

Krzysztof ŚLIWKA\*  
Politechnika Szczecińska

## WPLYW SPRĘŻENIA CIĘGNA ZEWNĘTRZNEGO NA UGIĘCIA I NAPRĘŻENIA DWUTRAPEZOWYCH DŹWIGARÓW Z DREWNA I PŁYT PILŚNIOWYCH O PRZEKROJU SKRZYNKOWYM

**Streszczenie.** W referacie wyprowadzono wzory na naprężenia normalne i ugięcia dwutrapezowych dźwigarów o przekroju skrzynekowym (z pasami z drewna i ściankami z płyt pilśniowych) wywołane wstępnym sprężeniem poprzez układ zewnętrznych cięgien stalowych. Wzory wyprowadzono metodami wariacyjnymi opierając się na funkcjale Lagrange'a. Przeprowadzono analizę porównawczą wielkości naprężeń i ugięć dźwigarów uzyskanych na drodze teoretycznej i badań doświadczalnych.

## EFFECT OF THE STRING'S COMPRESSION ON THE DEFLECTION AND STRESS OF THE BITRAPEZE GIRDERS OF THE BOX CONSTRUCTED OF WOOD AND FIBREBOARD

**Summary.** The formulae were derived in the lecture the for the calculation of the normal stresses and deflections of the bitrapeze girders (with wooden flanges and fibreboard sheeting) induced by precompression through the outer steel strings. The formulae were derived by the variational methods basing on the Lagrange's functional. Comparative analysis of the stress value and deflection of a girder calculated theoretically and obtained experimentally has been performed.

### 1. Wprowadzenie

We współczesnych konstrukcjach drewnianych dąży się w coraz większym stopniu do zastępowania drewna naturalnego czy klejonego warstwowo tworzywami zamiennymi, najczęściej materiałami drewnopochodnymi takimi, jak sklejka, płyty wiórowe o ukierunkowanych włóknach OSB, twardymi i bardzo twardymi płytami pilśniowymi, płytami MDF i innymi. Należy przy tym jednak pamiętać, że materiały te charakteryzują się mniej korzystnymi parametrami sprężysto-wytrzymałościowymi, co powoduje, że należy je stosować w mniej wyjątkowych strefach przekroju poprzecznego.

---

\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Mielczarek.

Dalszym kierunkiem prac badawczych jest dążenie do zmniejszenia zużycia drewna naturalnego poprzez tworzenie konstrukcji zespolonych, stosując np. stalowe pręty wzmacniające umieszczone na zewnątrz, czy wklejane do konstrukcji. Na zużycie drewna można również wpływać poprzez kształtowanie geometryczne, np. stosując belki o zmiennym na długości przekroju dostosowanym do obwiedni momentów zginających, czy innych parametrów wpływających na ostateczne wymiary elementów konstrukcyjnych.

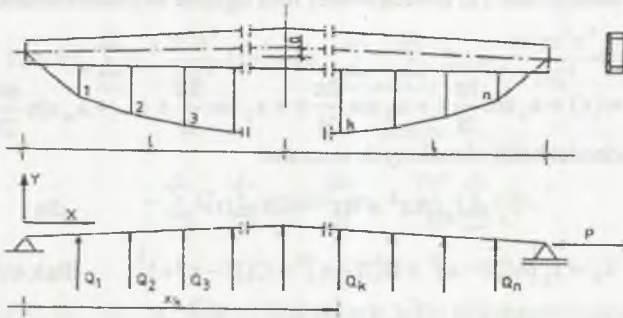
W pracy tej omówiono wyniki badań dźwigarów o przekroju skrzynkowym zmiennym na długości o kształcie trapezowym dwuspadowym. Pasy przekrojów skrzynkowych zostały wykonane z drewna jednolitego, a ścianki z twardych płyt pilśniowych. Dźwigary zostały wzmocnione układem zewnętrznych cięgien stalowych z dwoma słupkami.

## 2. Cel i program pracy

Bezpośrednim celem pracy było określenie na drodze teoretycznej wpływu sprężenia montażowego cięgna na wielkość naprężeń i odkształceń dźwigara, a następnie dokonanie weryfikacji doświadczalnej wyprowadzonych wzorów. Wykonując tego typu konstrukcje wprowadza się bowiem wstępne sprężenie konstrukcji, które powoduje, że w gotowym, ale jeszcze nie obciążonym dźwigarze występują naprężenia wewnętrzne, które zmieniają rozkład i wielkość naprężeń powstałych na skutek obciążenia dźwigara. Istnieje zatem potrzeba poznania rzeczywistego rozkładu naprężeń normalnych w przekrojach dźwigara oraz jego deformacji, wywołanych wstępnym, nawet niewielkim, sprężeniem.

## 3. Wyprowadzenie wzorów teoretycznych z twierdzenia Lagrange'a

W fazie sprężania dźwigar pracuje jako belka wolnopodparta obciążona siłą wywołującą ściskanie z wybożeniem oraz siłami poprzecznymi przekazywanymi przez słupki powodującymi zginanie. Jest to przypadek statycznie wyznaczalny. Znakając siłę ściskającą w dowolnym przedziale cięgna można z równań równowagi węzłów (miejsc połączeń cięgna ze słupkami) obliczyć pozostałe wartości sił w słupkach oraz siłę ściskającą belkę. Schemat analizowanego ustroju przedstawia rys.1.



Rys. 1.  
Fig. 1.

Obliczenia wykonano metodami wariacyjnymi opierając się na funkcjale Lagrange'a, który dla analizowanego przypadku ma postać

$$\Pi = \iiint_V \Phi dV - \iint_{A_k} q_w w dA \quad (1)$$

Pierwszy człon wzoru (1) określa energię potencjalną układu, drugi pracę sił zewnętrznych.

Po przekształceniach funkcjonał ma postać:

$$\Pi = \int_0^{2l} \frac{EJ_y}{2} [w''(x)]^2 dx - \sum_k Q_k w(x_k) - \int_0^{2l} \frac{P}{2} [w'(x)]^2 dx \quad (2)$$

w którym pierwsze wyrażenie, jak i we wzorze (1), określa energię potencjalną układu

$\iiint_V \Phi dV$ , która przy uwzględnieniu naprężeń  $\sigma_x$  od zginania [3] [4] oraz po podstawieniu

$M(x) = EJ_y w''(x)$  ma postać:

$$\iiint_V \Phi dV = \iiint_V \frac{1}{2E} \sigma_x^2 dV = \iiint_V \frac{1}{2E} \left[ \frac{M(x)}{J_y} z \right]^2 dV = \int_0^{2l} \frac{EJ_y}{2} [w''(x)]^2 dx \quad (3)$$

Drugi człon wzoru (2) określa pracę sił poprzecznych (od sił skupionych)

$$L_1 = \sum_k Q_k w(x_k) \quad (4)$$

trzeci pracę siły podłużnej

$$L_2 = \int_0^{2l} \frac{P}{2} [w'(x)]^2 dx \quad (5)$$

Siły  $Q_k = f(S)$  i  $P = f(S)$  wyrażamy w funkcji siły sprężającej w cięgnię S wg rys.1.

Po podstawieniu do funkcjonału (2) poszukiwanej linii ugięcia w postaci sinusowego szeregu funkcyjnego

$$w(x) = a_1 \sin \frac{1\pi}{2l} x + a_2 \sin \frac{2\pi}{2l} x + a_3 \sin \frac{3\pi}{2l} x + \dots + a_n \sin \frac{n\pi}{2l} x \quad (6)$$

i momentów bezwładności belki określonych wzorami

$$J_y = J_p (Ax^3 + Bx^2 + Cx + 1) \quad \text{dla } x \in (0, l) \quad (7)$$

$$J_y = J_p [A(2l-x)^3 + B(2l-x)^2 + C(2l-x) + 1] \quad \text{dla } x \in (l, 2l) \quad (8)$$

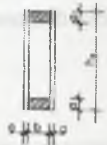
gdzie:

$$J_p = \frac{2gh_p^3 E_s}{12 E_d} + 2 \left[ \frac{ba^3}{12} + ab \left( \frac{h_p}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$A = \frac{g E_s}{6 E_d} \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{1}{J_p} \quad (10)$$

$$B = \left( \frac{g E_s}{6 E_d} 3h_p \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} ab \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{1}{J_p} \quad (11)$$

$$C = \left( \frac{g E_s}{6 E_d} 3h_p^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + abh_p \operatorname{tg} \alpha - a^2 b \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{1}{J_p} \quad (12)$$



Rys. 2.  
Fig. 2.

$E_d$  - moduł sprężystości drewna,  $E_s$  - moduł sprężystości materiału drewnopochodnego  
 $h_p$  - wysokość dźwigara na podporze,  $\alpha$  - kąt pochylenia pasa górnego

oraz przyjmując, że funkcja  $f(n)$  wyraża się wzorem

$$f(n) = \frac{1}{2} [(-1)^{n+1} f^n(n) + f^n(n)] + \frac{1}{2} [(-1)^n f^p(n) + f^p(n)] \quad (13)$$

w którym

$$f^n(n) = l \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{Cl}{4} + \frac{Bl^2}{6} + \frac{Al^3}{8} \right) + \left( \frac{Cl}{\pi^2} + \frac{Bl^2}{\pi^2} + \frac{3Al^3}{2\pi^2} \right) \frac{1}{n^2} - \frac{6Al^3}{\pi^4} \frac{1}{n^4} \right] \quad (14)$$

$$f^p(n) = l \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{Cl}{4} + \frac{Bl^2}{6} + \frac{Al^3}{8} \right) - \left( \frac{Bl^2}{\pi^2} + \frac{3Al^3}{2\pi^2} \right) \frac{1}{n^2} \right] \quad (15)$$

a funkcja  $f(n,m)$  wzorem

$$f(n,m) = \frac{4l^2}{(n+m)^2 \pi^2} \left[ (-1)^{\frac{n+m}{2}} (3Al^2 + 2Bl + C) - C \right] - \frac{4l^2}{(n-m)^2 \pi^2} \left[ (-1)^{\frac{n-m}{2}} (3Al^2 + 2Bl + C) \right] - \frac{16l^4}{(n+m)^4 \pi^4} \left[ (-1)^{\frac{n+m}{2}} 6A - 6A \right] + \frac{16l^4}{(n-m)^4 \pi^4} \left[ (-1)^{\frac{n-m}{2}} 6A - 6A \right] \quad (16)$$

gdzie:  $m, n$  numery współczynników funkcji linii ugięcia

otrzymujemy funkcjonal w postaci

$$\begin{aligned} \Pi = EJ_p \sum_{n=1}^n a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{16l^4} f(n) + EJ_p \sum_{n=1,2,3}^n \sum_{m=1,2,3}^m 2a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{16l^4} f(n, m) - \\ n \neq m \\ - \sum_{k=1}^k Q_k \sum_{n=1}^n a_n \sin \frac{n\pi}{2l} x_k - \frac{P\pi^2}{8l} \sum_{n=1}^n n^2 a_n^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$Q_k, x_k, P$  wg rys. 1.

Współczynniki  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n$  funkcji linii ugięcia belki obliczamy metodą Ritz'a z równań

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi}{\delta a_j} = EJ_p \frac{j^4 \pi^4}{16l^4} f(j) 2a_j + EJ_p \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ i \neq j}}^n 2a_i \frac{j^2 i^2 \pi^4}{16l^4} f(j, i) - \sum_{k=1}^k Q_k \sin \frac{j\pi}{2l} x_k - \\ - \frac{P\pi^2}{8l} j^2 2a_j = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

W ten sposób możemy ułożyć  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi, z których wyznaczamy poszczególne wartości  $a_j$ .

W zapisie macierzowym układ równań ma postać

$$[\mathbf{A}][\mathbf{a}] = [\mathbf{A}_w] \quad (20)$$

gdzie  $[\mathbf{A}]$  jest macierzą współczynników występujących przy poszczególnych amplitudach  $a_j$  funkcji linii ugięcia,  $[\mathbf{a}]$  macierzą amplitud  $a_j$ ,  $[\mathbf{A}_w]$  macierzą wyrazów wolnych. Znając linię ugięcia belki możemy obliczyć momenty zginające w dowolnym przekroju belki. Znając momenty zginające oraz siłę normalną w belce możemy określić naprężenia normalne w belce. Wyrażając siły poprzeczne  $Q_k$ ; siłę podłużną  $P$  w funkcji siły sprężającej  $S$  w cięgnię ukośnym, wyprowadzono wzory na maksymalne naprężenie normalne  $f(S)$  w drewnie i w płycie pilśniowej oraz ugięcie  $y(S)$  w przekroju położonym w środku rozpiętości belki:

- naprężenia w drewnie w MPa,  $S$  w kN

$$f(S) = 9.58 \frac{S}{137} + 392.526 \frac{S}{932.090 - S} \quad (21)$$

- naprężenia w płycie pilśniowej w MPa,  $S$  w kN

$$f(S) = 9.58 \frac{S}{616} + 87.228 \frac{S}{932.090 - S} \quad (22)$$

- ugięcie w cm,  $S$  w kN

$$y(S) = 69.237 \frac{S}{932.090 - S} \quad (23)$$



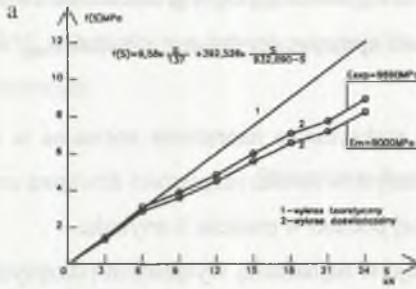
Rys. 3.  
Fig. 3.

#### 4. Badania doświadczalne

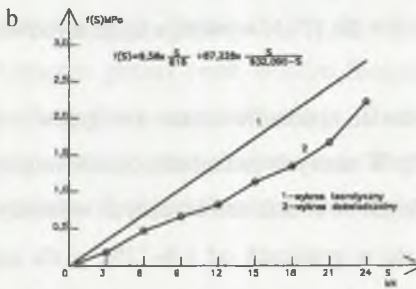
Badaniom poddano dźwigar klejony o przekroju skrzynkowym zmiennym na długości o pasach z drewna i ściankach z płyt pilśniowych twardych. Geometria ustroju i wymiary przekroju poprzecznego dźwigara podano na rys. 3. Dźwigar został wzmocniony cięgnem stalowym, przekazującym obciążenie za pośrednictwem dwóch słupków. Naprężenie cięgna wywoływano poprzez dokręcanie nakrętek umieszczonych przy czole dźwigara. Wielkość siły kontrolowano za pomocą tensometrów elektrooporowych połączonych z mostkiem typu Hottingera. Ugięcia dźwigara mierzone były za pomocą czujników zegarowych o dokładności 1/100 mm, a deformacje liniowe za pomocą czujników tensometrycznych typu Mayes Demec przykładanych do czopików naklejonych w środku rozpiętości dźwigara.

Poniżej podano wykresy zależności pomiędzy maksymalnymi naprężeniami w drewnie i w płycie pilśniowej oraz ugięciem belki w środku rozpiętości a siłą sprężającą w cięgnie ukośnym.

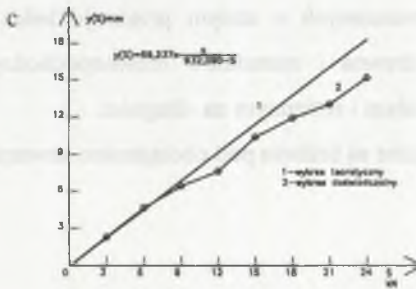
Na rysunku 4a podano 2 wykresy zależności pomiędzy naprężeniami w drewnie a siłą sprężającą wynikające z badań doświadczalnych. Jeden przy przyjęciu normowego modułu sprężystości drewna  $E_m$ , drugi  $E_{exp}$  przy przyjęciu modułu sprężystości uzyskanego z badań pasów przekroju wykonanych przed zespoleniem belki. Ponieważ przy sile  $S = 22,90$  kN stal wchodzi w obszar plastyczny, to w badaniach doświadczalnych obszar powyżej tej wielkości pominięto, gdyż wprowadzenie większej siły prowadziłoby do rozerwania pręta lub zniszczenia belki w wyniku zbyt dużego naciągu i spowodowanego tym naprężenia w drewnie przekraczającego dopuszczalne wytrzymałości obliczeniowe tego materiału. Stąd wykresy na rys. 4a,b,c obejmują tylko zakres naciągu cięgna do 24 kN.



Teoretyczny i doświadczalny wykres zależności pomiędzy siłą sprężającą, a maksymalnymi naprężeniami normalnymi  $f(S)$  w drewnie w przekroju położonym w środku rozpiętości belki



Teoretyczny i doświadczalny wykres zależności pomiędzy siłą sprężającą, a maksymalnymi naprężeniami normalnymi  $f(S)$  w płycie pilśniowej w przekroju położonym w środku rozpiętości belki



Teoretyczny i doświadczalny wykres zależności pomiędzy siłą sprężającą, a ugięciem belki w środku rozpiętości belki

Rys. 4.  
Fig. 4.

## 5. Wnioski

Na podstawie zrealizowanej pracy można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Wartości ugięć w środku rozpiętości dźwigara uzyskane z obliczeń teoretycznych i badań doświadczalnych różnią się średnio o 10%. Różnice zawierają się w granicach od 3÷19%.
2. Wartości naprężeń w drewnie w przekroju położonym w środku rozpiętości belki uzyskane z obliczeń teoretycznych i badań doświadczalnych przy przyjęciu normowej wartości

modułu sprężystości drewna  $E_m$  zawierają się w granicach od  $2\pm 32\%$  i różnią się średnio o 20%, przy przyjęciu modułu sprężystości drewna z badań  $E_{exp}$  w granicach od  $2\pm 27\%$  i różnią się średnio o 16%.

3. Wyprowadzone wzory na maksymalne naprężenie normalne w drewnie i w płycie pilśniowej w przekroju położonym w środku rozpiętości dźwigara oraz ugięcie w zależności od wielkości siły sprężającej podano w punkcie 3 artykułu.
4. Siła  $S = 22,90$  kN wywołuje w najbardziej wyteżonym (skrajnym) włóknie pasa w przekroju położonym w środku rozpiętości dźwigara, naprężenie równe wytrzymałości obliczeniowej drewna na ściskanie ( $R_{dc} = 11,5$  MPa).
5. Siła sprężająca o wielkości  $S = 26,17$  kN wywołuje ugięcie (odwrotnego znaku) o wielkości  $l/300$ .
6. Uzyskane wyniki są zbliżone do rezultatów badań dźwigarów o analogicznej konstrukcji ze ściankami ze sklejki [2]. W tamtych badaniach różnice między wielkościami uzyskanymi z badań doświadczalnych i obliczeń teoretycznych wynosiły odpowiednio dla ugięć średnio 4,6% i zawierały się w granicach od  $1,6\pm 13\%$ , a dla naprężeń w drewnie przy module sprężystości z badań średnio 14% i w granicach od  $6\pm 23\%$ .
7. Wyprowadzone wzory teoretyczne odniesione do konstrukcji drewnianych pozwalają na analizę statyczną belek drewnianych o stałym przekroju, belek drewnianych o zmiennym przekroju, belek z drewna i materiałów drewnopochodnych o przekroju skrzynkowym lub dwuteowym stałym i zmiennym na długości.
8. W chwili obecnej prowadzone są badania pod obciążeniem zewnętrznym.

## LITERATURA

1. Mielczarek Z.: Budownictwo drewniane. Arkady, Warszawa 1994.
2. Mielczarek Z. Śliwka K. Analiza stanu naprężeń i odkształceń dźwigarów o zmiennym przekroju zespolonych z drewna i sklejki sprężonych układem zewnętrznych cięgien stalowych. Budownictwo i Inżynieria Środowiska. Międzynarodowa V Konferencja Naukowa – Rzeszów 2000.
3. Piechnik S.: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa - Kraków 1978.



4. Timoshenko S.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
5. Norma PN-81/B-03150. Konstrukcje z drewna i materiałów drewnopochodnych. Obliczenia statyczne i projektowanie.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Romuald Świtka

### Abstract

The formulae were derived in the lecture the for the calculation of the normal stresses and deflections of the bitrapeze girders (with wooden flanges and fibreboard sheeting) induced by precompression through the outer steel strings. The formulae were derived by the variational methods basing on the Lagrange's functional. Comparative analysis of the stress value and deflection of a girder calculated theoretically and obtained experimentally has been performed.