

Kazimierz GIERLOTKA

UPROSZCZONA METODA UWZGLĘDNIANIA ZJAWISK PRZESTRZENNYCH W ELEMENTE SPRĘŻYSTYM W SYNTIEZIE UKŁADÓW STEROWANIA NAPĘDÓW Z POŁĄCZENIAMI SPRĘŻYSTYMI

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę syntezy układu regulacji napędów z połączeniami sprężystymi. Zastosowano model Rayleigh'a układu sprężystego, który w sposób uproszczony uwzględnia zjawiska przestrzenne w elemencie sprężystym. Dokonano oceny dokładności odwzorowania przebiegów przez model Rayleigh'a układu sprężystego.

A SIMPLIFIED METHOD OF CONSIDERATION OF THE SPATIAL PHENOMENA IN ELASTIC ELEMENT AT SYNTHESIS OF THE CONTROL SYSTEMS OF THE DRIVES WITH ELASTIC JOINTS

Summary. A method for synthesis of the control system of the drives with elastic joints has been presented in the paper. Rayleigh's model of the system with elastic joint, which approximates the spatial phenomena in flexible element, has been applied. The accuracy of the transients representation by the Rayleigh's model of elastic system has been evaluated.

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД УЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭФФЕКТОВ В УПРУГОМ ЭЛЕМЕНТЕ В СИНТЕЗЕ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

Резюме. В статье представлен метод синтеза системы регулирования электроприводов с упругими связями. Применяется модель Рейля упругой системы, которая, с упрощением, учитывает пространственные эффекты в упругом элементе. Сделана оценка точности модели Рейля.

1. WPROWADZENIE

Charakterystyczną cechą niektórych układów napędowych jest występowanie w ich obwodach mechanicznych elementów elastycznych, podlegających pod wpływem występujących sił odkształceniom sprężystym. Rzeczywiste elementy sprężyste są układami o parametrach rozłożonych, których drgania opisane są równaniem falowym. W syntezie układów sterowania stosuje się z reguły modele uproszczone układu sprężystego, pomijające całkowicie zjawiska przestrzenne w elemencie sprężystym [2], [3], [6], [7], [9]. Otrzymane na ich podstawie zależności na dobór parametrów układu sterowania przydatne są do ograniczonej klasy napędów, w których moment bezwładności elementu sprężystego jest mały w porównaniu z momentami bezwładności mas skupionych na jego końcach. Przydatność modeli dynamicznych układów sprężystych uwzględniających w pełni zjawiska przestrzenne w elemencie sprężystym, opartych o opis drgań układu za pomocą równania falowego, jest dla celów syntezy układu sterowania napędu z połączeniem sprężystym niewielka ze względu na złożoność i uciążliwość obliczeń [8]. Powstaje stąd zagadnienie poszukiwania i stosowania modeli, które z jednej strony opisywałyby z odpowiednią dokładnością właściwości dynamiczne szerszej klasy układów z elementami sprężystymi, a z drugiej umożliwiały rozwiązanie określonego problemu. Warunki te spełnia tzw. model Rayleigh'a układu sprężystego [2], [4], w którym uwzględnia się ciągły rozkład parametrów wzdłuż długości elementu sprężystego, lecz z góry zakłada rozkład odkształceń.

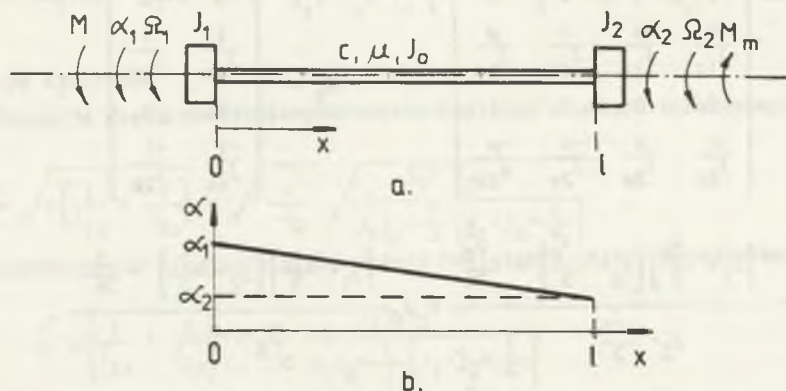
2. MODEL RAYLEIGH'A UKŁADU Z ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM

Analizowany układ składa się ze skupionych mas o momentach bezwładności względem osi obrotu J_1 i J_2 połączonych sprężystym wałem o momencie bezwładności J_0 , współczynniku sztywności c współczynnikiem tłumienia wewnętrznego μ oraz długości l (rys.1).

Przyjmując założenia upraszczające:

1. element sprężysty jest jednorodny i liniowy (podlega prawu Hooke'a),
2. element sprężysty rozważa się jako układ jednowymiarowy,
3. parametry układu mechanicznego są stałe w czasie

oraz zakładając liniowy charakter deformacji elementu sprężystego (rys.1.b),



Rys.1. Model układu z elementem sprężystym (a) i założony rozkład odkształceń (b)

Fig.1. Model of the system with elastic element (a) and assumed strain distribution (b)

$$\alpha(x, t) = \alpha_1(t) + \frac{\alpha_2(t) - \alpha_1(t)}{l} x \quad (1)$$

gdzie $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha(x, t)$ oznaczają przemieszczenia kątowe odpowiednio początku i końca wału oraz przekroju wału odległego o x od jego początku,

otrzymuje się po przekształceniach równanie stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_R \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

w którym oznaczono:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & \Omega_1(t) & \alpha_2(t) & \Omega_2(t) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} M(t) & M_m(t) \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-c}{J_{1z}} & \frac{-\mu}{J_{1z}} & \frac{c}{J_{1z}} & \frac{\mu}{J_{1z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{J_{2z}} & \frac{\mu}{J_{2z}} & \frac{-c}{J_{2z}} & \frac{-\mu}{J_{2z}} \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{1k}} & \frac{1}{J_{sk}} \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{J_{sk}} & \frac{-1}{J_{2k}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$J_{1z} = \frac{\left(j_1 + \frac{J_0}{3}\right)\left(j_2 + \frac{J_0}{3}\right) - \frac{J_0^2}{36}}{j_2 + \frac{J_0}{2}} = J_0 \frac{\left(j_1 + \frac{1}{3}\right)\left(j_2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36}}{j_2 + \frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$J_{2z} = \frac{\left(j_1 + \frac{J_0}{3}\right)\left(j_2 + \frac{J_0}{3}\right) - \frac{J_0^2}{36}}{j_1 + \frac{J_0}{2}} = J_0 \frac{\left(j_1 + \frac{1}{3}\right)\left(j_2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36}}{j_1 + \frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$J_{1k} = \frac{\left(j_1 + \frac{J_0}{3}\right)\left(j_2 + \frac{J_0}{3}\right) - \frac{J_0^2}{36}}{j_2 + \frac{J_0}{3}} = J_0 \frac{\left(j_1 + \frac{1}{3}\right)\left(j_2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36}}{j_2 + \frac{1}{3}} \quad (8)$$

$$J_{2k} = \frac{\left(j_1 + \frac{J_0}{3}\right)\left(j_2 + \frac{J_0}{3}\right) - \frac{J_0^2}{36}}{j_1 + \frac{J_0}{3}} = J_0 \frac{\left(j_1 + \frac{1}{3}\right)\left(j_2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36}}{j_1 + \frac{1}{3}} \quad (9)$$

$$J_{sk} = \frac{6 \left[\left(j_1 + \frac{J_0}{3}\right)\left(j_2 + \frac{J_0}{3}\right) - \frac{J_0^2}{36} \right]}{J_0} = J_0 \left[\left(j_1 + \frac{1}{3}\right)\left(j_2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36} \right] \quad (10)$$

$$j_1 = \frac{J_1}{J_0}, \quad j_2 = \frac{J_2}{J_0} \quad (11)$$

Ω_1, Ω_2 - prędkość kątowa początku i końca wału.

M, M_m - momenty obciążenia na początku i końcu wału.

Dla skokowej zmiany momentu $M(t)=M_1(t)$ oraz $M_m = 0$ przebieg kąta skręcenia ϕ wału opisany jest równaniem:

$$\phi(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = \frac{M}{c} \frac{J_2 + 0.5J_0}{J_1 + J_2 + J_0} \left[1 - e^{-\zeta t} \left(\cos \Omega_{et} t + \frac{\zeta}{\Omega_{et}} \sin \Omega_{et} t \right) \right] \quad (12)$$

w którym oznaczono:

- pulsację drgań nietłumionych modelu Rayleigh'a układu sprężystego:

$$\Omega_e = \sqrt{c \left(\frac{1}{J_{1z}} + \frac{1}{J_{2z}} \right)} = \sqrt{\frac{c}{J_0}} \sqrt{\frac{J_1 + J_2 + 1}{J_1 J_2 + \frac{1}{3} \left(J_1 + J_2 + \frac{1}{4} \right)}} \quad (13)$$

- współczynnik tłumienia drgań modelu Rayleigh'a układu sprężystego:

$$\zeta = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{1}{J_{1z}} + \frac{1}{J_{2z}} \right) = \frac{\mu}{2J_0} \frac{J_1 + J_2 + 1}{J_1 J_2 + \frac{1}{3} \left(J_1 + J_2 + \frac{1}{4} \right)} \quad (14)$$

- pulsację drgań tłumionych modelu Rayleigh'a układu sprężystego:

$$\Omega_{et} = \sqrt{\Omega_e^2 - \zeta^2} \quad (15)$$

3. PORÓWNANIE MODELU RAYLEIGH'A UKŁADU SPRĘŻYSTEGO Z MODELEM OPISANYM RÓWNIANIEM FALOWYM I MODELEM Z BEZINERCYJNYM ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM

Opisując układ przedstawiony na rys.1 równaniem falowym otrzymuje się dla $\mu = 0$ i skokowej zmiany momentu $M(t) = M_1(t)$ oraz $M_m(t) = 0$ zależność dla składowej oscylacyjnej kąta skręcenia ϕ w postaci sumy rozwiązań szczególnych [5]:

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4M}{cH_k b_k} \left(1 - \cos b_k + j_1 b_k \sin b_k \right) \left(1 - \cos \Omega_{ek} t \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x, t) \quad (16)$$

gdzie:

$$H_k = 2b_k \left(1 + j_1 b_k^2 \right) - \left(1 - j_1^2 b_k^2 \right) \sin 2b_k + 2b_k j_1 \left(1 - \cos 2b_k \right) \quad (17)$$

Wartości własne b_k drgań wału są pierwiastkami równania częstości [5]:

$$\operatorname{tg} b = \frac{b(J_1 + J_2)}{J_1 J_2 b^2 - 1} \quad (18)$$

K-ta wartość własna b_k określa k-tą pulsację drgań własnych układu Ω_{ek} :

$$\Omega_{ek} = b_k \sqrt{\frac{c}{J_0}} \quad (19)$$

Dla powszechnie stosowanego w analizie i syntezie układów sterowania napędów z połączeniami sprężystymi modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym (w przypadku dołączenia momentu bezwładności elementu sprężystego J_0 po połowie do momentów bezwładności J_1 i J_2), przebieg kąta skręcenia opisany jest zależnością identyczną jak dla modelu Rayleigh'a, a pulsacja drgań własnych nietłumionych układu jest równa:

$$\Omega_e = \sqrt{\frac{c}{J_0}} \sqrt{\frac{J_1 + J_2 + 1}{\left(J_1 + \frac{1}{2}\right)\left(J_2 + \frac{1}{2}\right)}} \quad (20)$$

Przyjmując model układu napędowego z połączeniem sprężystym opisany równaniem falowym jako wzorcowy, należy przy ocenie dokładności modeli uproszczonych brać pod uwagę następujące czynniki:

- modele uproszczone dla dwóch stopni swobody uwzględniają tylko pierwszą postać drgań własnych układu; należy więc ocenić w jakich przypadkach pominięcie wyższych postaci drgań własnych jest dopuszczalne,
- jako miarę dokładności modeli uproszczonych układu z elementem sprężystym przyjęto błąd amplitudy i pulsacji drgań własnych tych modeli w stosunku do amplitudy i pulsacji pierwszej postaci drgań własnych modelu opisanego równaniem falowym.

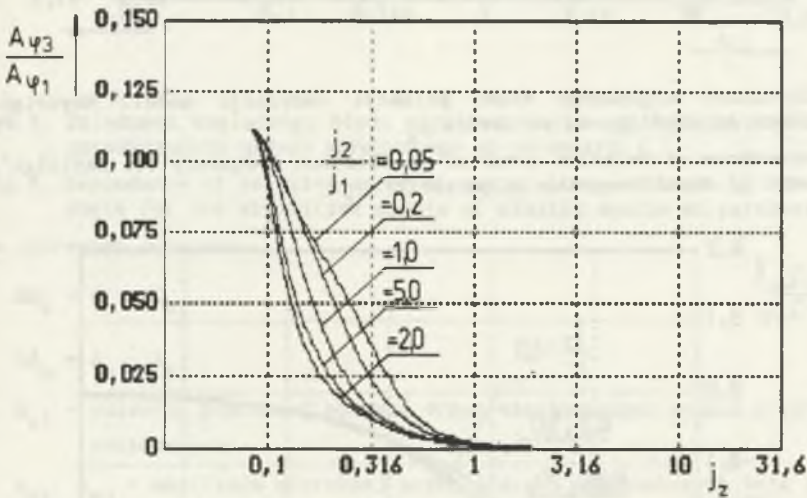
Jako wielkość charakteryzująca rozkład masy układu mechanicznego przyjmujemy parametr j_z określony zależnością:

$$j_z = \frac{1}{J_0 \left(\frac{1}{J_{1z}} + \frac{1}{J_{2z}} \right)} \quad (21)$$

(Dla pomijalnie małej wartości momentu bezwładności elementy sprężystego parametr $j_z \rightarrow \infty$, a dla $J_1=J_2=0$ przyjmuje wartość $j_z=1/12$)

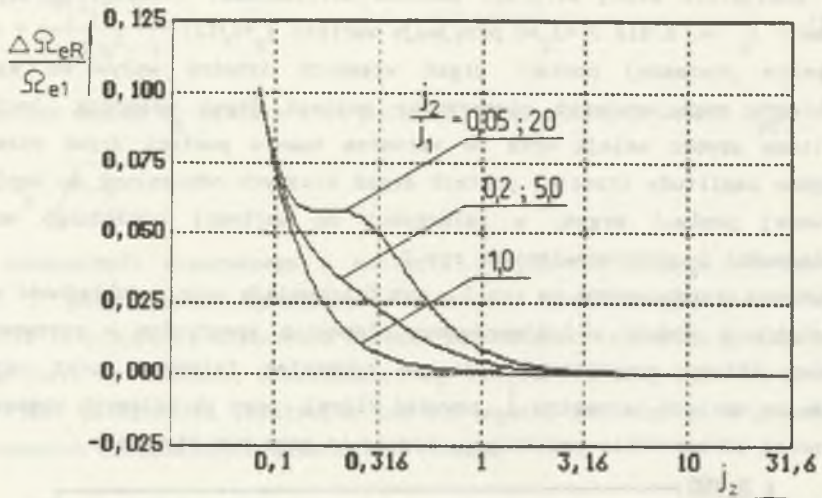
Oprócz pierwszej postaci drgań własnych istotny wpływ na kształt przebiegów mogą wywierać nieparzyste postaci drgań własnych, lecz ich amplitudy szybko maleją wraz ze wzrostem numeru postaci drgań własnych. Względne amplitudy trzeciej postaci drgań własnych odniesione do amplitudy pierwszej postaci drgań, w zależności od wartości względnego momentu bezwładności j_z przedstawiono na rys.2.

Wykresy przedstawione na rys.3 - rys.5 pozwalają ocenić dokładność modelu Rayleigh'a i modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym w porównaniu z modelem układu sprężystego opisanym równaniem falowym oraz określić minimalną wartość parametru j_z powyżej której, przy określonych wymaganiach wierności odwzorowania przebiegów, modele te mogą być stosowane.



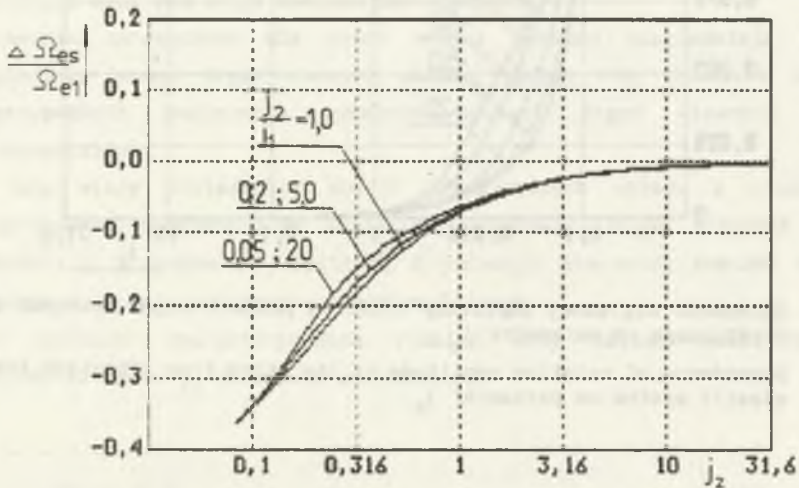
Rys.2. Zależność względnej amplitudy trzeciej postaci drgań własnych układu sprężystego od parametru j_z

Fig.2. Dependence of relative amplitude of the third free vibration form of elastic system on parameter j_z



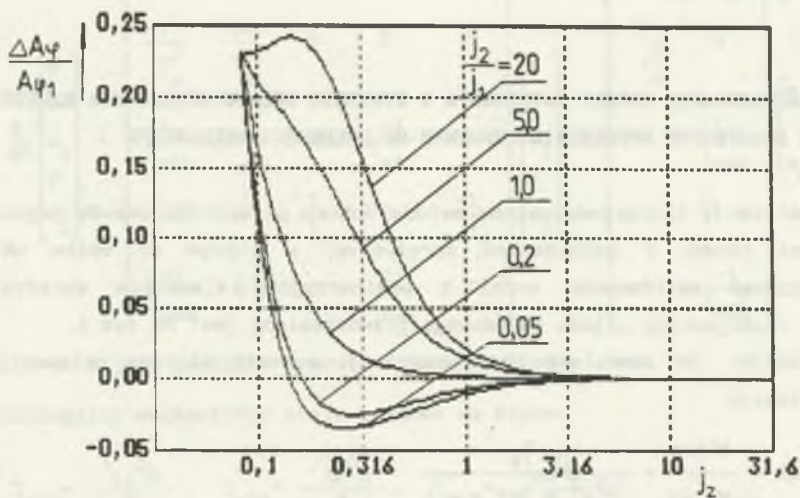
Rys. 3. Zależność względnego błędu pulsacji oscylacji modelu Rayleigh'a układu sprężystego od parametru j_z

Fig. 3. Dependence of relative error of oscillation frequency for Rayleigh's model of elastic system on parameter j_z



Rys. 4. Zależność względnego błędu pulsacji oscylacji modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym od parametru j_z

Fig. 4. Dependence of relative error of oscillations frequency for the model with noninertial elastic element on parameter j_z



Rys.5. Zależność względnego błędu amplitudy oscylacji kąta skręcenia modeli uproszczonych układu sprężystego od parametru j_z

Fig.5. Dependence of relative error of oscillation amplitude of the torsion angle for the simplified models of elastic system on parameter j_z

Na wykresach oznaczono:

$$\Delta\Omega_e = \Omega_e - \Omega_{e1} \quad (22)$$

$$\Delta A_\varphi = A_\varphi - A_{\varphi 1} \quad (23)$$

Ω_{e1} - pulsacja pierwszej postaci drgań nietłumionych modelu o parametrach rozłożonych,

$A_{\varphi 1}$, $A_{\varphi 3}$ - amplituda pierwszej postaci drgań nietłumionych kąta skręcenia modelu o parametrach rozłożonych,

A_φ - amplituda oscylacji kąta skręcenia modeli uproszczonych.

Na podstawie analizy wykresów przedstawionych na rys.2 - rys.5 można stwierdzić, że przy zachowaniu tej samej dokładności odwzorowania przebiegów zakres stosowania modelu Rayleigh'a układu sprężystego obejmuje co najmniej dwukrotnie szerszy przedział wartości parametru j_z w porównaniu z modelem o bezinercyjnym elemencie sprężystym. W syntezie układów sterowania napędów, w których moment bezwładności elementu sprężystego jest porównywalny z

momentem bezwładności mas skupionych, należy więc stosować model Rayleigh'a układu sprężystego.

4. ZASTOSOWANIE MODELU RAYLEIGH'A W SYNTEZIE UKŁADU STEROWANIA NAPĘDU Z DODATKOWYM SPRĘŻENIEM ZWROTNYM OD PRĘDKOŚCI MECHANIZMU

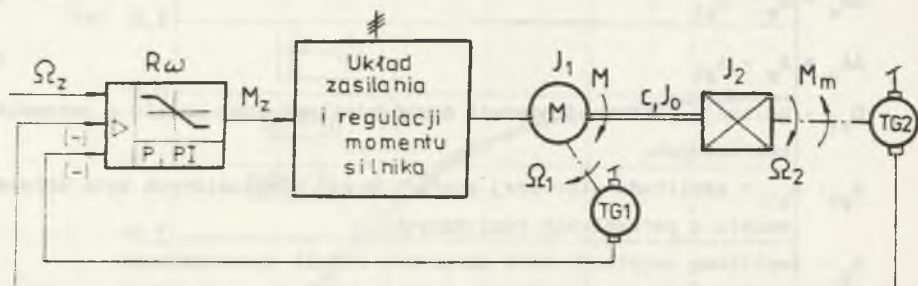
W publikacji [2] przedstawiono metodę doboru parametrów obwodu regulacji prędkości napędu z połączeniem sprężystym, w którym do opisu układu mechanicznego zastosowano model z bezinercyjnym elementem sprężystym. Schemat funkcjonalny układu napędowego przedstawiony jest na rys.6.

Zakładając, że zamknięty obwód regulacji momentu silnika opisany jest transmitancją:

$$G_{zm}(s) = \frac{M(s)}{M_z(s)} = \frac{K_m}{T_\mu^2 s^2 + 2\sigma T_\mu s + 1} \quad (24)$$

gdzie: σ jest współczynnikiem tłumienia oscylacji w zamkniętym obwodzie regulacji momentu,

pomijając tłumienie wewnętrzne elementu sprężystego, przyjmując jako wielkości odniesienia prędkość znamionową silnika Ω_N , moment znamionowy silnika M_N i kąt skrócenia $\phi_N = M_N/c$ oraz przyjmując model Rayleigh'a układu



Rys.6. Schemat funkcjonalny układu napędowego z połączeniem sprężystym z dodatkowym sprzężeniem zwrotnym od prędkości mechanizmu

Fig.6. Functional diagram of the drive with elastic joint and with additional feedback of the load velocity

sprężystego, otrzymuje się równanie stanu otwartego obwodu regulacji prędkości w wielkościach względnych (oznaczonych małymi literami):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} m \\ d \\ \omega_1 \\ \varphi \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{T_\mu^2} & \frac{-2\sigma}{T_\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{m1k}} & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{m1z}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_c} & 0 & \frac{-1}{T_c} \\ \frac{-1}{T_{msk}} & 0 & 0 & \frac{1}{T_{m2z}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ d \\ \omega_1 \\ \varphi \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{T_\mu^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{msk}} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_{m2k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

w którym d jest pochodną momentu silnika względem czasu.

Poszczególne mechaniczne stałe czasowe są równe:

$$T_{m1k} = \frac{J_{1k} \Omega_N}{M_N}, \quad T_{m2k} = \frac{J_{2k} \Omega_N}{M_N}, \quad T_{msk} = \frac{J_{sk} \Omega_N}{M_N},$$

$$T_{m1z} = \frac{J_{1z} \Omega_N}{M_N}, \quad T_{m2z} = \frac{J_{2z} \Omega_N}{M_N} \quad (26)$$

a stała czasowa sprężystości elementu sprężystego:

$$T_c = \frac{M_N}{c \Omega_N} \quad (27)$$

4.1. Analiza układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości

Dla proporcjonalnego regulatora prędkości o transmitancji $G_\omega(s) = k_\omega$ otrzymuje się na podstawie równania (25) transmitancje przewodnie zamkniętego obwodu regulacji prędkości:

$$G_{\omega_1}(s) = \frac{k_\omega}{\frac{2}{T_\mu^2 T_{m1k}} (s^2 + \Omega_f^2)} M_2(s) \quad (28)$$

$$G_{\omega 2}(s) = \frac{\frac{k_{\omega}}{T_{\mu}^2 T_{mlk}} \left(-s^2 \Lambda_2 + \Omega_f^2 \right)}{M_2(s)} \quad (29)$$

w których mianownik $M_2(s)$ jest równy:

$$M_2(s) = s^5 + \frac{2\sigma}{T_{\mu}} s^4 + \left(\Omega_e^2 + \frac{1}{T_{\mu}^2} \right) s^3 + \left(\frac{2\sigma\Omega_e^2}{T_{\mu}} + \frac{k_{\omega} (1 - k_2 \Lambda_2)}{T_{mlk} T_{\mu}^2} \right) s^2 + \frac{\Omega_e^2}{T_{\mu}^2} s + \frac{k_{\omega} \Omega_f^2 (1 + k_2)}{T_{mlk} T_{\mu}^2} \quad (30)$$

$$\text{gdzie: } \Omega_f = \sqrt{\frac{c}{J_2 + J_0/3}} \quad (31)$$

$$\Lambda_2 = \frac{J_0}{6 \left(J_2 + \frac{1}{3} J_0 \right)} \quad (32)$$

$$k_2 = K_2/K_1 \quad (33)$$

K_1, K_2 - współczynniki wzmocnienia układów pomiaru prędkości Ω_1, Ω_2 .

Zmieniając w zależnościach (28) - (30) skalę czasu i podstawiając:

$$\tau = T_{\mu} \omega_0, \quad p = \frac{s}{\omega_0}, \quad \omega_f = \frac{\Omega_f}{\omega_0}, \quad \omega_e = \frac{\Omega_e}{\omega_0}, \quad \tau_{mlk} = T_{mlk} \omega_0, \quad \tau_{\mu} = T_{\mu} \omega_0, \quad (34)$$

mianownik $M_2(s)$ można przedstawić w postaci:

$$M_2(p) = \left(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1 \right) \left(p^2 + 2\beta \omega p + \omega^2 \right) \quad (35)$$

gdzie β jest względnym współczynnikiem tłumienia. Postępując identycznie, jak w publikacji [2], otrzymuje się dla założonej wartości współczynnika tłumienia przebiegów ξ , zależności określające parametry obwodu regulacji prędkości układu napędowego z elementem sprężystym i z proporcjonalnym regulatorem prędkości:

$$k_{\omega} = \frac{B_1 + A_2 B_2}{1 + A_2} \quad (36)$$

$$k_2 = \frac{B_2 - B_1}{B_1 + A_2 B_2} \quad (37)$$

gdzie

$$B_1 = \tau_{m1k} \omega_e^2 \left\{ 1 + \tau_{\mu} \left[\tau_{\mu} \frac{1-2\xi(2\xi+1)}{\omega_e^2} + \sigma \left(\frac{4\xi}{\omega_e^2} - 2 \right) \right] \right\} \quad (38)$$

$$B_2 = \frac{\tau_{m1k} \omega_e^2}{\omega_e^2 (2\xi+1)} \left[1 + \tau_{\mu} \frac{\tau_{\mu} (2\xi+1) - 2\sigma}{\omega_e^2} \right] \quad (39)$$

przy czym musi być spełnione równanie:

$$(2\xi+1) \left[\omega_e^2 + 2\xi(2\xi+1) - 1 \right] \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 - 8\omega_e \sigma \xi (\xi+1) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) + \omega_e^2 (2\xi+1 - \omega_e^2) = 0 \quad (40)$$

Współczynnik tłumienia β i pulsacja ω określone są zależnościami:

$$\beta = \frac{\omega_e \sigma - (\xi + 0,5) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \right] \omega_e^2 - 2\sigma(2\xi+1) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) \omega_e + \left(4\xi^2 + 2\xi \right) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2}} \quad (41)$$

$$\omega = \frac{1}{\tau_{\mu} \omega_e} \sqrt{\left[1 + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \right] \omega_e^2 - 2\sigma(2\xi+1) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) \omega_e + \left(4\xi^2 + 2\xi \right) \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2} \quad (42)$$

Zależności (40) - (42) są identyczne, jak przedstawione w pracy [2] odpowiednie zależności otrzymane dla modelu układu z bezinercyjnym elementem sprężystym. Identyczne są także przedstawione tam wykresy $\beta=f(\sigma)$ oraz $\omega_e=f(\tau_{\mu} \omega_e)$.

4.2. Analiza układu z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości

Przeprowadzając podobnie analizę dla napędu z regulatorem prędkości typu PI o transmitancji operatorowej:

$$G_{\omega}(p) = k_{\omega} \left(1 + \frac{1}{p\tau_{\omega}} \right) \quad (43)$$

otrzymuje się zależności na obliczanie parametrów obwodu regulacji prędkości:

$$k_2 = \frac{B_4 - B_3}{A_2 B_4 + B_3} \quad (44)$$

$$k_{\omega} = \frac{B_4}{1 + k_2} = \frac{A_2 B_4 + B_3}{A_2 + 1} \quad (45)$$

$$\tau_{\omega} = \frac{B_4}{B_5} \quad (46)$$

gdzie:

$$B_3 = 4\xi\tau_{mik} \left\{ 1 + \tau_{\mu} \left[\tau_{\mu} (\omega_e^2 + 8\xi^2 - 3) + \sigma \frac{1 - 0,5\omega_e^2 - 6\xi^2}{\xi} \right] \right\} \quad (47)$$

$$B_4 = \frac{4\xi\tau_{mik}}{\omega_f^2} \left\{ 1 + \tau_{\mu} \left[\tau_{\mu} (\omega_e^2 + 12\xi^2 - 3) + \sigma \left(\frac{1}{2\xi} - 8\xi \right) \right] \right\} \quad (48)$$

$$B_5 = \frac{\tau_{mik}}{\omega_f^2} \left\{ 1 + \tau_{\mu} \left[\tau_{\mu} (\omega_e^2 + 12\xi^2 - 2) - 8\sigma\xi \right] \right\} \quad (49)$$

przy czym musi być spełnione równanie:

$$\begin{aligned} & \omega_e^6 \xi \left[\left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 + 1 \right] - \omega_e^5 \sigma \left[0,5 \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^3 + 8\xi^2 \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) \right] + \\ & + \omega_e^4 \xi \left[- \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^4 \left(4\xi^2 + 1 \right) + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \left(4\xi^2 + 4\sigma^2 - 5 \right) - 4\xi^2 - 1 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega_e^3 \sigma \left[\left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^3 \left(64\xi^4 + 2\xi^2 + 1 \right) + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) \left(64\xi^4 + 8\xi^2 \right) \right] + \\
& + \omega_e^2 \xi \left[\left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^4 \left(-96\xi^4 + 8\xi^2 + 4 \right) + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \left(-96\xi^4 - 256\xi^4 \sigma^2 + 8\xi^2 - 4\sigma^2 + 4 \right) \right] + \\
& + \omega_e \sigma \left[\left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^3 \left(768\xi^6 - 160\xi^4 - 0,5 \right) \right] - \xi \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^4 \left(576\xi^6 - 240\xi^4 + 16\xi^2 + 3 \right) = 0
\end{aligned} \tag{50}$$

Współczynnik tłumienia β i pulsacja ω opisane są równaniami:

$$\beta = \frac{\omega_e \sigma - 2\xi \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)}{\sqrt{\omega_e^2 \left[1 + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \right] - 8\omega_e \xi \sigma \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \left(12\xi^2 - 2 \right)}} \tag{51}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau_{\mu} \omega_e} \sqrt{\omega_e^2 \left[1 + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \right] - 8\omega_e \xi \sigma \left(\tau_{\mu} \omega_e \right) + \left(\tau_{\mu} \omega_e \right)^2 \left(12\xi^2 - 2 \right)} \tag{52}$$

Podobnie jak dla proporcjonalnego regulatora, prędkości zależności (50)-(52) są identyczne, jak przedstawione w publikacji [2] dla modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym.

5. PODSUMOWANIE

Zastosowanie przedstawionego w artykule modelu Rayleigh'a układu z elementem sprężystym do syntezy układów sterowania napędów z połączeniami sprężystymi, umożliwia zastosowanie otrzymanych wyników do szerszej klasy napędów, obejmującej układy o większej wartości stosunku momentu bezwładności elementu sprężystego do momentów bezwładności mas skupionych, niż przy zastosowaniu modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym. Przeprowadzone przez autora komputerowe badania symulacyjne, wskazują na możliwość uzyskania w prezentowanej strukturze układu sterowania przebiegów o dowolnym tłumieniu oscylacji wywołanych elastycznością więzów

mechanicznych, w tym również przebiegów bezoscylacyjnych, w napędach o momencie bezwładności elementu sprężystego tego samego rzędu co momenty bezwładności mas skupionych na jego końcach.

W przypadku gdy moment bezwładności elementu sprężystego jest mały w porównaniu z momentami bezwładności mas skupionych na jego końcach, można w prezentowanych zależnościach przyjąć $J_0=0$, lub dołączyć moment bezwładności elementu sprężystego do momentów bezwładności mas skupionych, tak jak w zależności (20). Otrzymuje się wówczas zależności na dobór parametrów układu sterowania identyczne jak przedstawione w publikacji [2], dla modelu z bezinercyjnym elementem sprężystym. Dla założonej dokładności odwzorowania przebiegów, wyboru modelu przyjętego do obliczeń można dokonać na podstawie wykresów przedstawionych na rys.2 - rys.5.

LITERATURA

- [1] Davydov V.L. Skorodumov V.A.: Dinamika gornych maszyn. Moskwa, Gosgortiechizdat, 1961.
- [2] Gierlotka K.: Wpływ parametrów obwodu regulacji momentu na tłumienie oscylacji w napędach z połączeniami sprężystymi. XIV Konferencja SPETO, Gliwice - Wisła, 1991, t.II, s.89-96.
- [3] Gierlotka K.: Obliczanie parametrów obwodu regulacji prędkości w napędach z połączeniami sprężystymi. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej Elektryka z.120, 1992.
- [4] Gryboś R.: Drgania maszyn w zadaniach. Skrypt Uczelniany Pol. Śląskiej Nr.1432, Gliwice 1988.
- [5] Gutowski R., Swietlicki W.A.: Dynamika i drgania układów mechanicznych. Warszawa, PWN 1986.
- [6] Khorosani K., Nonlinear feedback control of flexible joint manipulators: A single link case study. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, vol.35, No.10, pp.1145-1149.
- [7] Lappat A.: Zustandsregelung eines elektrischen Antriebes mit elastischer, schwach gedampfer Mechanik. Elektrie, 1986, No 1, s.25-27.

- [8] Śliwiński W.: Wyznaczanie charakterystyki czasowej napędu prądu stałego przy uwzględnieniu podatności mechanicznej jako zjawiska przestrzennego. Prace Instytutu Elektrotechniki, 1990, nr 158, s.43-66.
- [9] Tomei P.: A simple PD controller for robots with elastic joints. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, vol.36, No 10, pp. 1208-1213.

Badania zrealizowano w ramach projektu Nr 8 8293 91 02 finansowanego w roku 1992 przez Komitet Badań Naukowych.

Recenzent: prof.dr hab.inż. Zbigniew Nowacki

Wpłynęło do Redakcji dnia 6 maja 1992 r.

A b s t r a c t

Existence of elastic joints is a characteristic feature of some electric drives . Simplified models of the elastic system in synthesis of control systems of the drives with elastic joints are applied in [2], [3], [6], [7], [9]. The spatial phenomena of elastic element in these models are neglected. Application of the Rayleigh's model of the elastic system (Eq.2-10) for synthesis of control systems of the drives with elastic joints has been proposed in the paper. It approximates the spatial phenomena in the elastic element. The accuracy of the Rayleigh's model of the elastic system for transients is compared with accuracy of the model described by the wave equation, and with the model with inertialess elastic joint, and presented in Fig.2-Fig.5.

Rayleigh's model has been applied for synthesis of the control system of the drives with elastic joints. The system contains inner motor torque loop control and outer loop of the speed control, with motor and load velocity feedbacks (Fig.6). Formulae (36)-(40) and (44)-(50) enable to calculate the control system parameters for drive with P and PI type of speed controller. Using presented methods it is possible to get any value of the damping coefficient of the drive oscillations due to elasticity of the mechanical links.