ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: AUTOMATYKA z.108 Nr kol. 1150

Andrzej ORDYS

PRZEBIEGI W STANACH PRZEJŚCIOWYCH DLA RÓŻNYCH TYPÓW REGULATORÓW MINIMALNO-WARIANCYJNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawione są przykładowe przebiegi wariancji wyjścia i sterowania dla pewnych procesów regulacji minimalno-wariancyjnej. Na tej podstawie próbuje się wyciągnąć wnioski odnośnie do wpływu poszczególnych parametrów obiektu oraz wpływu parametrów regulatora na jakość regulacji. Porównuje się zwłaszcza efekty zastosowania algorytmu bazującego na optymalnej filtracji Kalmana z algorytmem wykorzystującym filtr asymptotyczny.

TRANSIENT STATES PROCESSES FOR DIFFERENT TYPRES OF MINIMUM - VARIANCE CONTROLLERS

Summary. In the paper some examples of output and control variances for certain processes of minimum - variance control are presented. On this basis one tries to make conclusions about the influence of the particular parameters of the plant and of the regulator on the performance of the control. Particularly the effects of applying the algorithm based on the optimal Kalman filtering and the algorithm using the asymptotic filter are compared.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ РАЗНЫХ ТИПОВ МИНИМАЛЬНО-ВАРИАНЦИОННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Резюме

В работе представлены примерные процессы варианции выхода и управления для определенных процессов минимально-варианционного регулирования. На этой основе сделаны попытки получить выводы относительно влияния отдельных параметров объекта и влияния параметров регулятора на качество регулирования. Прежде всего сравниваются эффекты применения алгоритма основанного на оптимальной фильтрации Кальмана с алгоритмом использующим асимптотический фильтр.

Praca wykonana w ramach programu resortowego RP.I.02 : *Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych*

1. Wprowadzenie

Wzory, wyprowadzone w pracach [2], [3], [4], umożliwiają przeprowadzenie w łatwy sposób analizy zmian w czasie wariancji wyjścia i sterowania w układach regulacji minimalno - wariancyjnej. Uzyskuje się tą drogą informację o stanach przejściowych procesów. Dla zadanego obiektu można porównać przebiegi dla różnych algorytmów. W pracy tej przeprowadza się takie porównanie dla dwóch obiektów. Próbuje się także na tej podstawie sformułować ogólniejsze wnioski. Obiekty zostały wybrane w ten sposób, by jak najlepiej można było zademonstrować pewne efekty. W związku z tym są to obiekty trudne do regulacji, bliskie granicy stabilności. Uzyskano to poprzez odpowiedni dobór pierwiastków wielomianów A(z), B(z), C(z), występujących w zależności wejściowo-wyjściowej opisującej obiekt :

$$y_i\ A(z) = B(z)\ u_i + C(z)\ v_i \tag{1}$$

Na zamieszczonych w pracy rysunkach przedstawione są wartości wyjścia i sterowania w dyskretnych chwilach i=0,1,...,80. Przyjęty zakres czasu i wystarcza do rejestracji stanów nieustalonych. Chwila i=0 jest na wykresach przesunięta w lewo. Pozwala to na zaznaczenie stanu, jaki występował w obiekcie przed rozpoczęciem sterowania. W większości z przedstawionych poniżej przykładów przyjęto, że obiekt niesterowany, lecz z działającym zakłóceniem, istniał dostatecznie długo przed chwilą i=0. Macierz kowariancji stanu można dla takiego obiektu obliczyć z rekurencyjnej zależności :

$$X = A\ X\ A^T + \sigma\ g\ g^T \tag{2}$$

Wariancja wyjścia wyraża się wzorem :

$$E\left\{ y_j^2 \right\} = d^T X_j\ d + \sigma \tag{3}$$

W przeprowadzonych obliczeniach przyjęto, jako okres ustalania się parametrów stochastycznych obiektu niesterowanego, 100 dyskretnych chwil czasu. Ze wzoru (2) dla j=100 otrzymuje się macierz kowariancji stanu początkowego będącą warunkiem startowym dla filtru Kalmana, zastosowanego do oceny stanu obiektu. Na rysunkach zaznaczono 20+k wartości wariancji wyjścia dla obiektu

niesterowanego, poprzedzających chwilę 0 , w której zaczął działać algorytm sterowania. Można także przyjąć, że zakłócenie zaczęło działać - podobnie jak sterowanie - w chwili i=0 , natomiast macierz kowariancji stanu początkowego jest zadana. Wówczas, licząc od chwili 0, występuje k wariancji wyjść dla obiektu niesterowanego (k jest opóźnieniem w torze sterowania).

2. Pierwszy obiekt

Dla pierwszego obiektu przyjęto następujące postaci wielomianów :

$$A(z) = z^k(z-0.91)(z+0.9) \tag{4}$$

$$B(z) = (z-0.92-j\cdot 0.33)(z-0.92+j\cdot 0.33) =$$

$$= (z-0.98\cdot e^{j\frac{\pi}{9}})(z-0.98\cdot e^{-j\frac{\pi}{9}}) \tag{5}$$

$$C(z) = z^k(z-0.96)(z-0.956) \tag{6}$$

gdzie k jest wielkością opóźnienia w torze sterowania.

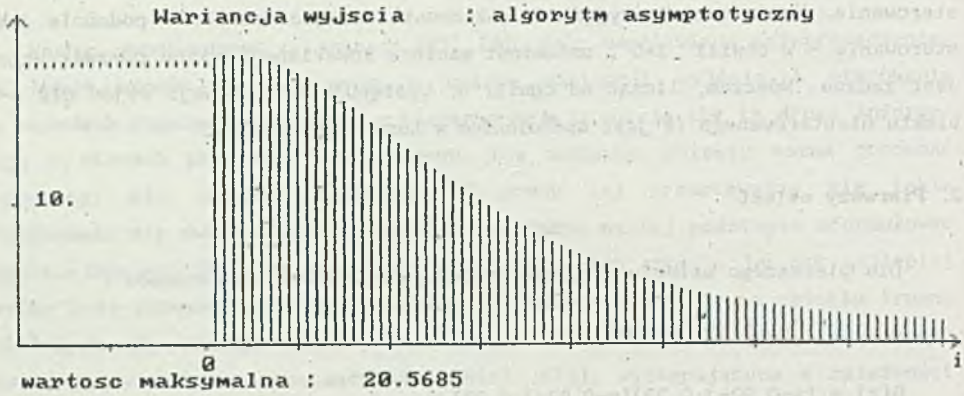
Dla wykorzystania wzorów zawartych w pracach [2], [3], [4] konieczne jest podanie opisu obiektu za pomocą równań stanu. Zastosowano tak zwaną fazową postać równań stanu [8]. Dla opóźnienia k=1 otrzymuje się następujące równania stanu:

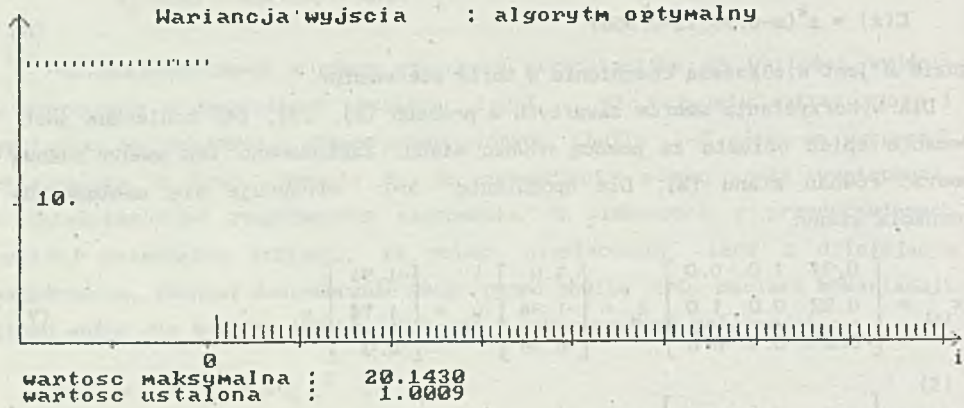
$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 1.0 & 0.0 \\ 0.82 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.84 \\ 0.96 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} -1.91 \\ 1.74 \\ 0.0 \end{bmatrix} v_i \tag{7}$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + v_i \tag{8}$$

Dla większych wartości opóźnienia k wymiar wektora stanu zwiększa się ale współczynniki macierzy A oraz wektorów b, g, d pozostają niezmienione. Na przykład dla k=4 otrzymuje się :

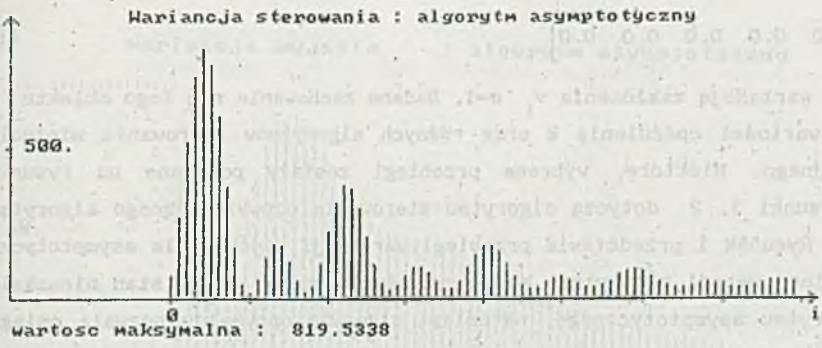
$$A = \begin{bmatrix} 0.01 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.82 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ -1.84 \\ 0.96 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} -1.91 \\ 1.74 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

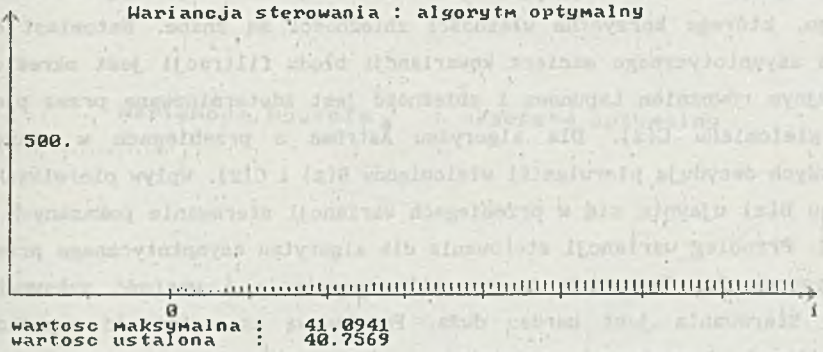




Rys. 1. Przebiegi wariancji wyjścia dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowania

Fig. 1. Output variance for the first plant, with the performance index not including control cost





Rys.2. Przebiegi wariancji sterowania dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowań

Fig.2. Control variance fot the first plant, with the performance index not including control cost

$$d = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

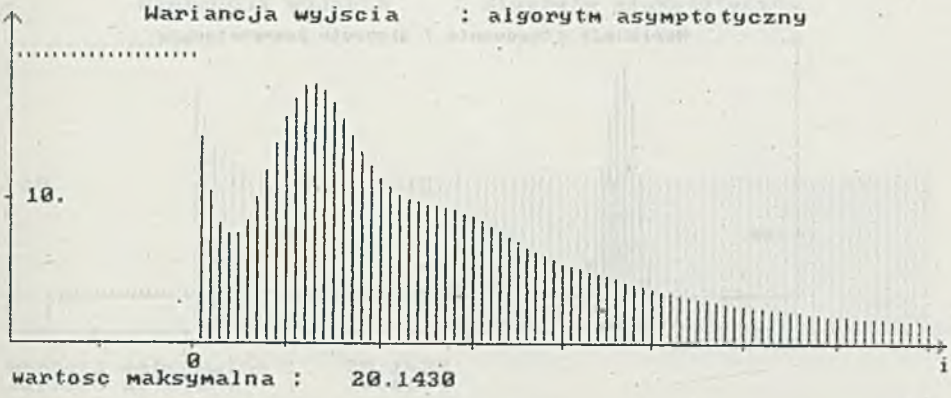
Przyjęto wariancję zakłócenia v_i $\sigma=1$. Badano zachowanie się tego obiektu dla różnych wartości opóźnienia k oraz różnych algorytmów sterowania minimalno-wariancyjnego. Niektóre, wybrane przebiegi zostały pokazane na rysunkach 1-9. Rysunki 1, 2 dotyczą algorytmu sterowania odpowiadającego algorytmowi Åströma. Rysunek 1 przedstawia przebiegi wariancji wyjścia dla asymptotycznej i optymalnej wersji algorytmu. Można zauważyć wyraźny, długi stan nieustalony dla algorytmu asymptotycznego, natomiast algorytm optymalny pozwala osiągnąć stan ustalony natychmiast. W tym przypadku stany nieustalone wariancji wyjścia związane są z szybkością zanikania do zera macierzy kowariancji błędu filtracji. Dla algorytmu optymalnego jest to określone przez rekurencyjne równanie Riccatiego, którego korzystne własności zbieżności są znane. Natomiast dla algorytmu asymptotycznego macierz kowariancji błędu filtracji jest określona rekurencyjnym równaniem Lapunowa i zbieżność jest zdeterminowana przez pierwiastki wielomianu C(z). Dla algorytmu Åströma o przebiegach w stanach przejściowych decydują pierwiastki wielomianów B(z) i C(z). Wpływ pierwiastków wielomianu B(z) ujawnia się w przebiegach wariancji sterowania pokazanych na rysunku 2. Przebieg wariancji sterowania dla algorytmu asymptotycznego przedstawia rysunek 2a. Występują bardzo silne oscylacje i wartość maksymalna wariancji sterowania jest bardzo duża. Podstawową częstotliwość oscylacji można wyliczyć teoretycznie pamiętając, że pierwiastki wielomianu B(z) wynoszą:

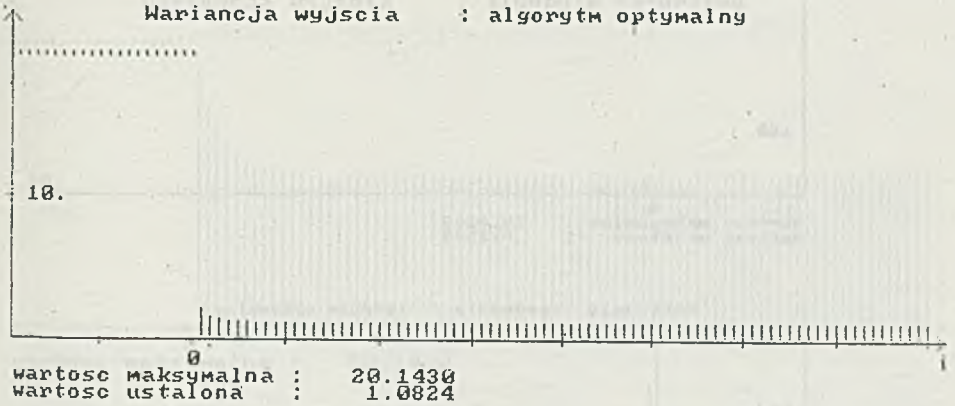
$$z_{b_{1,2}} = 0.98 \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{9}} \tag{11}$$

Wynika stąd, że przebieg sterowania posiada składową :

$$u'_i = \alpha(i) \cdot \sin(\frac{\pi}{9} \cdot i + \beta) \tag{12}$$

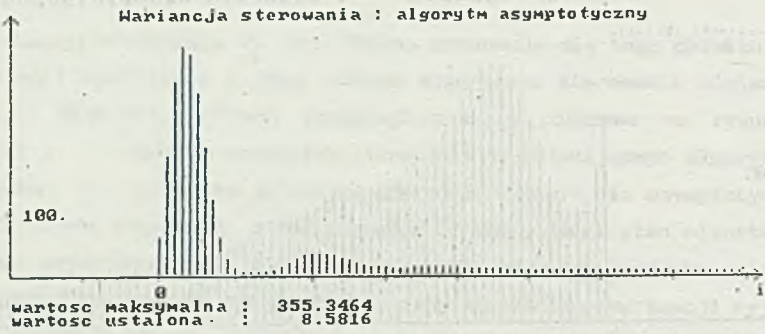
Po podniesieniu do kwadratu daje to okres podstawowy n=9. Taką właśnie wartość można zaobserwować na rysunku 2a. Zanikanie oscylacji związane jest z modułem pierwiastków wielomianu B(z) oraz z rekurencyjnym równaniem Lapunowa, określającym macierz kowariancji błędu filtracji. Dla algorytmu optymalnego, ponieważ macierz kowariancji błędu filtracji (określona równaniem Riccatiego) zanika znacznie szybciej, wariancja sterowania przyjmuje znacznie mniejsze wartości, co widać na rysunku 2b. Rysunek 2c przedstawia przebieg wariancji sterowania w innej skali, dzięki czemu można sprawdzić, że występują tu także oscylacje związane z pierwiastkami wielomianu B(z).

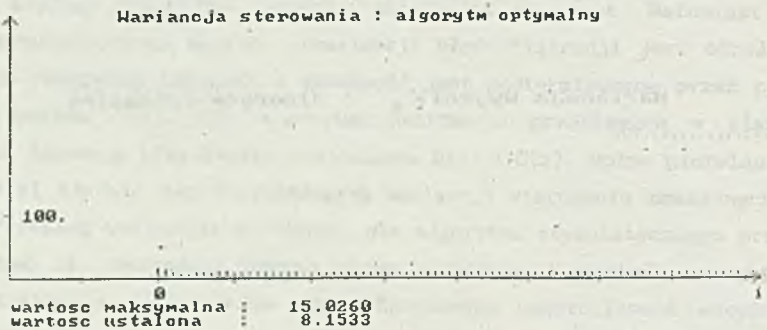


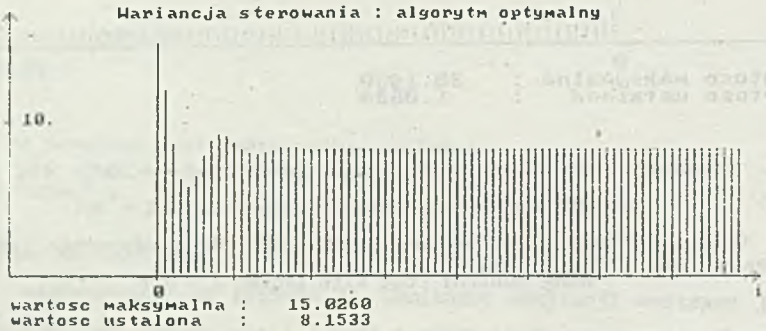


Rys.3. Przebiegi wariancji wyjścia dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,1$

Fig.3. Output variance fot the first plant, with the performance index including control cost with factor $\lambda = 0,1$

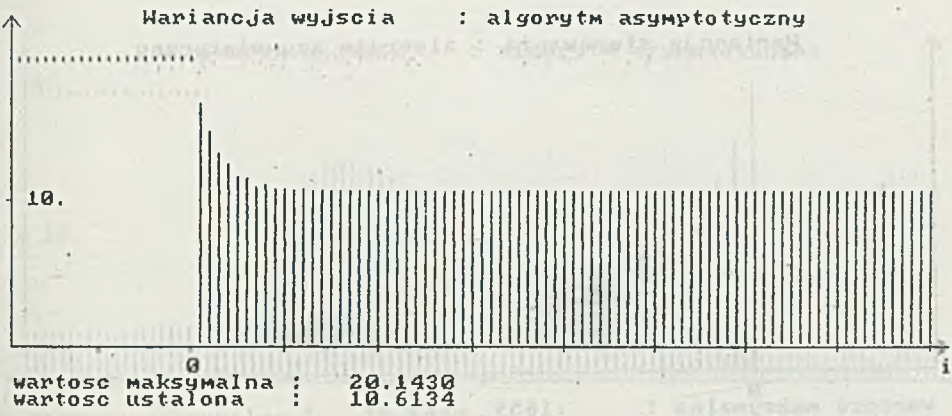


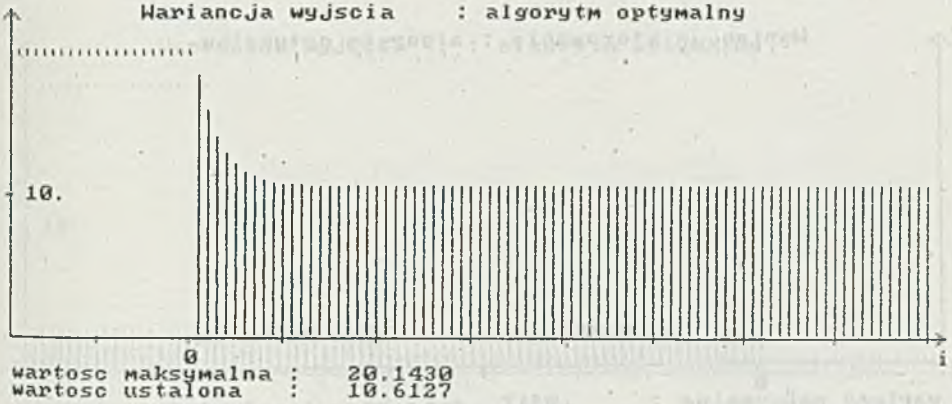




Rys. 4. Przebiegi wariancji sterowania dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,1$

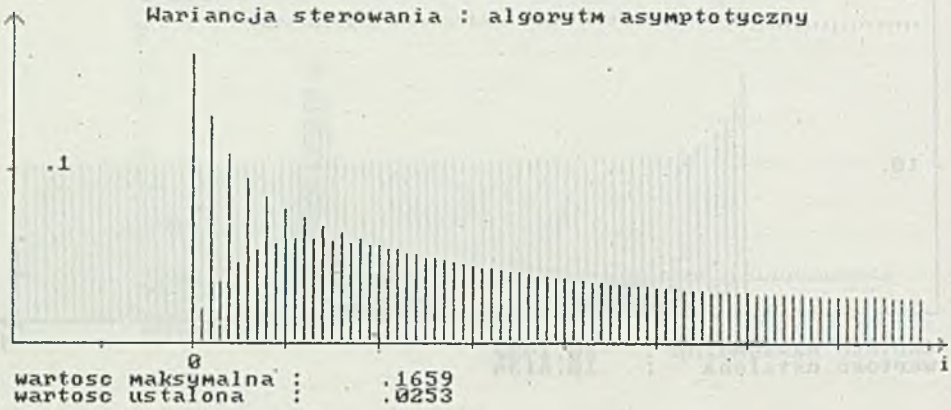
Fig. 4. Control variance for the first plant, with the performance index including control cost with factor λ -0,1

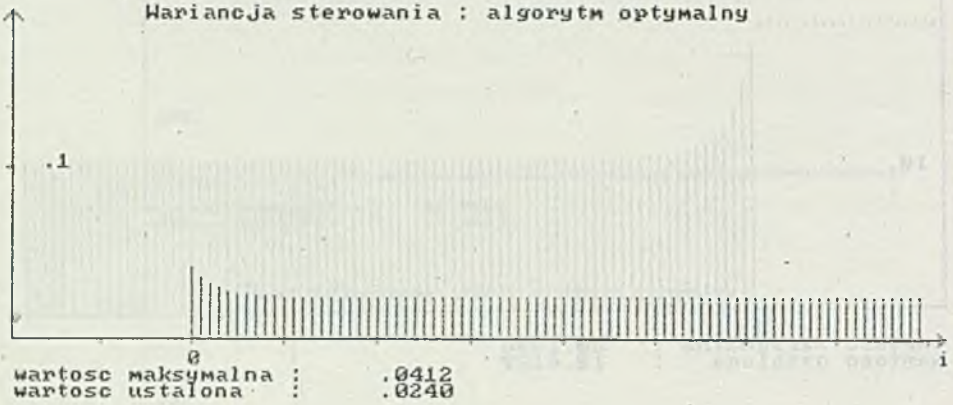




Rys.5. Przebiegi wariancji wyjścia dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 20$

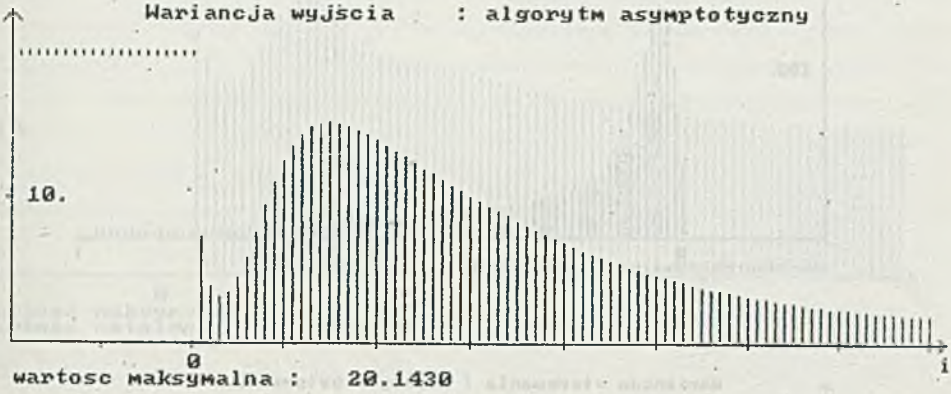
Fig.5. Output variance for the first plant, with the performance index including control cost with factor $\lambda = 20$

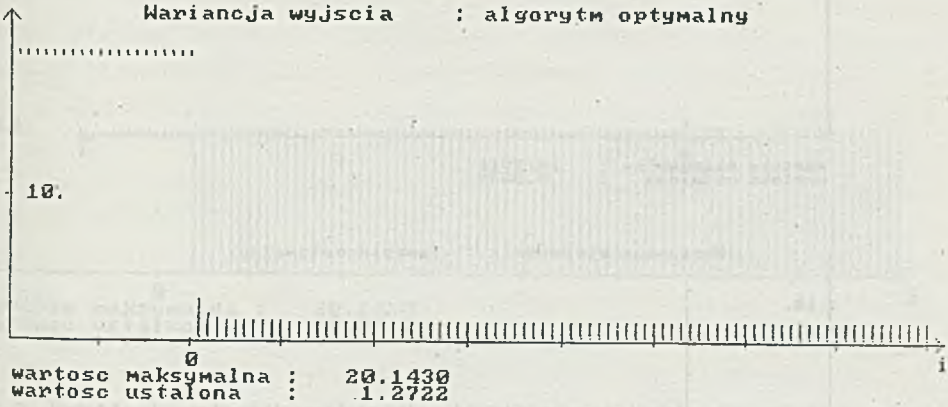




Rys.6. Przebiegi wariancji sterowania dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 20$

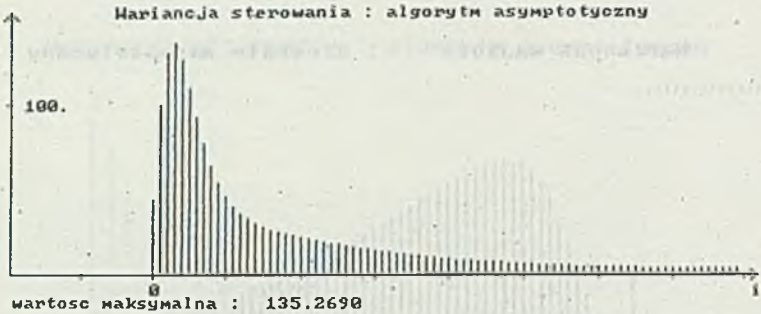
Fig.6. Control variance for the first plant, with the performance index including control cost with factor $\lambda = 20$

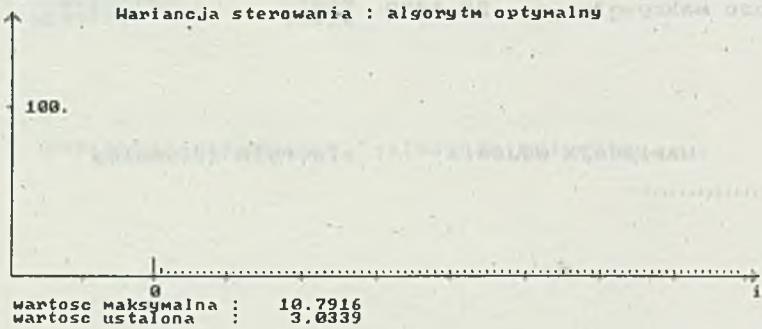


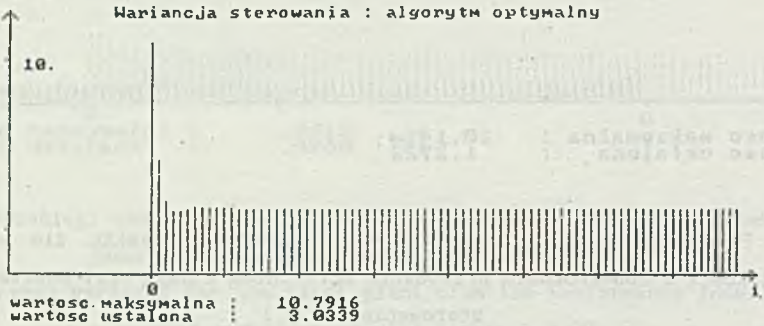


Rys.7. Przebiegi wariancji wyjścia dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z 200-krokowym przesuwnym horyzontem z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,1$

Fig.7.Output variance for the first plant, the performance index with 200-steps moving horizon including control cost with factor $\lambda = 0,1$

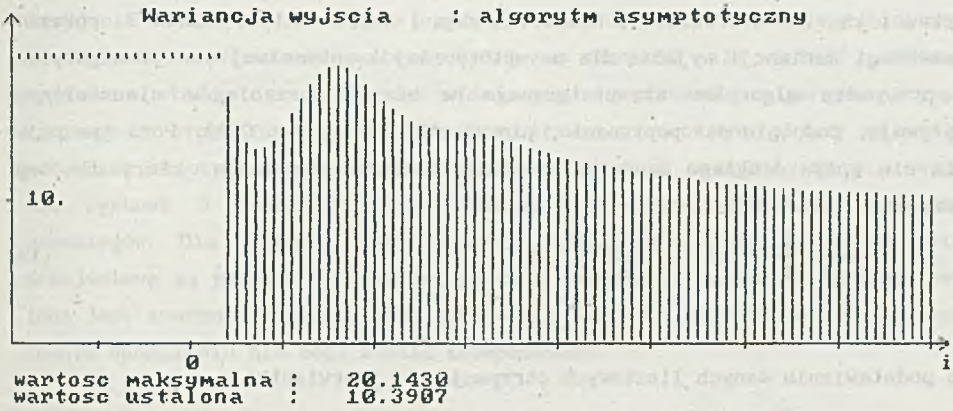


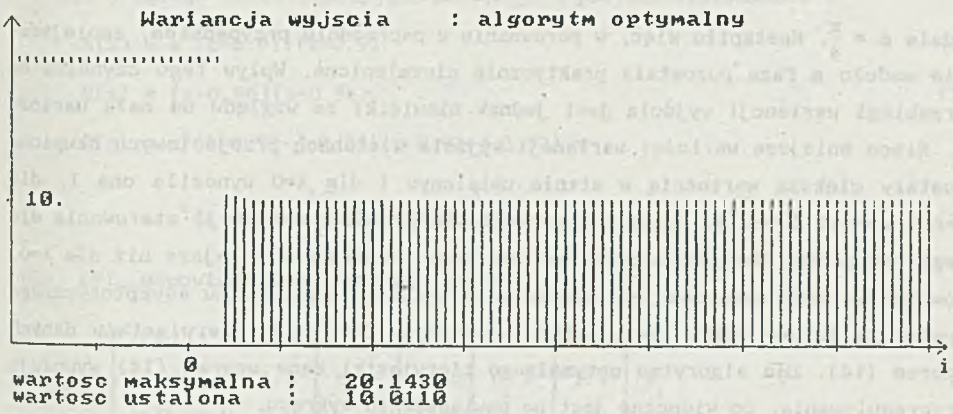




Rys. 8. Przebiegi wariancji sterowania dla pierwszego obiektu dla wskaźnika jakości z 200-krokowym przesuwnym horyzontem z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,1$

Fig. 8. Control variance for the first plant, the performance index with 200-steps moving horizon including control cost with factor $\lambda = 0,1$





Rys.9. Przebiegi wariancji wyjścia dla obiektu z opóźnieniem równym 4 okresom próbkowania dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,1$

Fig.9. Output variance for the plant, with delay of 4 steps., the performance index including control cost with factor $\lambda = 0,1$

Rysunki 3 - 9 prezentują przebiegi wariancji wyjścia i sterowania dla innych wersji wskaźnika jakości. Wspólną cechą wszystkich tych rysunków jest znacznie szybsza zbieżność przebiegów dla algorytmów optymalnych, wynikająca z korzystnych własności równania Riccatiego w porównaniu z równaniem Lapunowa. Na rysunkach 3 i 4 przedstawiony jest przypadek wprowadzenia do wskaźnika

jakości kosztów sterowania z niewielką wagą (λ=0.1). Na rysunku 3 pokazano przebiegi wariancji wyjścia dla asymptotycznej i optymalnej wersji algorytmu. W przypadku algorytmu asymptotycznego na kształt przebiegów nieustalonych wpływają, podobnie jak poprzednio, pierwiastki wielomianu C(z). Poza tym pojawia się wpływ drugiego czynnika równania charakterystycznego, który dla tego przypadku dany jest wzorem :

$$\frac{1}{\lambda+b_o^2}\left[\lambda\, A(z) + z^k b_o B(z)\right] = 0 \tag{13}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się pierwiastki :

$$z_{1,2} = 0.794\cdot e^{\pm j\phi} \tag{14}$$

gdzie $\phi \approx \frac{\pi}{9}$. Nastąpiło więc, w porównaniu z poprzednim przypadkiem, zmniejszenie modułu a faza pozostała praktycznie niezmieniona. Wpływ tego czynnika na przebiegi wariancji wyjścia jest jednak niewielki ze względu na małą wartość λ. Nieco mniejsze wartości wariancji wyjścia w stanach przejściowych okupione zostały większą wartością w stanie ustalonym (dla λ=0 wynosiła ona 1, dla λ=0.1 wynosi 1.082). Rysunek 4 przedstawia przebieg wariancji sterowania dla tego przypadku. Wartość maksymalna jest ponad dwukrotnie mniejsza niż dla λ=0. Również wartość ustalona jest znacznie mniejsza. Dla algorytmu asymptotycznego występuje łączny wpływ pierwiastków wielomianu C(z) oraz pierwiastków danych wzorem (14). Dla algorytmu optymalnego pierwiastki dane wzorem (14) wywołują przeregulowania, co widoczne jest po powiększeniu wykresu.

Wpływ zwiększania wagi λ pokazany jest na rysunkach 5 i 6 (λ=20). Dla tego przypadku otrzymuje się pierwiastki :

$$z_1 = 0.907 \quad , \qquad z_2 = -0.81 \tag{15}$$

Przebieg wariancji wyjścia (rysunek 5) jest prawie identyczny dla algorytmu asymptotycznego i optymalnego. Krótki stan nieustalony jest związany z bardzo dużą wartością w stanie ustalonym. Przebieg wariancji sterowania dla algorytmu asymptotycznego (rysunek 6a) obrazuje wpływ ujemnego pierwiastka z_2 z równania (15). Zwracają uwagę bardzo małe, w porównaniu z poprzednimi przypadkami, wartości wariancji sterowania (związane z dużą wagą λ). Rysunki 7 i 8 przedstawiają zachowanie się układu dla przypadku, gdy wskaźnik jakości zawiera sumę wariancji wyjścia i sterowania liczoną w horyzoncie N kroków od chwili bieżącej (wskaźnik z N-krokowym przesuwnym horyzontem [5], [6]).

Przyjęcie N=200 oznacza, że w praktyce rozpatruje się sterowanie z horyzontem nieskończonym. Niewielka wartość $\lambda=0.1$ ma zapewnić małą wartość wariancji wyjścia w stanie ustalonym. Jak widać, poprawa własności algorytmu asymptotycznego w stosunku do przypadków rozpatrywanych poprzednio jest niewielka, natomiast algorytm optymalny jest wyraźnie lepszy od asymptotycznego. Wreszcie rysunek 9 pokazuje wpływ opóźnienia w torze sterowania na jakość przebiegów. Dla przypadku tego przyjęto k=4, $\lambda=0.1$, N=0. Jak widać, stany przejściowe są podobne do występujących na rysunku 3, natomiast wartość ustalona jest znacznie większa, gdyż zakłócenia pojawiające się w przedziale czasu równym opóźnieniu nie mogą zostać skompensowane.

3. Drugi obiekt

Dla drugiego obiektu przyjęto następujące postaci wielomianów :

$$A(z) = z^k(z-0.91)(z+0.9) \tag{16}$$

$$B(z) = (z-0.96)(z-0.96) \tag{17}$$

$$C(z) = z^k(z-0.92-j\cdot 0.33)(z-0.92+j\cdot 0.33) =$$

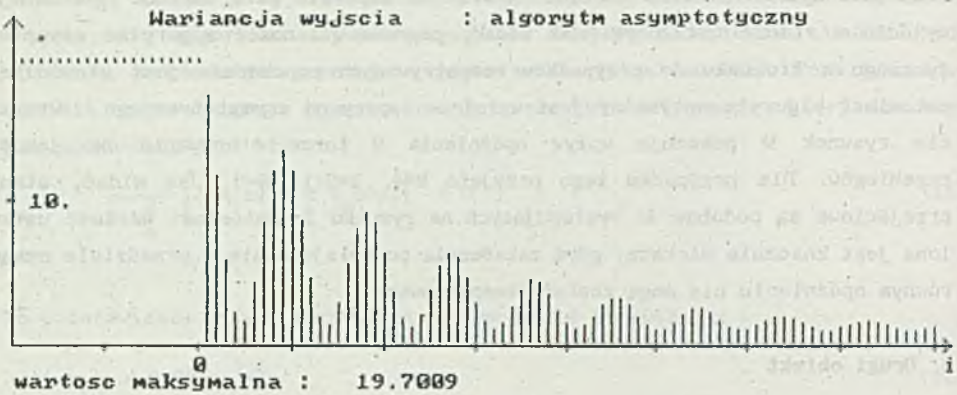
$$= z^k(z-0.98\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{9}})(z-0.98\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{9}}) \tag{18}$$

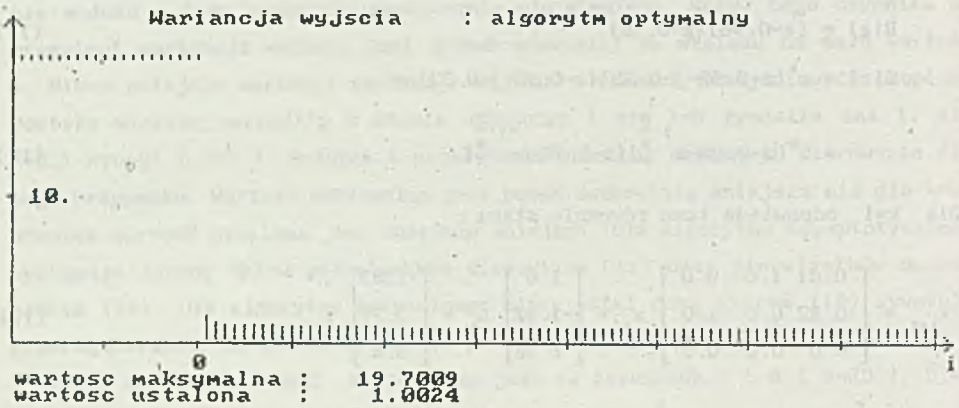
Dla k=1 odpowiada temu równanie stanu :

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 1.0 & 0.0 \\ 0.82 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.92 \\ 0.92 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} -1.83 \\ 1.77 \\ 0.0 \end{bmatrix} v_i \tag{19}$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + v_i \tag{20}$$

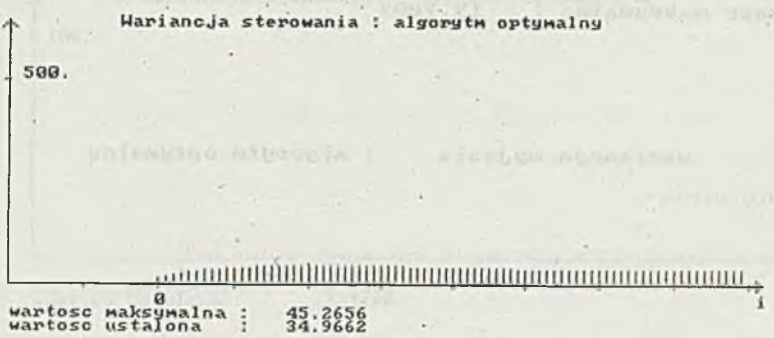
Przyjęto wariancję zakłócenia v_i $\sigma=1$. Badano zachowanie się tego obiektu dla różnych wartości opóźnienia k oraz dla różnych algorytmów sterowania minimalno-wariancyjnego. Niektóre wybrane przebiegi wariancji wyjścia i sterowania zostały pokazane na rysunkach 10 - 17. Ponieważ pierwiastki wielomianu C(z) są zespolone, więc dla dowolnego z algorytmów asymptotycznych występują oscylacje. Wynika to z warunków stabilności dla algorytmów asymptotycznych wyprowadzonych w pracy [7]. Jednym z czynników równania charakterystycznego jest zawsze wielomian C(z). Natomiast dla algorytmów optymalnych oscylacje nie występują, gdyż w tym przypadku macierz kowariancji błędu oceny stanu zmienia się zgodnie z rekurencyjnym równaniem Riccatiego.

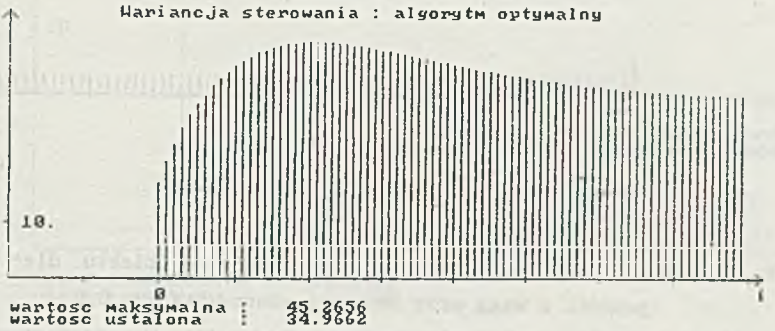




Rys. 10. Przebiegi wariancji wyjścia dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowania

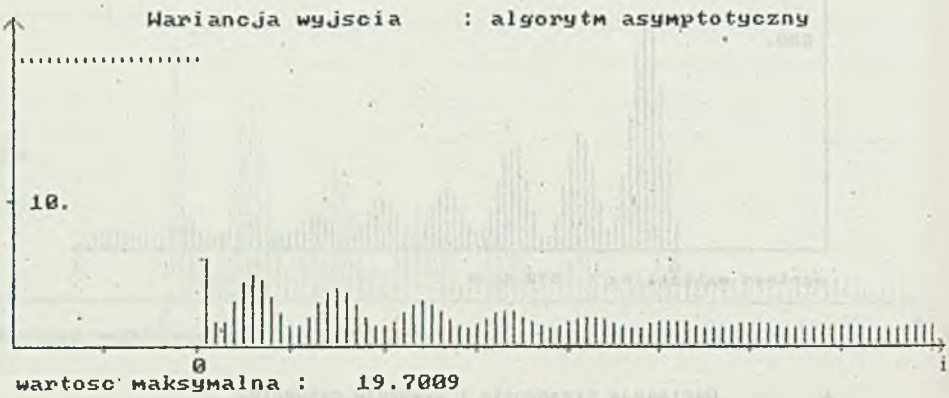
Fig. 10. Output variance for the second plant with the performance index not including control cost

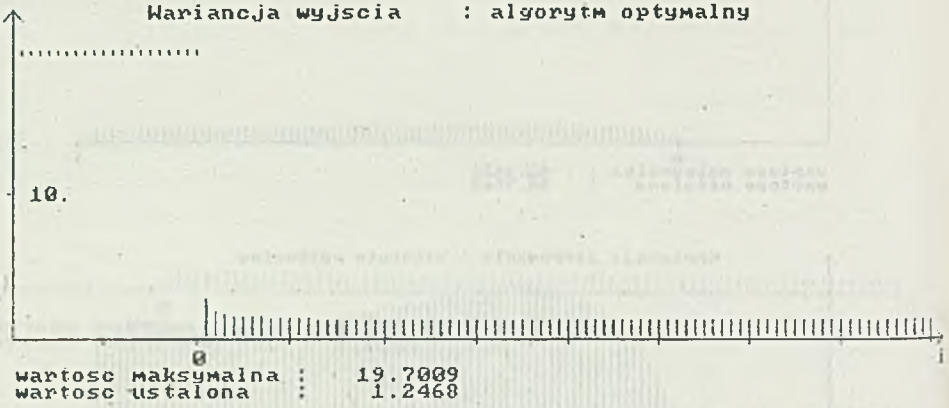




Rys. 11. Przebiegi wariancji sterowania dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowania

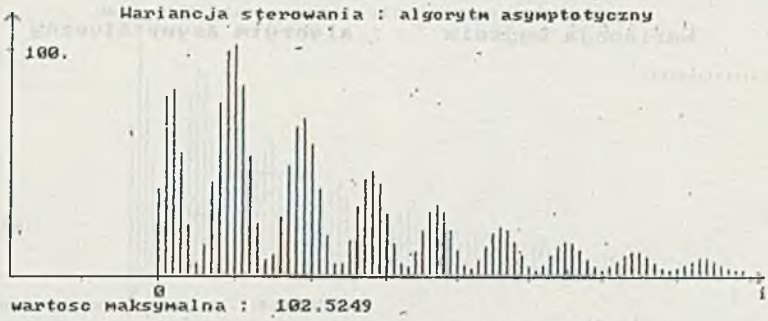
Fig. 11. Control variance for the second plant with the performance index not including control cost

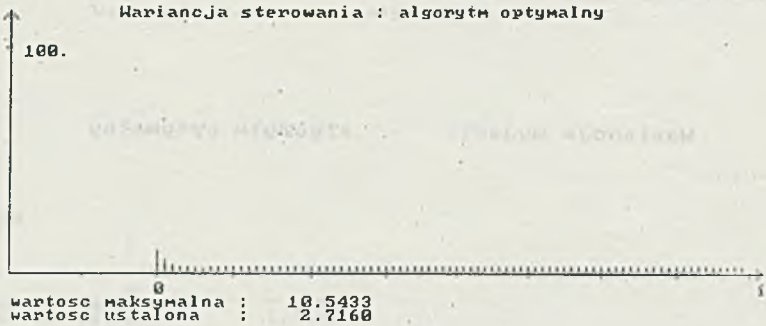


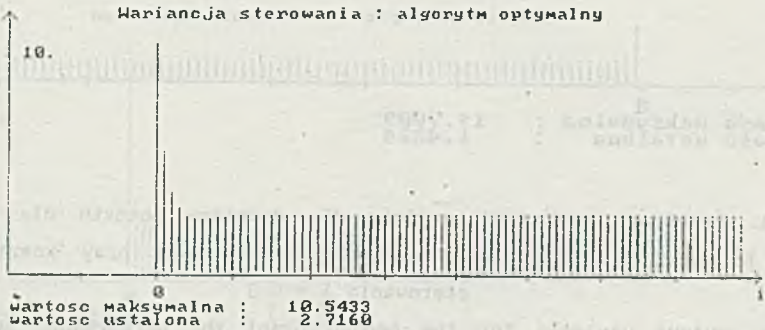


Rys. 12. Przebiegi wariancji wyjścia dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,3$

Fig. 12. Output variance for the seçond plant with the performance index including control cost with factor $\lambda = 0,3$

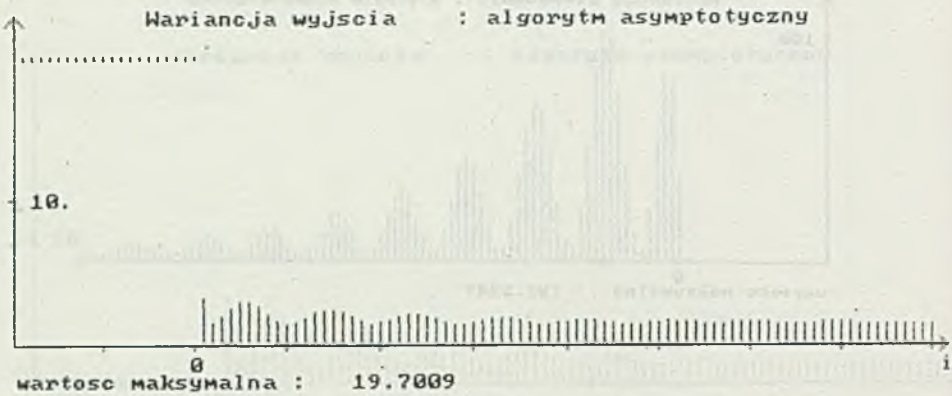


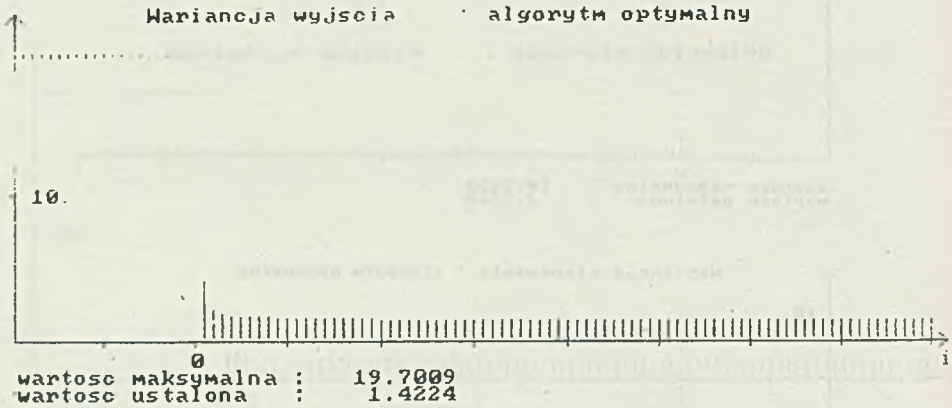




Rys. 13. Przebiegi wariancji sterowania dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,3$

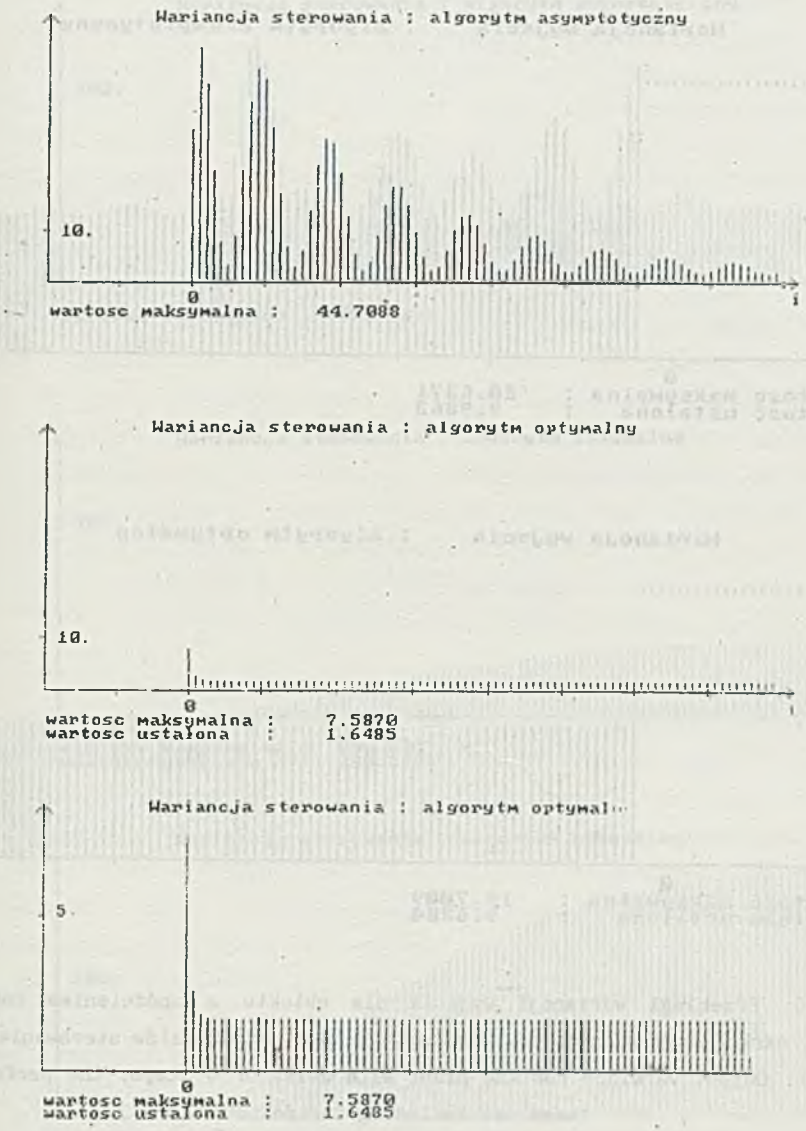
Fig. 13. Control variance for the second plant with the performance index including control cost with factor $\lambda = 0,3$





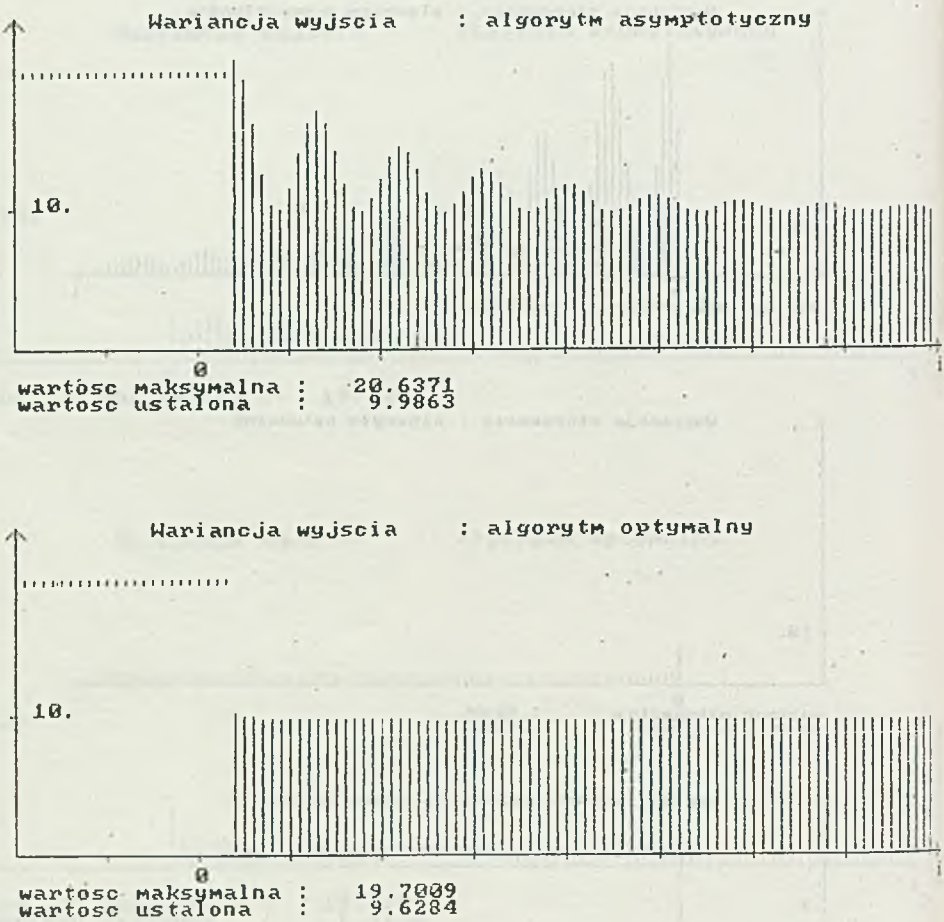
Rys.14. Przebiegi wariancji wyjścia dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości z 1-krokowym przesuwnym horyzontem z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,3$

Fig.14. Output variance for the second plant the performance index with 200-steps moving horizon including control cost with factor = $\lambda = 0,1$



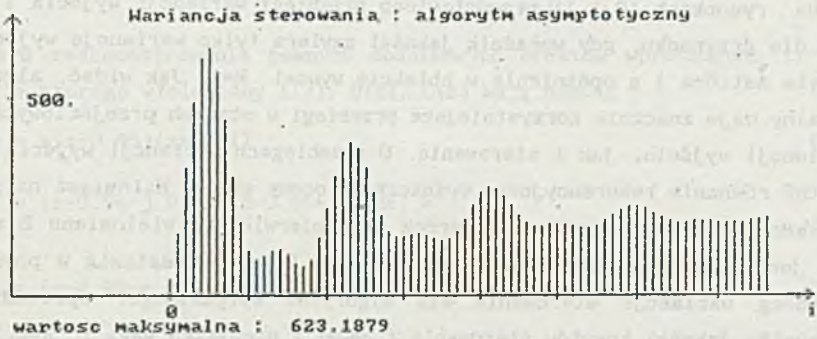
Rys. 15. Przebiegi wariancji sterowania dla drugiego obiektu dla wskaźnika jakości z 1-krokowym przesuwnym horyzontem z wagą przy kosztach sterowania $\lambda = 0,3$

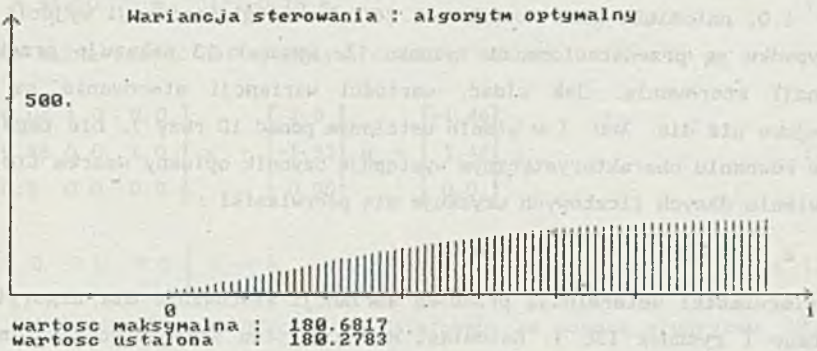
Fig. 15. Control variance for the second plant, the performance index with 200-steps moving horizon including control cost with factor $\lambda = 0,1$

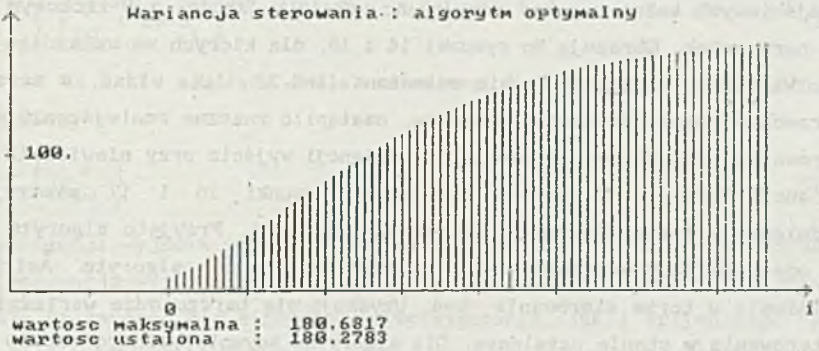


Rys. 16. Przebiegi wariancji wyjścia dla obiektu z opóźnieniem równym 4 okresom próbkowania dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowania

Fig. 16. Output varaince for the plant with delay of 4 steps, the performance index not including control cost







Rys. 17. Przebiegi wariancji sterowania dla obiektu z opróżnieniem równym 4 okresom próbkowania dla wskaźnika jakości bez kosztów sterowania

Fig. 17. Control variance for the plant with delay of 4 steps, the performance index not including control cost

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono przebiegi wariancji wyjścia i sterowania dla przypadku, gdy wskaźnik jakości zawiera tylko wariancję wyjścia (algorytm Åströma) a opóźnienie w obiekcie wynosi k=1. Jak widać, algorytm optymalny daje znacznie korzystniejsze przebiegi w stanach przejściowych zarówno wariancji wyjścia, jak i sterowania. O przebiegach wariancji wyjścia decyduje postać równania rekurencyjnego wyznaczania oceny stanu. Natomiast na przebiegi wariancji sterowania wpływają oprócz tego pierwiastki wielomianu B(z). Wpływ ten jest zwłaszcza widoczny na rysunku 11c, który przedstawia w powiększeniu przebieg wariancji sterowania dla algorytmu optymalnego. Wprowadzenie do wskaźnika jakości kosztów sterowania (nawet z niewielką wagą : $\lambda=0.3$) powoduje wyraźne zmniejszenie oscylacji dla algorytmu asymptotycznego. Zwiększa się natomiast wartość wariancji wyjścia w stanie ustalonym - dla $\lambda=0$ wynosi ona 1.0, natomiast dla $\lambda=0.3$: 1.247. Przebiegi wariancji wyjścia dla tego przypadku są przedstawione na rysunku 12. Rysunek 13 pokazuje przebiegi wariancji sterowania. Jak widać, wartości wariancji sterowania są znacznie mniejsze niż dla $\lambda=0$ (w stanie ustalonym ponad 10 razy). Dla tego przypadku w równaniu charakterystycznym występuje czynnik opisany wzorem (13).Po podstawieniu danych liczbowych uzyskuje się pierwiastki :

$$z_1 = 0.904 \quad , \qquad z_2 = 0.575 \tag{21}$$

Te pierwiastki determinują przebieg wariancji sterowania dla algorytmu optymalnego (rysunek 13c). Natomiast dla algorytmu asymptotycznego decydujące znaczenie mają pierwiastki wielomianu C(z). Dalszą redukcję stanów przejściowych można uzyskać przyjmując wskaźnik jakości z N-krokowym przesuwnym horyzontem. Obrazują to rysunki 14 i 15, dla których we wskaźniku przyjęto N=1. Wartość λ pozostała nie zmieniona ($\lambda=0.3$). Jak widać, w stosunku do poprzednio rozpatrywanych przypadków, nastąpiło znaczne zmniejszenie wariancji sterowania i ograniczenie oscylacji wariancji wyjścia przy niewielkim wzroście wariancji wyjścia w stanie ustalonym. Rysunki 16 i 17 pokazują wpływ opóźnienia w torze sterowania na jakość regulacji. Przyjęto algorytm sterowania odpowiadający wskaźnikowi bez kosztów sterowania - algorytm Åströma oraz opóźnienie w torze sterowania k=4. Uzyskuje się bardzo duże wartości wyjścia i sterowania w stanie ustalonym. Dla algorytmu asymptotycznego bardzo silne są także stany przejściowe. Natomiast dla algorytmu optymalnego wariancja wyjścia osiąga stan ustalony w kilku krokach. Cechą wspólną wszystkich przedstawionych wykresów, dotyczących drugiego obiektu, jest bardzo szybkie ustalanie się wariancji wyjścia dla algorytmu optymalnego. Świadczy to o wyższości optymalnego filtru Kalmana nad asymptotycznym dla tego przypadku.

4. Inne przykłady

W celu zademonstrowania pewnych dodatkowych efektów wprowadzono trzeci obiekt, dla którego wielomiany A(z), B(z), C(z) mają postać :

$$A(z) = z(z-0.95)(z+0.91) \tag{22}$$

$$B(z) = (z-0.96-j\cdot 0.26)(z-0.96+j\cdot 0.26) =$$

$$= (z-0.99\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{12}})(z-0.99\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{12}}) \tag{23}$$

$$C(z) = z(z-0.71-j\cdot 0.24)(z-0.71+j\cdot 0.24) =$$

$$= z(z-0.75\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{10}})(z-0.75\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{10}}) \tag{24}$$

Obiekt ten można opisać następującym równaniem stanu :

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.04 & 1.0 & 0.0 \\ 0.86 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.92 \\ 0.99 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} -1.46 \\ 1.42 \\ 0.0 \end{bmatrix} v_i \tag{25}$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_i + v_i \tag{26}$$

Przyjęto, że obiekt jest od chwili 0 sterowany za pomocą algorytmu, który minimalizuje wskaźnik jakości :

$$J_i' = E\left\{ y_{i+1}^2 + 30\cdot u_i^2 \right\} \tag{27}$$

Następnie, w 44 kroku algorytm został zmieniony. Nowy algorytm minimalizował wskaźnik jakości :

$$J_i' = E\left\{ y_{i+1}^2 \right\} \tag{28}$$

Przebieg wariancji wyjścia pokazany jest na rysunku 18. Jak widać, po zmianie algorytmu wariancja wyjścia osiąga skokowo wartość ustaloną, która jest równa 1. Występuje to zarówno dla algorytmu asymptotycznego, jak i optymalnego. Wyjaśnienia tego zjawiska dostarcza analiza wzoru na wariancję wyjścia, który obowiązuje dla wskaźnika jakości (28). Wzór zaczerpnięto z pracy [2] :

$$E\left\{ y_{i+k}^2 \right\} = d^T A^{k-1} \left(A - gd^T \right) P_i \left(A - gd^T \right)^T A^{k-1^T} d +$$

$$+ \left(1 + e_1^2 + \ldots + e_{k-1}^2 \right) \sigma \qquad (29)$$

Wariancja wyjścia składa się w tym przypadku z części stałej, którą opisuje druga linijka wzoru (29) oraz części zmiennej zależnej od macierzy kowariancji błędu oceny stanu - P_i. Wcześniejsze działanie filtru (przez 44 kroki) doprowadziło do wyzerowania tej macierzy zarówno dla algorytmu optymalnego, jak i asymptotycznego. Stąd składnik zmienny nie występuje. Rysunek 19 przedstawia przebieg wariancji sterowania dla tego przypadku. Dla algorytmu minimalizującego wskaźnik jakości (25) wariancja sterowania jest niewielka ze względu na dużą wartość wagi (λ=30). Ponieważ układ jest stabilny, więc po zmianie algorytmu wariancja sterowania osiągnie nową wartość ustaloną, znacznie większą niż poprzednio. Dochodzenie do tej nowej wartości ustalonej odbywa się w sposób oscylacyjny, częstotliwość oscylacji związana jest z wartościami pierwiastków wielomianu B(z).

Uzyskiwanie przez wariancję wyjścia wartości ustalonej w sposób skokowy ma miejsce tylko wtedy, gdy dokonuje się zmiany na algorytm sterowania odpowiadający wskaźnikowi jakości bez kosztów sterowania (algorytm Astroma). Tylko wtedy bowiem obowiązuje wzór (29). Dla innych algorytmów muszą wystąpić stany przejściowe. Ponadto warunkiem skokowego osiągnięcia wartości ustalonej przez wariancję wyjścia jest zaniknięcie do zera macierzy kowariancji błędu oceny stanu. Na rysunku 20 przedstawiono przebiegi wariancji wyjścia dla drugiego obiektu. Początkowo sterowanie minimalizowało wskaźnik jakości postaci :

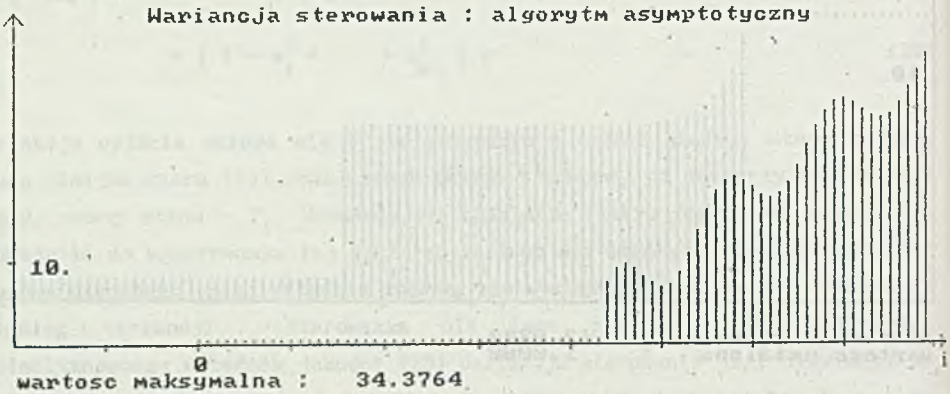
$$J_i = E\left\{ y_{i+1}^2 + \lambda\, u_i^2 \right\} \qquad (30)$$

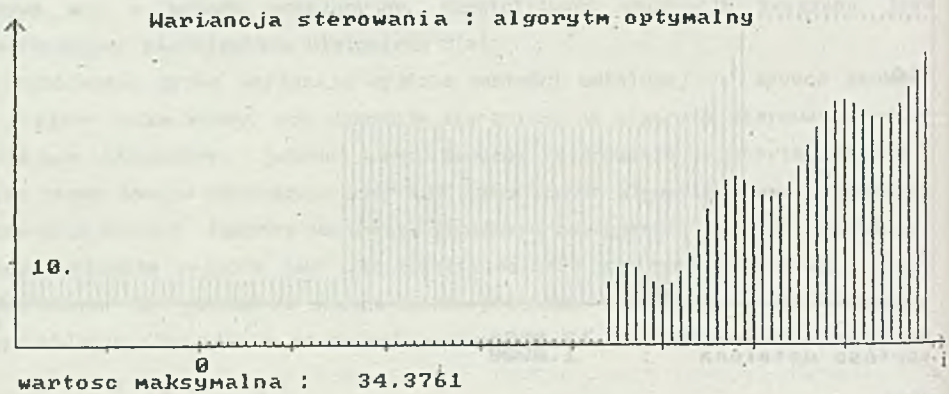
gdzie λ=20. W 44 kroku zmieniono wartość λ na λ=0. Na podstawie rysunku 20 można by przypuszczać, że do 44 kroku osiągnięto już stan ustalony. Jednakże okazuje się, że dla algorytmu asymptotycznego macierz kowariancji błędu oceny stanu nie była jeszcze równa zeru, co wywołało gasnące oscylacje po zmianie algorytmu. Dla algorytmu optymalnego filtr oceny stanu zbiega się znacznie szybciej.

Ostatni przedstawiony w tej pracy rysunek porównuje zachowanie dwóch obiektów, które są równoważne w stanie ustalonym w sensie twierdzenia o reprezentacji. Twierdzenie o reprezentacji obowiązuje dla przypadku, gdy zakłócenie działało dostatecznie długo w przeszłości - wpływ zakłócenia na obiekt

Rys. 18. Przebiegi wariancji wyjścia dla trzeciego obiektu w przypadku zmiany algorytmu w czasie trwania procesu. Agorytm wynikający ze wskaźnika uwzględniającego koszty sterowania został zmieniony na algorytm Åströma

Fig. 18. Output variance for the third plant when the performance index has been changed during the process





Rys.19. Przebiegi wariancji sterowania dla trzeciego obiektu w przypadku zmiany algorytmu w czasie trwania procesu. Algorytm wynikający ze wskaźnika uwzględniającego koszty sterowania został zmieniony na algorytm Åströma

Fig.19. Control variance for the third plant when the performance index has been changed during the process

osiągnął stan ustalony przed załączeniem sterowania. Jeśli jednak założy się, że zakłócenie i sterowanie zaczynają działać równocześnie, wówczas w stanach przejściowych układy odpowiadające dwu różnym reprezentacjom obiektu będą mieć różne wariancje wyjścia i sterowania. Wybrano obiekt z następującymi wielomianami A(z), B(z), C(z) :

$$A(z) = z(z-0.9)(z-0.9) \tag{31}$$

$$B(z) = z(z-0.99) \tag{32}$$

$$C_1(z) = z(z-0.2)(z-0.2) \quad , \quad \sigma = 1 \tag{33}$$

Równoważną w stanie ustalonym reprezentację można uzyskać przyjmując inny wielomian C(z) :

$$C_2(z) = z(z-5)(z-5) \quad , \quad \sigma = 0.0014 \tag{34}$$

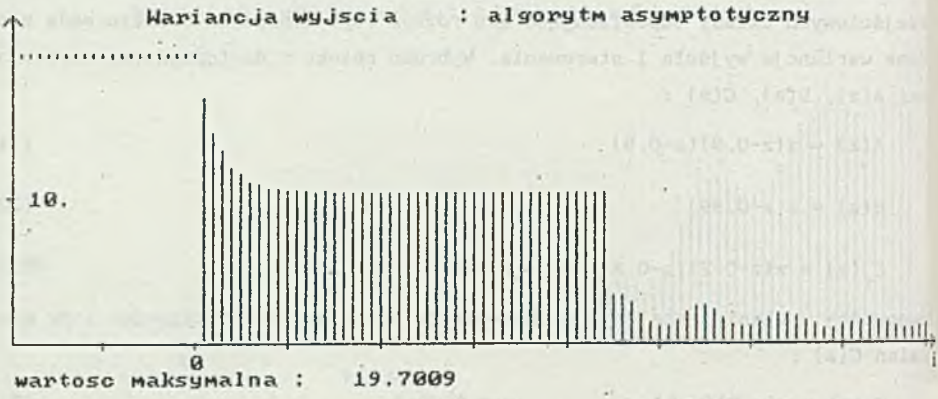
Przyjęto, że sterowanie i zakłócenie zaczynają działać równocześnie, przy czym dana jest macierz kowariancji stanu początkowego :

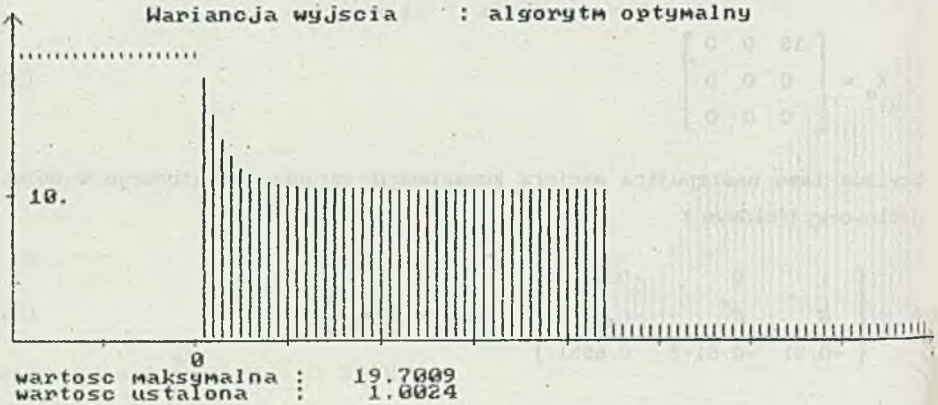
$$X_0 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Odpowiada temu następująca macierz kowariancji warunku początkowego w opisie wejściowo-wyjściowym :

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & \beta & -0.81 \\ \beta & \beta^2 & -0.81\cdot\beta \\ -0.81 & -0.81\cdot\beta & 0.6561 \end{bmatrix} \quad , \text{ gdzie } \beta^2 = \frac{15}{0.64} \tag{36}$$

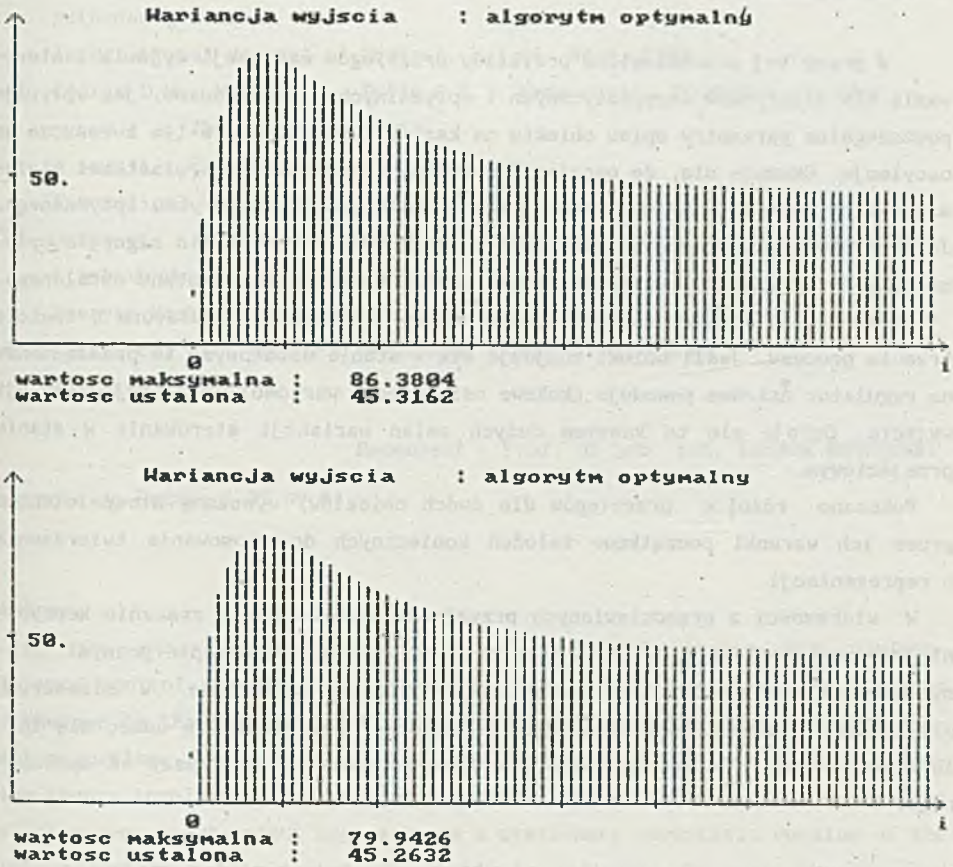
Przyjęto wskaźnik jakości z wartością $\lambda=5.0$ i z zerową wartością N. Porównywano przebiegi dla algorytmów optymalnych, ponieważ dla obiektu z wielomianem C(z) danym wzorem (34) algorytm asymptotyczny nie istnieje. Przebiegi wariancji wyjścia przedstawiono na rysunku 21. Rysunek 21a dotyczy przypadku, gdy C(z) dane jest wzorem (33), natomiast 21b przypadku, gdy C(z) dane jest wzorem (34). Kształt przebiegów jest podobny, natomiast widać różnicę w wartościach maksymalnych. Dla obydwu przebiegów uzyskuje się tę samą wartość ustaloną, co jest zgodne z twierdzeniem o reprezentacji. W stanach przejściowych różnice sięgają 10%.





Rys.20. Przebiegi wariancji wyjścia dla drugiego obiektu w przypadku zmiany algorytmu w czasie trwania procesu. Algorytm wynikający ze wskaźnika uwzględniającego koszty sterowania został zmieniony na algorytm Åströma

Fig.20. Output variance for the second plant when the performance index has been changed during the process



Rys.21. Porównanie przebiegów wariancji wyjścia w stanach nieustalonych dla dwóch obiektów, które są równoważne w stanie ustalonym w sensie twierdzenia o reprezentacji

Fig.21. Comparison of output variances in transient states for two plants which are equivalent in state in the sense of the representation theorem

5. Podsumowanie

W pracy tej przedstawiono przykłady przebiegów wariancji wyjścia i sterowania dla algorytmów asymptotycznych i optymalnych. Analizowano, jak wpływają poszczególne parametry opisu obiektu na kształt przebiegów, w tym zwłaszcza na oscylacje. Okazuje się, że oscylacje wywołane zespolonymi pierwiastkami wielomianu C(z) mogą być wyeliminowane poprzez zastosowanie algorytmu optymalnego. Jeśli pierwiastki zespolone występują w innych wielomianach, to algorytm optymalny może ograniczyć oscylacje dzięki szybszemu osiągnięciu stanu ustalonego.

Pokazano stan nieustalony wywołany zmianą parametrów regulatora w trakcie trwania procesu. Jeśli obiekt znajduje się w stanie ustalonym, to przełączenie na regulator Åströma powoduje skokowe osiągnięcie wartości ustalonej wariancji wyjścia. Dzieje się to kosztem dużych zmian wariancji sterowania w stanie przejściowym.

Pokazano różnicę przebiegów dla dwóch obiektów, wywołaną niespełnieniem przez ich warunki początkowe założeń koniecznych do stosowania twierdzenia o reprezentacji.

W większości z przedstawionych przykładów obserwuje się znacznie korzystniejsze zachowanie algorytmów optymalnych w porównaniu z asymptotycznymi. Stany nieustalone są krótsze, oscylacje - silnie wytłumione. W niektórych przykładach własności obu algorytmów są podobne. Natomiast nie udało się znaleźć przykładu, dla którego algorytm asymptotyczny byłby lepszy od optymalnego.

Literatura

[1] Åström K.J. : *Introduction to stochastic control theory.* Academic Press, 1970

[2] Błachuta M., Ordys A. : *Związek algorytmów Åströma i Kalmana dla problemu sterowania minimalno-wariancyjnego.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z.74, Gliwice 1984.

[3] Błachuta M., Ordys A. : *Comparison of Clarke, Hastings-James and Kalman control laws for one stage k-step ahead performance index.* Papers of V Polish-English Seminar on Real Time Process Control, Radziejowice, 1986.

[4] Błachuta M.,Ordys A. : *Optimal and asymptotically optimal linear regulators resulting from a one-stage performance index.* International Journal of Systems Science, Vol.18, No7, 1987.

[5] Clarke D.W., Kanjilal P.P., Mohtadi C. : *A generalised LQG approach to self-tuning control.*
International Journal of Control, Vol.41, No 6, 1985.

[6] Clarke D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S. : *Generalized Predictive Control* -
- part I : *The basic algorithm.*
- part II : *Extensions and interpretations.*
Automatica, Vol.23, No 2, 1987.

[7] Ordys A. : *Porównanie strategii sterowania optymalnego przy sumacyjnym i jednokrokowym wskaźniku jakości.*
Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, z.61, 1982.

[8] Wierzbicki A. : *Modele i wrażliwość układów sterowania.*
WNT Warszawa, 1977.

Recenzent : Prof. dr hab. inż. Leszek RUTKOWSKI

Wpłynęło do Redakcji 25.09.91

Abstract

In the paper certain examples of transient states for minimum-variance control processes are presented. The transient states are expressed as changes in the time of plant input and output variances. Two kinds of control algorithms are considered. The first based on the Kalman optimal filtering theory involves a time varying algorithm. The second, which is equivalent to the common input-output approach, is a stationary asymptotic version of the first algorithm obtained when time tends to infinity. On many figures, the influence of plant parameters and regulator parameters on transient states is shown for both optimal and asymptotic algorithms. Certain conclusions are presented among which the most general is that optimal algorithms are less sensitive in transient states than asymptotic algorithms.