania nośności płyty.

5. Metody wymiarowania posadzek na gruncie

Po uwzględnieniu warunków brzegowych płyty na jednoparametrowym podłożu sprężystym Winklera i pominięciu naprężeń termicznych, równanie przemieszczeń płyty przybiera postać:

$$D\nabla^2\nabla^2w + kw = q. \quad (12)$$

Po zdefiniowaniu tzw. promienia sztywności płytowej l jako:

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}, \quad (13)$$

równania te można przedstawić w postaci:

$$l^4\nabla^2\nabla^2w + w = \frac{q}{k}. \quad (14)$$

Odpowiednie równania oraz warunki brzegowe płyty na podłożu Własowa mają postać:

- w obszarze płyty:

$$D\nabla^4w - 2t\nabla^2w + kw = q, \quad (15)$$

- na powierzchni gruntu poza obszarem płyty, przy $z=0$:

$$-2t\nabla^2w + kw = 0, \quad (16)$$

- dla warstwy gruntu o miąższości H , znajdującej się na podłożu niepodatnym, w obszarze ograniczonym nierównością $0 < z < H$:

$$-m \frac{d^2\phi}{dz^2} + n\phi = 0. \quad (17)$$

Współczynniki $2t$ oraz k w powyższych równaniach wyrażają zależności (4a) i (4b), natomiast m i n opisane są jako:

$$m = \iint (\lambda + 2G)w^2 dx dy, \quad (18)$$

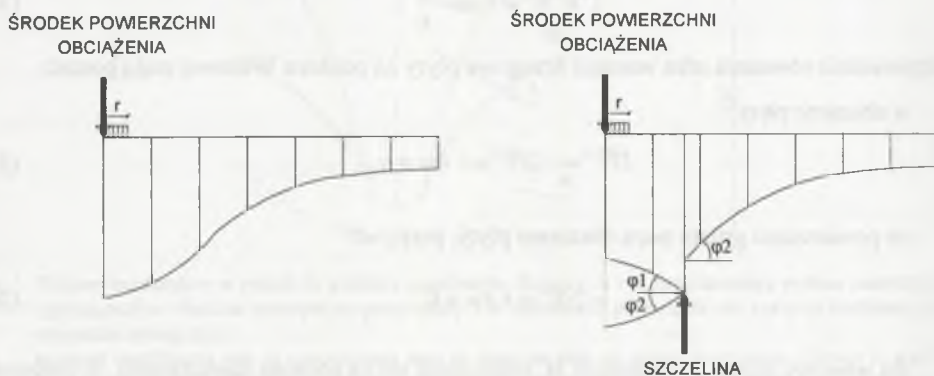
$$n = \iint G(\nabla w)^2 dx dy. \quad (19)$$

Analityczne metody wymiarowania płyt zgodnie z przedstawionymi założeniami można znaleźć w pracach [11, 12, 13, 14], natomiast rozwiązania numeryczne przedstawione zostały m.in. w pracach [9, 15, 16, 17 i 18]. Metody analizy plastycznej [12, 13, 14] pozwalają na zastosowanie wymiennie modelu podłoża Winklera lub półprzestrzeni sprężystej.

6. Wpływ szczelin technologicznych na nośność płyty – kierunek dalszych badań

W pracy [18] przedstawione zostały wyniki obliczeń nośności płyt, wykonanych przy użyciu różnych metod. Analiza wykazuje, że podstawowym czynnikiem określającym nośność płyty na gruncie przy obciążeniu siłą skupioną jest miejsce przyłożenia obciążenia. Wartość siły niszczącej przyłożonej do tej samej płyty w trzech punktach charakterystycznych, tj. w środku płyty, na krawędzi niezamocowanej oraz w narożniku układu się w stosunku $2,7 : 1,7 : 1,0$.

Badania przedstawione w pracy [19] wykazują znaczne różnice pomiędzy kształtem funkcji przemieszczeń płyty ciągłej i płyty ze szczeliną technologiczną lub skurczową (rys. 2)



Rys. 2. Kształt funkcji przemieszczeń: a) test na ciągłej powierzchni. b) w pobliżu szczeliny lub zarysowania
Fig. 2. Typical deflection bowl shapes: a) test on continuous surface. b) test across joint or crack

Połączenie krawędzi sąsiednich płyt, jak występuje w przypadku posadzek na gruncie, pozwala na znaczne podwyższenie nośności płyt obciążonych na krawędziach i narożnikach. Aktualnie brak jest metod pozwalających na wymiarowanie posadzek przy uwzględnieniu wpływu szczelin skurczowych i technologicznych na nośność płyty. Opracowanie metody umożliwiającej wymiarowanie posadzek z uwzględnieniem tych zależności jest jednym z celów pracy doktorskiej autora. W posadzkach betonowych o gęstym podziale dylatacjami technologicznymi może to stanowić kryterium określania nośności posadzki.

LITERATURA

1. Mierzwa J., Biliński W.: Kształtowanie i obliczanie posadzek przemysłowych, XV Ogólnopolska Konferencja WPPK, Ustroń, luty 2000, s. 197- 230.
2. Fiłonienko-Borodicz M.M.: Przybliżone teorie podłoża sprężystego, Uczyenije Zapiski Moskowskiego Gosudarstwiennogo Uniwersiteta, Miechanika nr 46, 1940, s. 3-8.
3. Kerr A.D. : Elastic and viscoelastic foundation models, Journal of Applied Mechanics, ASME, Nr 31, 1964, s. 491-498.
4. Pasternak P.L.: Nowe metody analizy dwuparametrowego podłoża sprężystego, Gosudarstwiennoje Izdatielstwo po Stroitelstvu i Architekturnie, Moskwa 1954.
5. Własow W.Z., Leontiew N.N.: Bałki, płyty i obołoczki na uprugom osonowanii, Fizmatgiz, Moskwa 1960.
6. Vallabhan C.V., Das Y.C.: Parametric study of beams on elastic foudations, Journal of Enineering Mechanics, ASCE, 114, 1988, s. 2072 – 2082.
7. Vallabhan C.V., Straughan W.T., Das Y.C.: Refined model for analysis of plates on elastic foudations, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 117, 1991, s. 2830 – 2844.
8. Vallabhan C.V., Daloglu A.T.: Consistent FEM – Vlasov model for plates on layered soil, Journal of Structural Eng., ASCE, Nr 125, 1999, s. 108-113.
9. Gorbunow – Posadow M. I.: Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym, Wyd. Budownictwo i Architektura, tłumaczenie z jęz. rosyjskiego, Warszawa 1956.
10. Johansen K.W.: Yield –Line theory, William Clowes and Sons, London 1962.
11. Westergaard H.M.: New formulas for stresses in concrete pavements of airfields, Transactions ASCE, Nr 113, 1947, s. 425 – 444.
12. Meyerhoff G.G.: Load carrying capacity of concrete pavements, J. of Soil Mech. and Found. Division, ASCE, Nr 88, 1962, s.89 – 116.
13. Loseberg A.: Pavements and slabs on grade with structurally active reinforcement, ACI Journal, Nr 75, 1978, s. 647 – 657.
14. Baumann R.A., Weisgerber F.E.: Yield line analysis of slabs on grade, Journal of Structural Engineering, ASCE, Nr109, 1983, s. 1553 – 1568.
15. Shentu L., Jiang D., Hzu C.T.: Load-carrying capacity for concrete slabs on grade; Journal of Structural Engineering, ASCE, Nr 123, 1997, s. 95-101.
16. Barros J.A.O., Figueiras J.A.: Model for the analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade, Computers & Structures, Nr 79, 2001, s. 97-106.

17. Lewandowski R., Świtka R.: Współpraca płyty z podłożem sprężysto-plastycznym jako zadanie kontaktowe z więzami jednostronnymi, IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice, Kraków 1989, s. 679 – 685.
18. Janowski Z., Strzeszyński J.: Konstrukcja posadzek z betonu na gruncie, Problemy naukowo badawcze konstrukcji z betonu, Politechnika Krakowska, Monografia 247, Kraków 1999, s. 205 – 219.
19. Chan W.K.F., Evans A.R.: Assessing concrete pavements with the falling weight deflectometer, Concrete, Nov/Dec 1994, s. 14 – 16.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wacław Szcześniak

Abstract

Concrete floor slabs on grade are usually modelled as plates on elastic foundation. The soil is analyzed using Winkler model or Boussinesq equations, assuming that the soil is semiinfinite isotropic and homogenous medium. Analytical methods of design utilize elastic analysis, or limit capacity considerations for slab. Three cases of loading are regarded: central load, edge load and corner load. As the joints influence the ultimate bearing capacity of reinforced concrete slabs, this influence is assumed to be the main criterion of design of concrete floors.