ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: AUTOMATYKA z. 108 Nr kol. 1150

Konrad WOJCIECHOWSKI

ZBIORY ZMIENNYCH ZGODNYCH Z POMIARAMI I ICH WYBRANE WŁASNOŚCI

Streszczenie. W pracy dla dyskretnego modelu dynamicznego i niepewności ograniczonej określono jawnie lub za pomocą układu równań Pfaffa zbiór realizacji zmiennych niepewnych zgodnych z danymi pomiarami. Różniczkowa postać zbioru zmiennych zgodnych z pomiarami pozwala na podanie warunków przy których rodzina takich zbiorów jest niezależna od praw sterowania i ich gradientów.

SETS CONSISTENT WITH MEASUREMENTS AND THEIR CHOSEN PROPERTIES

Summary. In the paper the set of realizations for uncertain voriables consistent with measurement data for discrete dynamical model and bounded uncertainty is defined. The differential from of the set of variables consistent with measurements enables to find conditions which guarantee that the family of sets generated by this from is independent of the control strategies and their gradients. It has been proved that one of the conditions of the independence is the nested information structure.

МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИЗМЕРЕНИЯМ И ИХ ИЗБРАННЫЕ СВОЙСТВА

Резюме

В работе для дискретной динамической модели и ограниченной неопределенности определено, явно или с помощью системы уравнений Пфафа, множество реализации неопределенных переменных соответствующих измерительным данным. Дифференциальный вид множества переменных соответствующих измерительным данным позволяет определить условия при которых семейство таких множеств не зависит от законов управления и их градиентов.

1. Wprowadzenie

Wyniki uzyskane w teorii sterowania i dotyczące problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności dotyczą głównie problemu liniowo-kwadratowego (LQ) przy niepewności o modelu losowym.

W sformułowaniu klasycznego liniowo-kwadratowego problemu sterowania stochastycznie optymalnego zakłada się, że warunek początkowy x_1, oraz addytywne zakłócenia w_k, v_k są dla k=1,...,N wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi i dodatkowo wartość średnia w_k wynosi zero dla k=1,...,N. Przyjmuje się również, że dopuszczalne prawa sterowania posiadają strukturę informacyjną typu "nested". Przy powyższych założeniach optymalne prawo sterowania w chwili k jest liniową funkcją oceny wektora stanu wyznaczonej na podstawie informacji pomiarowej dostępnej w chwili k.

W ogólniejszych wersjach problemu LQ [1,25-28], dopuszcza się dowolne charakterystyki probabilistyczne zmiennych losowych x_1, w_k, v_k, k=1,...,N uzyskując prawo sterowania w postaci liniowej funkcji oceny wektora stanu uzupełnionej o składnik związany z predykcją zakłóceń w równaniu stanu.

Podobnie jak problem syntezy praw sterowania, również definicja struktury informacyjnej [11-15] oraz kontrprzykład Witsenhausena [29,19] gdzie dodatkowo zakłada się rozkłady normalne podawane są w kontekście losowego modelu niepewności. Sugeruje to, że model ten stanowi istotny element problemu i wpływa jakościowo na jego rozwiązanie.

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie bardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właśnie modelu niepewności należą do danego zbioru. Struktura tego zbioru może być dowolna.

Pierwsze próby wykorzystania tego modelu można znaleźć w pracach [22], dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [2-4] również z zakresu teorii sterowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty".

W pracach [3,4] wprowadzono pojęcie zbioru zmiennych zgodnych z pomiarami jako odpowiednik statystyki generowanej przez dany ciąg pomiarów [24]. Zbiory zmiennych zgodnych wykorzystywano również w [7] dla sformułowania i wykazania separowalności w pewnym zadaniu sterowania minimaxowego przy ograniczeniach stanu.

Celem pracy jest określenie warunków niezależności rodziny zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami od praw sterowania i ich gradientów i pokazanie, że klasyczne warunki określające strukturę informacyjną typu nested są warunkami wystarczającymi dla takiego problemu. Niezależność rodziny zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami od praw sterowania i ich gradientów jest w tym przypadku odpowiednikiem niezależności rodziny σ-ciał generowanych przez pomiary od wyboru praw sterowania [28].

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości zmiennych niepewnych. W przypadkach szczególnych (zbiory elipsoidalne, wielościenne) zbiór $\mathbb{T}$ może być parametryzowany.

W p.2 przedstawiono wybrane pojęcia pomocnicze. Ze względu na ograniczoną objętość pracy ograniczono się do problemu renumeracji pozwalającej na jednolite traktowanie tzw. modeli 1D i MD, oraz przedstawiono stosowane dalej postacie modeli bezpośrednich.

W p.3 przedstawiono definicje zbioru zmiennych zgodnych z pomiarami oraz rodziny takich zbiorów wyrażone w postaci różniczkowej.

Punkt 4 zawiera podstawowe wyniki pracy w postaci twierdzeń 1-3 podających warunki przy których formy różniczkowe określające rodziny zbiorów zmiennych z pomiarami są niezależne od praw sterowania i ich gradietów. Wymienione warunki można traktować jako nowe konstruktywne definicje klasycznej (nieklasycznej) struktury informacyjnej.

Podsumowanie całości pracy zawiera punkt 5.

2. Zagadnienia pomocnicze

Niech $\mathbb{I}=\{1,2,\dots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych zaś $\mathbb{I}^M=\mathbb{I}\times\dots\times\mathbb{I}$ iloczynem kartezjańskim M egzemplarzy zbioru $\mathbb{I}$.

Skończenie elementowe zbiory $\mathbb{H}_t\subset\mathbb{I}^{M_1}$, $\mathbb{H}_u\subset\mathbb{I}^{M_2}$, $\mathbb{H}_z\subset\mathbb{I}^{M_3}$, nazywamy odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów. Ich elementami są ciągi $i_1=(i_1,\dots i_{M_1})$, $i_2=(i_1,\dots i_{M_2})$, $i_3=(i_1,\dots i_{M_3})$.

Dla celów pracy wyróżniamy dodatkowo podzbiory $\mathbb{D}_t\subset\mathbb{H}_t$, $\mathbb{D}_u\subset\mathbb{H}_u$, $\mathbb{D}_z\subset\mathbb{H}_z$ oraz rodzinę zbiorów $\mathbb{D}_z$ oznaczoną przez $\mathcal{H}_z$.

Na zbiorach $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$ określone są funkcje (ciągi) rozpatrywane w pracy. Podstawowymi są:

Zmienne niepewne

$t:\mathbb{H}_t\longrightarrow R^q$

Sterowanie

$u:\mathbb{H}_u\longrightarrow R^m$

Pomiary

$z:\mathbb{H}_z\longrightarrow R^p$

Zauważmy, że ogólnie funkcja (ciąg) $f:\mathbb{H}\rightarrow R^n$ określona na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H}\subset\mathbb{I}^M$ może być przedstawiona w postaci wektora blokowego w którym n-wymiarowe składowe blokowe odpowiadają wartościom funkcji (ciągu) dla kolejnych (według ustalonego porządku) argumentów wybieranych ze zbioru $\mathbb{H}$.

Odpowiednio do powyższej uwagi dalej stosuje się zapisy

$f_{\mathbb{D}}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}\subset\mathbb{H}$, przy ustalonym porządku w zbiorze $\mathbb{D}$,

$f_{\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2$ gdzie z założenia $\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2\subset\mathbb{H}$, oraz $\mathbb{D}_1\subset\mathbb{D}_2$. Porządek w zbiorze $\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2$ jest ustalony.

W szczególnym przypadku gdy M=1 stosuje się równoważne zapisy

$f^k = (f'_1, \dots, f'_k)$

$f^{k\backslash l} = (f'_{l+1}, \dots, f'_k)$, k>l

Wielowymiarowy argument dyskretny w powiązaniu z wektorową postacią funkcji (ciągów) t, u, z, opisuje przejrzyście realne problemy sterowania oraz podejmowania decyzji. Przykładowo w dwupoziomowym problemie decyzyjnym wygodnie jest "numerować" poszczególne decyzje parami liczb z których pierwsza oznacza numer poziomu decyzyjnego druga zaś dyskretną chwilę czasu. Decyzja przyprządkowana określonej powyżej parze liczb może być wektorem m-wymiarowym.

W rozważaniach teoretycznych a szczególnie zapisach operowanie wielowymiarowym argumentem dyskretnym w powiązaniu z wektorową strukturą funkcji nie jest wygodne. Z tego względu wprowadzamy procedurę renumeracji dotyczącą zarówno wielowymiarowego argumentu lub łącznie wielowymiarowego argumentu i funkcji wektorowych.

Niech $f: \mathbb{H} \longrightarrow R^n$ będzie daną funkcją określoną na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H} \subset \mathbb{I}^M$ zaś $\nu: \{1, \dots, n\} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{I}$ będzie danym odwzorowaniem renumeracji

Oznaczmy

$\nu(\{1, \dots, n\} \times \mathbb{H}) = \{1, \dots, N\} = \mathbb{H}_{re}$

$\nu(i, (j_1, \dots, j_n)) = k \in \{1, \dots, N\}$

Funkcja $f_{re}: \mathbb{H}_{re} \longrightarrow R$ otrzymana w wyniku renumeracji określona jest

$f_k = f_{i,(j_1, \dots, j_n)}$

gdzie $k \in \{1, \dots, N\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{H}$.

W dalszej części pracy nie będziemy rozróżniać horyzontów i funkcji pierwotnych od tych które zostały otrzymane w wyniku renumeracji.

Dyskretny model dynamiczny zapisany w postaci bezpośredniej ma formę

$$z_k = h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}) \tag{1}$$

gdzie

$k\in H_z$

$t_{D_{tk}}=(t_i : i\in D_{tk}\subset H_t,\ t_i\in R^q)$

$u_{D_{uk}}=(u_i : i\in D_{uk}\subset H_u,\ u_i\in R^m)$

$z_k\in R^p$

Ten sam model po renumeracji wektorowego argumentu i funkcji wektorowych może być zapisany w postaci

$$z_k=h_k(t_{D_{tk}},u_{D_{tk}}) \tag{2}$$

gdzie

$k\in H_z=\{1,\dots N_3\}$

$t_{D_{tk}}=(t_i : i\in D_{tk}\subset H_t=\{1,\dots,N_1\},\ t_i\in R)$

$u_{D_{uk}}=(u_i : i\in D_{uk}\subset H_u=\{1,\dots,N_2\},\ u_i\in R)$

$z_k\in R$

W pracy stosuje się również uproszczone zapisy bezpośredniego modelu dynamicznego w postaci

$$z_k=\bar{h}_k(t,u) \tag{3}$$

gdzie

$k\in H_z=\{1,\dots N_3\}$

$t=t_{H_t}=(t_i : i\in H_t=\{1,\dots,N_1\},\ t_i\in R)$

$u=u_{H_u}=(u_i : i\in H_u=\{1,\dots,N_2\},\ u_i\in R)$

$z_k\in R$

$\bar{h}_k(t,u)$ jest funkcją stałą względem zmiennych $t_{H_t\setminus D_{tk}}$, $u_{H_u\setminus D_{uk}}$ równą $h_k(t_{D_{tk}},u_{D_{uk}})$:

Modele bezpośrednie (1), (2) (3) nazywamy wymuszonymi, odpowiadające im modele swobodne otrzymujemy podstawiając $u_{D_{uk}}=0$.

3. Zbiory zmiennych zgodnych z pomiarami

Niech $\mathbb{H}_t=\{1,\dots,N_1\}$, $\mathbb{H}_u=\{1,\dots,N_2\}$, $\mathbb{H}_z=\{1,\dots,N_3\}$, będą horyzontami odpowiednio zmiennych niepewnych sterowań i pomiarów zaś $\mathbb{D}_t$, $\mathbb{D}_u$, $\mathbb{D}_z$ dowolnymi podzbiorami zbiorów $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$, które w przypadku ogólnym są wynikiem renumeracji problemu pierwotnego (patrz p.2).

Niech $\mathbb{D}=\{i_1,\dots,i_r\}\subseteq\mathbb{H}_z$, $r<N_1$ będzie danym zbiorem. Układ

$$\begin{cases} z_{i_1}=h_{i_1}(t,u) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{i_r}=h_{i_r}(t,u) \end{cases}$$

zapisywać będziemy w postaci uproszczonej

$$z_D=h(t,u) \qquad (4)$$

gdzie $h(t,u)$ jest funkcją wektorową o składowych h_{i_j}, $j=1,\dots,r$.

<u>Definicja 1.</u> Niech dla $\mathbb{D}=\{i_1,\dots i_r\}\subseteq\mathbb{H}_z$, $r<N_1$ będzie określona funkcja $z_D=h(t,g(t))=z(t)$,

i) zbiór $\mathbb{P}=z(\mathbb{T})$ nazywamy zbiorem pomiarów zgodnych ze zbiorem informacyjnym $\mathbb{T}$,

ii) zbiór $\mathbb{C}|z_D=z^{-1}(z_D)$ nazywamy zbiorem zmiennych zgodnych z pomiarami z_D,

iii) zbiór $\mathbb{T}|z_D=\mathbb{T}\cap(\mathbb{C}|z_D)$ nazywamy zbiorem zmiennych zgodnych z pomiarami z_D i zbiorem informacyjnym $\mathbb{T}$,

iv) zbiór $\underline{\mathbb{C}}|\mathbb{D}=\{\mathbb{C}|z_D : z_D\in\mathbb{P}_D\}$ nazywamy rodziną zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami których numery należą do zbioru $\mathbb{D}$.

Zauważmy, że zbiór $\mathbb{C}|z_D$ zależy zarówno od tego które pomiary (określa to zbiór $\mathbb{D}$) występują w z_D jak również od tego jakie są wartości liczbowe tych pomiarów. Rodzina zbiorów $\underline{\mathbb{C}}|\mathbb{D}$ zależy jedynie od zbioru $\mathbb{D}$ określającego numery pomiarów występujących w z_D.

Dokonując następującej segmentacji wektora t,

$$t'_{1\times N_1}=[t'_{1\,1\times r},\ t'_{2\,1\times(N_1-r)}]$$

możemy układ równań (4) przedstawić w postaci

$$z_D=h(t_1,t_2,g(t_1,t_2))$$

Ten sam układ rozwikłany względem grupy zmiennych zawartych w wektorze t_1 ma postać

$$t_1=e(t_2,z_D) \tag{5}$$

która jawnie określa elementy zbioru $\mathbb{C}|z_D$. Traktując z_D jako ustalony parametr i wybierając dowolnie t_2 określamy t_1 (jeśli istnieje) według zależności (5). Para (t_1,t_2) stanowi element zbioru $\mathbb{C}|z_D$.

Warunkiem istnienia postaci (5) w otoczeniu punktu (t_{10},t_{20}) takiego, że $z_D=h(t_{10},t_{20},g(t_{10},t_{20}))$ jest by macierz pochodnych cząstkowych

$$\partial h/\partial t_1=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{11},\dots,\partial h_1/\partial t_{1r} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{11},\dots,\partial h_r/\partial t_{1r} \end{bmatrix}$$

była w punkcie (t_{10},t_{20}) nieosobliwa.

Obliczając różniczkę zupełną zmiennych z_D odpowiednio do modelu (4) otrzymujemy

$$dz_D=(\partial h/\partial t+(\partial h/\partial g)(\partial g/\partial t))dt \tag{6}$$

gdzie

$$\partial h/\partial t=h_t(t,g(t))=\left[\begin{array}{c:c} \partial h_1/\partial t_1,\dots,\partial h_1/\partial t_r & \partial h_1/\partial t_{r+1},\dots,\partial h_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial t_1,\dots,\partial h_r/\partial t_r & \partial h_r/\partial t_{r+1},\dots,\partial h_r/\partial t_{N_1} \end{array}\right]=$$

$$=[H_1(t)\,\vdots\,H_2(t)] \tag{7}$$

$$\partial h/\partial g=h_g(t,g(t))=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial g_1,\dots,\partial h_1/\partial g_{N_2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial g_1,\dots,\partial h_r/\partial g_{N_2} \end{bmatrix}=F(t) \tag{8}$$

$$\partial g/\partial t=g_t(t)=\left[\begin{array}{c:c} \partial g_1/\partial t_1,\dots,\partial g_1/\partial t_r & \partial g_1/\partial t_{r+1},\dots,\partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1,\dots,\partial g_{N_2}/\partial t_r & \partial g_{N_2}/\partial t_{r+1},\dots,\partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{array}\right]=$$

$$=[G_1(t)\,\vdots\,G_2(t)] \tag{9}$$

Ponieważ dla ustalonego pomiaru z_D $dz_D=0$ to układ równań Pfaffa określający rodzinę $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ ma postać

$$(\partial h/\partial t+(\partial h/\partial g)(\partial g/\partial t))dt=0 \tag{10}$$

Wykorzystując wprowadzoną segmentację wektora t oraz oznaczenia odpowiednich macierzy pochodnych cząstkowych możemy rozpatrywany układ przedstawić w postaci

$$H_1(t)dt_1+H_2(t)dt_2+F(t)G_1(t)dt_1+F(t)G_2(t)dt_2=0$$

$$(H_1(t)+F(t)G_1(t))dt_1+(H_2(t)+F(t)G_2(t))dt_2=0 \tag{11}$$

Zakładając dodatkowo nieosobliwość dla każdego $t\in\mathbb{T}$ macierzy $H_1(t)+F(t)G_1(t)$ możemy przekształcić układ (11) do postaci

$$dt_1+R(t)dt_2=0 \tag{12}$$

gdzie

$$R(t)=(H_1(t)+F(t)G_1(t))^{-1}(H_2(t)+F(t)G_2(t))=[r_{ij}(t)]$$

$$i=1,\dots,r\ ,\ j=1,\dots,N_1-r$$

lub do następującego równoważnego układu równań różniczkowych cząstkowych

$$\partial t_{1i}/\partial t_{2j}=-r_{ij}(t),\ i=1,\dots,r\ ,\ j=1,\dots,N_1-r \tag{13}$$

Jeżeli układ (12) jest w pełni całkowalny to przez każdy punkt (t_{10},t_{20}) przechodzi dokładnie jedna rozmaitość całkowa N_1-r wymiarowa.

Związek pomiędzy ustalonym pomiarem z_D a punktem (t_{10},t_{20}) wynika z zależności

$$z_D=h(t_{10},t_{20},g(t_{10},t_{20}))$$

Inaczej każdemu $z_D\in\mathbb{P}_D$ odpowiada dokładnie jeden element rodziny $\mathcal{C}|\mathbb{D}$.

Rozpatrując przypadki szczególne będziemy odróżniać swobodny model układu od modelu wymuszonego. Powodem takiego podejścia jest, że jak okaże się dalej układy równań Pfaffa określające rodziny zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami mogą być dla tych modeli identyczne przy pewnych dodatkowych założeniach.

Przypadek 1

Swobodny liniowy model bezpośredni ma przy uwzglednieniu założeń z p.2 postać

$$z_{oD}=H\,t \tag{14}$$

lub po dokonaniu segmentacji wektora t i macierzy H postać

$$z_{oD}=H_1 t_1 + H_2 t_2 \tag{15}$$

Przypominając, że wektory z_{oD}, t_1 są r wymiarowe i zakładając nieosobliwość macierzy H_1 możemy układ (15) rozwiązać ze względu na t_1 otrzymując

$$t_1=-H_1^{-1}H_2 t_2-H_1^{-1}z_{oD} \tag{16}$$

Widzimy, że w rozpatrywanym przypadku zbiór $\mathbb{C}|z_{oD}$ stanowi N_1-r wymiarowa podprzestrzeń N_1 wymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Przykładowo dla $N_1=3$ i r=1 zbiór $\mathbb{C}|z_{oD}$ jest płaszczyzną zaś dla r=2 i tej samej wartości N_1 reprezentuje go prosta. Uzmienniając parametr z_{oD} otrzymujemy rodzinę $\mathcal{C}|\mathbb{D}$. W pierwszym przypadku (N_1=3, r=1) jej elementami są wzajemnie równoległe płaszczyzny w drugim (N_1=3, r=2) wzajemnie równoległe proste.

Przyrównując do zera różniczkę dz_{oD} wyznaczoną na podstawie modelu (15) otrzymujemy formę różniczkową określającą rodzinę $\mathcal{C}|z_{oD}$.

$$dt_1+H_1^{-1}H_2 dt=0 \tag{17}$$

Określenie elementu tej rodziny tj zbioru $\mathbb{C}|z_{oD}$ wymaga dodatkowo warunku o postaci $t_{10}=t_1(t_{20})$. Związek tego warunku z wartością z_{oD} wynika bezpośrednio z zależności $z_{oD}=H_1 t_{10}+H_2 t_{20}$. W szczególności można przyjąć $t_{20}=0$ i wyznaczyć $t_{10}=H_1^{-1}z_{oD}$.

Przypadek 2

Swobodny nieliniowy model bezpośredni ma postać

$$z_{oD}=h_o(t) \tag{18}$$

Zakładając jak w przypadku ogólnym wymiarowość dim z_{oD} = r i odpowiednio do tego dokonując segmentacji wektora $t'=[t_1', t_2']$ gdzie dim t_1=r, dim $t_2=N_1-r$ a następnie rozwikłując układ (18) względem zmiennych t_1 otrzymujemy zależność

$$t_1=e_o(t_2, z_{oD}) \tag{19}$$

określającą zbiór $\mathbb{C}|z_{oD}$.

Forma różniczkowa określająca rodzinę $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ ma postać

$$(\partial h_o/\partial t)dt=0 \tag{20}$$

gdzie

$$\partial h_o/\partial t=h_{ot}(t)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} \partial h_{o1}/\partial t_1 & ,\dots, & \partial h_{o1}/\partial t_r & \partial h_{o1}/\partial t_{r+1} & ,\dots, & \partial h_{o1}/\partial t_{N_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial h_{or}/\partial t_1 & ,\dots, & \partial h_{or}/\partial t_r & \partial h_{or}/\partial t_{r+1} & ,\dots, & \partial h_{or}/\partial t_{N_1} \end{array}\right]=$$

$$=[H_{o1}(t) \mid H_{o2}(t)] \qquad (21)$$

Uwzględniając podział wektora t na wektory t_1, t_2 odpowiednio o wymiarach r oraz N_1-r i wynikający stąd podział macierzy $\partial h_o/\partial t$ możemy zapisać formę różniczkową (20) w postaci

$$H_{o1}(t)dt_1+H_{o2}(t)dt_2=0 \qquad (22)$$

Przy dodatkowym założeniu nieosobliwości macierzy $H_{o1}(t)$ dla każdego $t\in T$ forma ta przyjmuje postać

$$dt_1+H_{o1}^{-1}(t)\ H_{o2}(t)dt_2=0 \qquad (23)$$

Układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego równoważny formie różniczkowej (23) ma postać

$$\partial t_{1i}/\partial t_{2j}=-r_{oij}(t),\ i=1,\dots,r\ ,\ j=1,\dots,N_1-r$$

gdzie $r_{oij}(t)$ są elementami macierzy

$$R_o(t)=H_{o1}^{-1}(t)\ H_{o2}(t)$$

4. Wybrane własności rodziny $\mathbb{C}|\mathbb{D}$

Definicja 2. Mówimy, że rodzina $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ jest niezależna od funkcji $f\in\mathbb{F}$ gdzie $\mathbb{F}$ jest zbiorem dopuszczalnych funkcji jeżeli określający ją układ równań Pfaffa jest niezależny od funkcji f. Jeżeli

i) f=g, mówimy o niezależności od praw sterowania,

ii) $f=\partial g/\partial t$, mówimy o niezależności od gradientów praw sterowania.

Odpowiednio do powyższej definicji możemy wyróżnić te szczególne postacie układu Pfaffa (10) które odpowiadają niezależności rodziny $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ od praw sterowania lub ich gradientów.

Jeżeli układ (10) ma postać

$$(h_t(t)+h_g(t)g_t(t))dt=0$$

to określona nim rodzina $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ jest niezależna od praw sterowania

$g'(t)=[g_1(t),\dots,g_{N_2}(t)]$.

Jeżeli układ (10) ma postać

$$(h_t(t,g(t))dt=0$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ jest niezależna od gradientów praw sterowania

$$g_t(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_1,\dots,\partial g_1/\partial t_{N_1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_1,\dots,\partial g_{N_2}/\partial t_{N_1} \end{bmatrix}$$

Jeżeli układ (10) ma postać

$$h_t(t)dt=0$$

to określona nim rodzina $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ jest niezależna zarówno od praw sterowania jak i ich gradientów.

Wynik podstawowy dla rozważań tego punktu zawiera następujące

Twierdzenie 1. Jeżeli dla każdego $dz_{H\setminus D}$, $t\in T$, $u\in U$ zachodzi

$$M_2(t,u)dz_{H\setminus D}=0$$

gdzie

$$h_u(t,u)u_z(z_H)=[M_1(t,u)\,\vdots\,M_2(t,u)]$$

$$\partial h/\partial u=h_u(t,u)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1,\dots,\partial h_1/\partial u_{N_2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial u_1,\dots,\partial h_r/\partial u_{N_2} \end{bmatrix}$$

$$\partial u/\partial z=u_z(z_H)=\left[\begin{array}{c:c} \partial u_1/\partial z_1,\dots,\partial u_1/\partial z_r & \partial u_1/\partial z_{r+1},\dots,\partial u_1/\partial z_{N_3} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \partial u_{N_2}/\partial z_1,\dots,\partial u_{N_2}/\partial z_r & \partial u_{N_2}/\partial z_{r+1},\dots,\partial u_{N_2}/\partial z_{N_3} \end{array}\right]$$

to rodzina $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określona jest układem równań Pfaffa postaci

$$h_t(t,g(t))dt=0$$

Dowód. Wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_D=h(t,u)$$

Przypominając, że $u=u(z_H)$, $u=g(t)$ są równoważnymi prawami sterowania możemy wyznaczyć różniczkę zupełną dz_D. Mamy

$$dz_D=h_t(t,g(t))dt+h_u(t,u)u_z(z_H)dz_H$$

Dokonując renumeracji kolumn macierzy u_z możemy drugi ze składników prawej strony powyższego wyrażenia zapisać w postaci

$$h_u(t,u)u_z(z_H)\begin{bmatrix} dz_D \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix}$$

gdzie dz_D jest wektorem różniczek pomiarów których numery należą do zbioru D podobnie $dz_{H\setminus D}$ jest wektorem różniczek pomiarów których numery należą do zbioru $H\setminus D$. Odpowiednie macierze pochodnych cząstkowych mają postacie

$$h_u(t,u)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1,\dots,\partial h_1/\partial u_{N_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial h_r/\partial u_1,\dots,\partial h_r/\partial u_{N_2} \end{bmatrix}$$

$$u_z(z_H)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial u_1/\partial z_1 & ,\dots, & \partial u_1/\partial z_r & \partial u_1/\partial z_{r+1} & ,\dots, & \partial u_1/\partial z_{N_3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial u_{N_2}/\partial z_1 & ,\dots, & \partial u_{N_2}/\partial z_r & \partial u_{N_2}/\partial z_{r+1} & ,\dots, & \partial u_{N_2}/\partial z_{N_3} \end{array}\right]=$$

$$=[U_1(z_H)\,|\,U_2(z_H)]$$

Przedstawiając iloczyn macierzy $h_u(t,u)u_z(z_H)$ w postaci

$$h_u(t,u)u_z(z_H)=[M_1(t,u)\,|\,M_2(t,u)]$$

możemy drugi ze składników w układzie (10) przedstawić w postaci

$$[M_1(t,u)\,|\,M_2(t,u)]\begin{bmatrix} 0 \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix}=M_2(t,u)dz_{H\setminus D}$$

Warunkiem tożsamościowego zerowania się tego składnika jest zerowanie się dla każdego $dz_{H\setminus D}$, $t\in T$, $u\in U$ wektora r wymiarowego $M_2(t,u)dz_{H\setminus D}$.

<u>Twierdzenie 2</u>. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested to $M_2(t,u)\equiv 0$.

<u>Dowód</u>. Łatwo sprawdzić, że elementy macierzy $M_2(t,u)$ będącej drugim blokiem iloczynu macierzy $h_u(t,u)u_z(z_H)$ mają następującą postać szczegółową

$$M_2(t,u)=[m_{2kj}]=[\sum_{l=1}^{N_2}(\partial h_k/\partial u_l)(\partial u_l/\partial z_j)], \tag{24}$$

$$k=1,\dots,r,\quad j=r+1,\dots,N_3$$

Odpowiednio do definicji struktury informacyjnej nested (zawierająca się) jeżeli pomiary których numery należą do zbioru $\mathbb{D}$ są argumentami prawa sterowania to argumenty praw sterowania wpływających na nie powinny się w nich zawierać.

Powracając do postaci (24) wystarczy rozpatrzeć następujące dwa przypadki i) $\partial h_k/\partial u_l \neq 0$ co oznacza, że k-ty pomiar zależy od l-tego sterowania a zatem numery pomiarów stanowiących jego argumenty z definicji struktury nested (zawierającej się) należą do zbioru $\mathbb{D}$ i $\partial u_l/\partial z_j \equiv 0$, $j \in H \setminus \mathbb{D}$, ii) $\partial h_k/\partial u_l = 0$ co oznacza, że k-ty pomiar nie zależy od l-tego prawa sterowania, zatem argumenty tego prawa sterowania mogą być dowolne.

Wyróżnione powyżej przypadki wyczerpują wszystkie możliwości (przy założeniu struktury nested) stąd zawsze jeden z czynników iloczynów stanowiących elementy macierzy $M_2(t,u)$ równy jest zeru i cała macierz jest macierzą zerową.

<u>Wniosek 1</u>. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested (zawierająca się) a wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_D=h(t,u)=h_o(t)+p(u)$$

to rodziny $\mathcal{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa postaci

$$h_{ot}(t)dt=0$$

<u>Dowód</u>. Na podstawie Tw.2 układ równań określający rodzinę $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ ma postać

$$h_t(t,u)dt=0$$

Uwzględniając założoną szczególną postać funkcji h(t,u) otrzymujemy

$$h_{ot}(t)dt=0$$

Wniosek 2. Jeżeli struktura informacyjna jest typu nested (zawierająca się) a wymuszony model bezpośredni jest liniowy względem t i u tj. ma postać

$$z_D=Ht+Pu$$

to rodziny $\mathcal{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa postaci

$$Hdt=0$$

Dowód. Przypadek szczególny Wniosku 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli

i) wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_D=h_o(t)+Pu$$

gdzie $N_2>r$, $P=[P_a,P_b]$, rank $P_a=r$, P_b jest macierzą $r\times(N_2-r)$ wymiarową,

ii) prawa sterowania są liniowymi funkcjami pomiarów

$$u=Kz=[K_1,K_2]\begin{bmatrix} z_D \\ z_{H\setminus D}\end{bmatrix}$$

gdzie K_1, K_2 są macierzami odpowiednio $r\times r$ i $r\times(N_3-r)$ wymiarowymi oraz

$$K_2=[k_{r+1},\dots,k_j,\dots,k_{N_3}]$$

$$k'_j=[k'_{aj},k'_{bj}]$$

$$k'_{aj}=[k_{1j},\dots,k_{rj}]$$

$$k'_{bj}=[k_{r+1,j},\dots,k_{N_2,j}]$$

gdzie $j=r+1,\dots N_3$,

iii) elementy macierzy K_1 są dowolne a elementy macierzy K_2 odpowiednio do podziałów z p i), ii) spełniają zależność

$$k_{aj}=-(P_a)^{-1}P_bk_{bj},\quad j=r+1,\dots,N_3$$

to rodziny $\mathcal{C}_o|\mathbb{D}$, $\mathcal{C}|\mathbb{D}$ określone są tym samym układem równań Pfaffa postaci

$$h_{ot}(t)dt=0$$

Dowód. Macierz M_2 (patrz Tw.1) ma przy założeniach i), ii) postać

$$M_2=PK_2=[P_a,P_b][k_{r+1},\dots,k_j,\dots,k_{N_3}]$$

zaś jej j-tą kolumnę m_{2j} można przedstawić jako

$$m_{2j}=P_ak_{aj}+P_bk_{bj}$$

Z warunku zerowania się macierzy M_2 otrzymujemy

$$P_a k_{aj} + P_b k_{bj} = 0, \quad j=r+1,\dots,N_3$$

stąd przy założeniu nieosobliwości macierzy P_a

$$k_{aj} = (P_a)^{-1} P_b k_{bj}$$

Przypominając, że $N_2 > r$ w każdej kolumnie macierzy K_2, $N_2 - r$ elementów może być wybranych dowolnie, pozostałe r musi spełniać warunek iii). Na elementy macierzy K_1 nie ma żadnych ograniczeń.

W charakterze komentarza zauważmy, że na podstawie Tw.3. nieklasyczna struktura informacyjna nie zmienia tezy Wniosku 1 (układy równań Pfaffa są takie same dla modelu wymuszonego i modelu swobodnego) jeżeli współczynniki wzmocnień przy tych sterowaniach których numery argumentów nie należą do zbioru D spełniają warunek ii).

Zamieszczone poniżej przykłady ilustrują Tw.3 jak również niektóre aspekty Tw.1., 2.

Przykład 1

N_1 dowolne

$N_2 = 1$

$N_3 = 2$

$r = 1, \quad (N_2 = r)$

$M = \{1,2\}, \quad D = \{2\}$

Wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_2 = h_{o2}(t) + p_{21} u_1$$

Prawo sterowania jest liniowe z założenia

$$u_1 = u_1(z_1) = k_{11} z_1$$

Zbiory pomiarów

$$z_D = \{z_2\}$$

$$z_{M \setminus D} = \{z_1\}$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji

$$dz_2 = (\partial h_{o2}(t)/\partial t)dt + p_{21}(\partial u_1(z_1)/\partial z_1)dz_1$$

Warunek zerowania się macierzy M przyjmuje postać (patrz Tw.1, 3)

$PK_2=p_{21}k_{11}=0$

i może być spełniony jedynie dla $k_{11}=0$, co oznacza, że rodzina zbiorów $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ nie zależy od pochodnej prawa sterowania u_1 tylko wtedy jeżeli jest ono stałe jako funkcja z_1.

Przykład 2

N_1 dowolne

$N_2= 2$

$N_3= 3$

$r = 1$, $(N_2>r)$

$\mathbb{H} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{D} = \{3\}$

Wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_3= h_{o3}(t)+p_{31}u_1+p_{32}u_2$$

Prawa sterowania są liniowe z założenia o postaciach

$$u_1= u_1(z_1) = k_{11}z_1$$

$$u_2= u_2(z_2) = k_{22}z_2$$

Zbiory pomiarów

$$z_{\mathbb{D}} = \{z_3\}$$

$$z_{\mathbb{H}\setminus\mathbb{D}}= \{z_1, z_2\}$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji w zapisie macierzowym

$$dz_3=(\partial h_{o3}(t)/\partial t)dt+[p_{31}\ \ p_{32}]\left[\begin{array}{c:cc} \partial u_1/\partial z_3 & \partial u_1/\partial z_1 & \partial u_1/\partial z_2 \\ \partial u_2/\partial z_3 & \partial u_2/\partial z_1 & \partial u_2/\partial z_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} dz_3 \\ dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix} =$$

$$=(\partial h_{o3}(t)/\partial t)dt+[p_{31}\ \ p_{32}]\left[\begin{array}{c:cc} 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} dz_3 \\ dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}$$

Warunek $M_2=PU_2(z)=0$ przyjmuje postać

$$p_{31}k_{11} + p_{32}k_{22}=0$$

Rodzina zbiorów $\mathbb{C}|\mathbb{D}$ nie zależy od gradientów liniowych z założenia praw sterowania $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$ jeżeli współczynniki modelu bezpośredniego łącznie ze współczynnikami wzmocnienia k_{11}, k_{22} spełniają związek

$$p_{31} k_{11} + p_{32} k_{22}=0$$

Przykład 3

N_1 dowolne

$N_2= n$

$N_3= n+1$

$r = 1$, $(N_2>r$ dla $n>r)$

$\mathbb{H} = \{1,\ldots,n+1\}$, $\mathbb{D} = \{n+1\}$

Wymuszony model bezpośredni ma postać

$$z_{n+1}= h_{o,n+1}(t)+Pu=h_{o,n+1}(t)+ \sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i}u_i$$

Prawa sterowania są liniowe z założenia o postaciach

$$u_i= u_i(z_i) = k_{ii}z_i,\ \ i=1,\ldots,n$$

Zbiory pomiarów

$$z_D = \{z_{n+1}\}$$

$$z_{H\setminus D}= \{z_1,\ldots,z_n\}$$

Różniczkowa postać modelu po renumeracji w zapisie macierzowym

$$dz_{n+1}=(\partial h_{o,n+1}(t)/\partial t)dt+ P \left[\begin{array}{c|ccc} \partial u_1/\partial z_{n+1} & \partial u_1/\partial z_1 & \ldots & \partial u_1/\partial z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial u_n/\partial z_{n+1} & \partial u_n/\partial z_1 & \ldots & \partial u_n/\partial z_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} dz_D \\ \\ dz_{H\setminus D} \end{bmatrix}$$

Uwzględniając przyjętą strukturę informacyjną i założenie o liniowości praw sterowania, warunek $M_2=PU_2(z)=0$ przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i}k_{ii} = 0$$

Zakładając dodatkowo ustalone prawo sterowania $k_{ii}=k>0$, $i=1,\ldots,n$ można rozpatrywany warunek przekształcić do postaci

$$\sum_{i=1}^{n} p_{n+1,i} = 0$$

5. Podsumowanie

Wyznaczone w pracy warunki niezależności rodziny zbiorów zmiennych zgodnych z pomiarami od praw sterowania i ich gradientów dają nową konstruktywną definicję i interpretację pojęcia struktury informacyjnej. Pokazano, że jeżeli struktura informacyjna jest typu nested w znaczeniu klasycznym to spełnione są warunki otrzymane w pracy.

Otrzymane wyniki w szerszej interpretacji oznaczają, że pojęcie struktury informacyjnej i jej różne typy, jak również kontrprzykład Witsenhausena nie muszą być wiązane z losowym modelem niepewności.

LITERATURA

[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21 (1975), pp. 875-863.

[2] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MIT, Cambridge, 1971.

[3] Bertsekas D.P., Rhodes I.B.: On the minimax reachability of target sets and target tubes. Automatica, vol.7, 1971 pp.233-247.

[4] Bertsekas D.P.: Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 117-123.

[5] Bertsekas D. P.:"Dynamic Programming and Stochastic Control". Academic Press, 1976.

[6] Billingsley P.:"Probability and Measure". John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto 1979. Tłum. polskie "Prawdopodobieństwo i miara" PWN, Warszawa 1987.

[7] Brdyś M.A., Ulanicki B.: Separation principle in optimizing control of state-constrained dynamical systems under bounded uncertainty. Materiały Problemu RP.I.02.

[8] Federer H.:"Geometriczeskaja Tieoria Miery". Nauka, Moskwa, 1987 tłumaczenie z angielskiego.

[9] Flanders H.:"Differential forms with applications to the physical sciences". Academic Press, New York-Londyn 1963. Tłum. polskie "Teoria form różniczkowych", PWN, Warszawa, 1969.

[10] Goetz A., Huskowski T., Krasnodębski R., Pidek-Łopuszańska H., Rochowski M.:"Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania". WNT, Warszawa, 1965.

[11] Ho Y. C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol.68, (1980), pp.644-654.

[12] Ho Y. C., Kastner M.P., Wong E.: Teams signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[13] Ho Y. C., Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp. 15-22.

[14] Ho Y. C., Hexner G.: Redundancy in team problems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp.439-440.

[15] Ho Y. C., Chang T. S.:Another Look at the nonclassical information structure problem. IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1980), pp. 537-540.

[16] Kamke E.:"Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung fur eine Gesuchte Function". Leipzig 1959.

[17] Kurzhanskii A.B.: "Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[18] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. I, II. Probl. Control & Information Theory, No.6, 1980, No.1, 1981.

[19] Mori S.,Chong C.Y.: Numerical solutions to Witsenhausen problem. Proc. of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas 1984, pp.828-829.

[20] Piet-Lahanier, Walter E.: Practical implementation of an exact and recursive algorithm for characterizing likelihood sets. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris, 1988.

[21] Sandell N.R., Jr., Athans M.: Solution of some nonclassical LQG stochastic decision problems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19 (1974), pp. 108-116.

[22] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[23] Stratonovich R.L.:On the theory of optimal control: Sufficient coordinates. Automat. Remonte Control (USSR), vol.23, January 1963.

[24] Striebel C.T.: Sufficient statistics in the optimal control of stochastic systems. J. Math. Anal. Appl., vol.12, 1965 pp.576-592.

[25] Tse E., Bar-Shalom Y., Meier L.: Wide-sense adaptiv dual control for nonlinear stochastic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 98-108.

[26] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control, IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp. 817-819.

[27] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence -, Trans. SCiE, 12(1976), pp. 89-95.

[28] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp.1-16.

[29] Witsenhausen H.S.: Counterexample in stochastic optimal control. SIAM J. Control, Vol.6., 1968, pp. 131-147.

[30] Wojciechowski K.:Równoważność praw sterowania optymalnego w strukturach CL i OLF dla procesów dyskretnych przy niepewności ograniczonej. Z. N. Pol. Śl., Z.74, 1984.

[31] Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek centrowanego zbioru T, złożone do publikacji w Z.N. Pol. Śl.

[32] Yoshikawa T.: Decomposition of dynamic team decision problems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 627-632.

Recenzent: Doc.dr hab.inż. Wojciech MITKOWSKI

Wpłynęło do Redakcji 20.01.1991

Abstract

In the paper of realizations for uncertain variables consistent with measurement data for discrete dynamical model and bounded uncertainty are defined. The set can be defined explicitly by the system of Pfaff equations. The differential from of the set of variables consistent with measurements enables to find conditions which guarantee that the family of sets generated bby this form is independent od the control strategies and their gradients. It has been prowed that one of the conditions of the independence is the nested information structure which is created by the control strategies with the plant model linear with respect to the control variables.