ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: AUTOMATYKA z. 108 Nr kol. 1150

Konrad WOJCIECHOWSKI

NOWE PODEJŚCIE DO SYNTEZY PRAW STEROWANIA DLA PRZYPADKU NIEKLASYCZNEJ STRUKTURY INFORMACYJNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono nowe podejście do syntezy prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej, prowadzonej na podstawie bezpośredniego modelu sterowanego obiektu oraz przy nieklasycznej strukturze informacyjnej. Polega ono na poszukiwaniu tzw. bezpośredniego prawa sterowania przy uwzględnieniu ograniczeń informacyjnych zapewniających zgodność z zadeklarowanymi argumentami praw sterowania. W pracy pokazano, że zadanie syntezy praw sterowania przy nieklasycznej strukturze informacyjnej sprowadza się do wektorowego problemu wariacyjnego przy ograniczeniach w postaci układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Wprowadzenie założenia o klasycznej strukturze informacyjnej powoduje dekompozycję tego problemu na wzajemnie niezależne problemy skalarne. W pracy zamieszczono obszerny przykład wzorowany na tzw. "kontrprzykładzie Witsenhausena" ilustrujący przedstawiane zagadnienia.

NEW APPROACH TO THE CONTROL STRATEGIES DESIGN FOR THE CASE OF NON-CLASSICAL INFORMATION STRUCTURE

Summary. In the paper a new approach to the control strategies design in the presence of bounded unceratainties based on the direct model of the controlled plant with a nonclassical information structure is presented. There has been proved that problem of the control strategies desing for the nonclassical infromation tructure can be led to the vector variational problem with constraints in the from of first order partial differential equations.

НОВЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ

Резюме

В работе представлен новый подход к синтезу закона управления в условиях ограниченной неопределенности. Синтез проводится на основе непосредственной модели управляемого объекта и для случая неклассической информационной структуры. Доказывается, что синтез законов управления в таком случаесводится к векторной вариационной проблеме с ограничениями в виде системы частных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Wprowadzenie

Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności jest stale aktualną dziedziną badań. Problem syntezy praw sterowania rozpatrywany w pracy posiada cechy wyróżniające go spośród innych problemów tego typu. Są nimi przyjęty model niepewności ograniczonej w powiązaniu z bezpośrednim modelem sterowanego obiektu oraz nowe podejście do problemu syntezy praw sterowania w przypadku nieklasycznej struktury informacyjnej. Polega ono na poszukiwaniu tzw. bezpośredniego prawa sterowania przy uwzględnieniu ograniczeń informacyjnych zapewniających zgodność z zadeklarowanymi argumentami praw sterowania.

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie najbardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właśnie modelu niepewności należą do danego zbioru. Struktura tego zbioru może być dowolna.

Pierwsze próby wykorzystania tego modelu można znaleźć w pracach [33], [25], [11], dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [4], [5] również z zakresu teorii sterowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty", mając na uwadze związek z teorią zbiorów rozmytych. Model niepewności ograniczonej bywa też nazywany "non-probabilistic model of uncertainty" lub "set-theoretical model", [2], [3]. W rozumieniu intuicyjnym model niepewności ograniczonej wykorzystywany był również w pracach [36-44].

Modele niepewności ograniczonej i losowej mogą być traktowane w pełni jednolicie w kategoriach teorii miary [7], [8].

Wyniki uzyskane w teorii sterowania i dotyczące problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności dotyczą głównie problemu liniowo-kwadratowego (LQ) przy niepewności o modelu losowym.

Podobnie jak problem syntezy praw sterowania, również definicja struktury informacyjnej [13] oraz kontrprzykład Witsenhausena [34] [21], gdzie dodatkowo zakłada się rozkłady normalne, podawane są w kontekście losowego modelu niepewności. Sugeruje to, że model ten stanowi istotny element problemu i wpływa jakościowo na jego rozwiązanie co jak pokazano w pracy nie jest słuszne.

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej ograniczony zbiór $\mathbb{T}$ określa łacznie możliwe wartości zmiennych niepewnych. Zbiory informacyjne typu $\mathbb{T}$ pozwalają na formułowanie problemów syntezy prawa sterowania w przypadku nieklasycznej struktury informacyjnej, jak również na nową interpretację istoty tej struktury przez wprowadzenie tzw. ograniczeń informacyjnych.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy w p.2 ograniczono się do problemu renumeracji pozwalającej na jednolite traktowanie tzw. modeli 1D i MD, oraz problemu modeli bezpośrednich.

Definicje prawa sterowania i bezpośrednich praw sterowania zamieszczono w p.3 wraz z wyprowadzeniem tzw. ograniczeń informacyjnych które mogą być interpretowane jako warunki równoważności dla bezpośredniego prawa sterowania.

W p.4 przedstawiono sformułowanie problemu syntezy praw sterowania na podstawie modelu bezpośredniego oraz zamieszczono Tw.1 określające problem wariacyjny równoważny sformułowanemu problemowi syntezy wraz z W.1 określającym warunki przy których problem ten ulega dekompozycji.

Punkt 5 zawiera obszerny przykład ilustrujący kolejno wszystkie rozpatrywane w pracy zagadnienia. Przykład ten jest odpowiednikiem tzw. "kontrprzykładu Witsenhausena" znanego w teorii sterowania stochastycznie optymalnego.

2. Zagadnienia pomocnicze

Niech $\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych zaś $\mathbb{N}^M=\mathbb{N}\times...\times\mathbb{N}$ iloczynem kartezjańskim M egzemplarzy zbioru $\mathbb{N}$.

Skończenie elementowe zbiory $\mathbb{H}_t \subset \mathbb{I}^{M_1}$, $\mathbb{H}_u \subset \mathbb{I}^{M_2}$, $\mathbb{H}_z \subset \mathbb{I}^{M_3}$, nazywamy odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów. Ich elementami są ciągi: $i_1=(i_1,\dots i_{M_1})$, $i_2=(i_1,\dots i_{M_2})$, $i_3=(i_1,\dots i_{M_3})$. W pracy wyróżniamy dodatkowo podzbiory $\mathbb{D}_t \subset \mathbb{H}_t$, $\mathbb{D}_u \subset \mathbb{H}_u$, $\mathbb{D}_z \subset \mathbb{H}_z$ oraz rodzinę zbiorów $\mathbb{D}_z$ oznaczoną przez H_z.

Na zbiorach $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$ określone są funkcje (ciągi) rozpatrywane w pracy. Podstawowymi są:

Zmienne niepewne

$t:\mathbb{H}_t \to R^q$

Sterowanie

$u:\mathbb{H}_u \to R^m$

Pomiary

$z:\mathbb{H}_z \to R^p$

Zauważmy, że ogólnie funkcja (ciąg) $f:\mathbb{H} \to R^n$ określona na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H} \subset \mathbb{I}^M$ może być przedstawiona w postaci wektora blokowego, w którym n wymiarowe składowe blokowe odpowiadają wartościom funkcji (ciągu) dla kolejnych (według ustalonego porządku) argumentów wybieranych ze zbioru $\mathbb{H}$.

Odpowiednio do powyższej uwagi w pracy stosuje się zapisy

$f_{\mathbb{D}}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}$, przy ustalonym porządku w zbiorze $\mathbb{D}$,

$f_{\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$, gdzie z założenia $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{H}$ oraz $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2$. Porządek w zbiorze $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_2$ jest ustalony.

W szczególnym przypadku, gdy M=1, stosuje się równoważne zapisy:

$f^k = (f'_1, \dots, f'_k)$,

$f^{k \setminus l} = (f'_{l+1}, \dots, f'_k)$, $k>l$.

Wielowymiarowy argument dyskretny w powiązaniu z wektorową postacią funkcji (ciągów) t, u z opisuje przejrzyście realne problemy sterowania oraz podejmowania decyzji. Przykładowo w dwupoziomowym problemie decyzyjnym wygodnie jest "numerować" poszczególne decyzje parami liczb, z których pierwsza oznacza numer poziomu decyzyjnego, druga zaś dyskretną chwilę czasu. Decyzja przyporządkowana określonej powyżej parze liczb może być wektorem m-wymiarowym.

W rozważaniach teoretycznych, a szczególnie w zapisach operowanie wielowymiarowym argumentem dyskretnym w powiązaniu z wektorową strukturą funkcji nie jest wygodne. Z tego względu wprowadzamy procedurę renumeracji dotyczącą zarówno wielowymiarowego argumentu, jak i funkcji wektorowych.

Ogólnie niech $f:\mathbb{H}\mapsto R^n$ będzie daną funkcją określoną na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H}\subset\mathbb{J}^M$, zaś $\nu:\{1,\dots,n\}\times\mathbb{H}\mapsto\mathbb{J}$ będzie danym odwzorowaniem renumeracji.

Oznaczmy

$\nu(\{1,\dots,n\}\times\mathbb{H})=\{1,\dots,N\}=\mathbb{H}_{re}$

$\nu(i,(j_1,\dots,j_n))=k\in\{1,\dots,N\}.$

Funkcja $f_{re}:\mathbb{H}_{re}\to R$ otrzymana w wyniku renumeracji określona jest:

$f_k=f_{i,(j_1,\dots,j_n)},$

gdzie: $k\in\{1,\dots,N\}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{H}$.

W dalszej części pracy nie będziemy rozróżniać horyzontów i funkcji pierwotnych od tych, które zostały otrzymane w wyniku renumeracji.

Dyskretny liniowy i stacjonarny model dynamiczny zapisany w postaci bezpośredniej ma formę:

$$z_k=h_k(t_{D_{tk}},u_{D_{tk}}), \tag{1}$$

gdzie:

$k\in\mathbb{H}_z$

$$t_{D_{tk}}=(t_i:i\in D_{tk}\subset\mathbb{H}_t,\ t_i\in R^q) \tag{2}$$

$$u_{D_{uk}}=(u_i:i\in D_{uk}\subset\mathbb{H}_u,\ u_i\in R^m) \tag{3}$$

$z_k\in R^p.$

Ten sam model po renumeracji wektorowego argumentu i funkcji wektorowych może być zapisany w postaci:

$$z_k = h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}), \tag{4}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots N_3\}$

$$t_{D_{tk}} = (t_i : i \in D_{tk} \subset H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R) \tag{5}$$

$$u_{D_{uk}} = (u_i : i \in D_{uk} \subset H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R) \tag{6}$$

$z_k \in R.$

W pracy stosuje się również uproszczone zapisy bezpośredniego modelu dynamicznego w postaci:

$$z_k = \bar{h}_k(t, u), \tag{7}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots N_3\}$

$$t = t_{H_t} = (t_i : i \in H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R) \tag{8}$$

$$u = u_{H_u} = (u_i : i \in H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R) \tag{9}$$

$z_k \in R.$

$\bar{h}_k(t, u)$ jest funkcją stałą względem zmiennych $t_{H_t \setminus D_{tk}}$, $u_{H_u \setminus D_{uk}}$ równą $h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{uk}})$.

Modele bezpośrednie (1), (4), (7) nazywamy modelami wymuszonymi; odpowiadające im modele swobodne otrzymujemy podstawiając $u_{D_{uk}} = 0$.

3. Różniczkowe ograniczenia informacyjne

<u>Definicja 1</u> Niech

i) $H_u = \{1, \ldots, N_2\}$, $H_z = \{1, \ldots, N_3\}$ będą odpowiednio horyzontami sterowań i pomiarów, D_u, D_z ich podzbiorami, zaś $\mathcal{H}_z$ rodziną podzbiorów D_z,

ii) $\gamma : H_z \to \mathcal{H}_z$ będzie przyporządkowaniem informacyjnym,

iii) $z_i = h_i(t, u_{D_u})$

$z_{oi}=h_{oi}(t)$,

gdzie $i\in H_z$ będą odpowiednio wymuszonym i swobodnym modelem bezpośrednim.

Funkcję

$u_i=u_i(z_{\gamma(i)})$, $i\in H_u$

nazywamy i-tym prawem sterowania.

Definicja 2. Niech $H_t=\{1,\dots,N_1\}$, $H_u=\{1,\dots,N_2\}$ będą odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych i sterowań. Funkcję $g_i=g_i(t)$ nazywamy i-tym bezpośrednim prawem sterowania.

Funkcję $g_i(t)$ nazywamy równoważną funkcji $u_i(z_{\gamma(i)})$, gdzie $i\in H_u$, jeżeli wykorzystując równania modelu bezpośredniego można przekształcić ją do postaci funkcji $u_i(z_{\gamma(i)})$.

Niech $t'=(t_1',t_2')$ będzie segmentacją wektora t taką, że $\dim t_1=r$, $\dim t_2=N_1-r$.

Układ funkcji skalarnych (dla uproszczenia pomijamy dalej indeks $i\in H_u$ określający numer bezpośredniego prawa sterowania)

$g(t_1',t_2')$

$z_1(t_1',t_2')$

....

$z_r(t_1',t_2')$

z których każda określona jest w zbiorze $T\subset R^{N_1}$ i posiada w nim ciągłe pochodne do rzędu drugiego włącznie, jest funkcjonalnie zależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$J=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial g_i/\partial t_{11} & \dots & \partial g_i/\partial t_{1r} & \partial g_i/\partial t_{2,r+1} & \dots & \partial g_i/\partial t_{2,N_1} \\ \hline \partial z_1/\partial t_{11} & \dots & \partial z_1/\partial t_{1r} & \partial z_1/\partial t_{2,r+1} & \dots & \partial z_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{11} & \dots & \partial z_r/\partial t_{1r} & \partial z_r/\partial t_{2,r+1} & \dots & \partial z_r/\partial t_{2,N_1} \end{array}\right] \tag{10}$$

w każdym punkcie $(t_1'.t_2')\in T$ posiada rząd nie wyższy niż r. Oznaczmy:

$B_1(t)=[\partial g_i/\partial t_{11}\ \dots\partial g_i/\partial t_{1r}]$

$B_2(t)=[\partial g_i/\partial t_{2,r+1}\dots\partial g_i/\partial t_{2,N_1}]$

$$A_1(t)=\begin{bmatrix} \partial z_1/\partial t_{11} & \dots \partial z_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{11} & \dots \partial z_r/\partial t_{1r} \end{bmatrix}$$

$$A_2(t)=\begin{bmatrix} \partial z_1/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial z_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & \vdots \\ \partial z_r/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial z_r/\partial t_{2,N_1} \end{bmatrix}$$

Macierze $A_1(t)$, $A_2(t)$ wyznaczane są na podstawie funkcji

$z_i=z_i(t)$, $i=1,\dots,r$.

Zauważmy, że te same macierze mogą być wyznaczone również na podstawie funkcji

$z_i=h_i(t,g(t))$, $i=1,\dots,r$,

gdzie $g(t)$ jest funkcją wektorową tj $g(t)=[g_1(t),\dots,g_{N_2}(t)]$. Mamy zatem

$$A_1(t)=H_1(t)+F(t)G_1(t), \tag{11}$$

$$A_2(t)=H_2(t)+F(t)G_2(t), \tag{12}$$

gdzie:

$$H_1(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{11} & \dots \partial h_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{11} & \dots \partial h_r/\partial t_{1r} \end{bmatrix}$$

$$H_2(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial h_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & \vdots \\ \partial h_r/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial h_r/\partial t_{2,N_1} \end{bmatrix}$$

$$F(t)=\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial g_1 & \dots \partial h_1/\partial g_{N_2} \\ \vdots & \vdots \\ \partial h_r/\partial g_1 & \dots \partial h_r/\partial g_{N_2} \end{bmatrix}$$

$$G_1(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_{11} & \dots \partial g_1/\partial t_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_{11} & \dots \partial g_{N_2}/\partial t_{1r} \end{bmatrix}$$

$$G_2(t)=\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial g_1/\partial t_{2,N_1} \\ \vdots & \vdots \\ \partial g_{N_2}/\partial t_{2,r+1} & \dots \partial g_{N_2}/\partial t_{2,N_1} \end{bmatrix}$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia można przepisać macierz J w postaci:

$$J=\left[\begin{array}{c|c} B_1(t) & B_2(t) \\ \hline A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Zakładamy, że pomiary $z_i(t)$, $i=1,\dots r$ tworzą układ funkcjonalnie niezależny, zatem rząd macierzy $A(t)=[A_1(t)\ A_2(t)]$ wynosi r oraz, że r pierwszych kolumn tej macierzy tworzy układ liniowo niezależny. Inaczej zakładamy, że dla każdego $t\in\mathbb{T}$ rząd macierzy $A_1(t)$ jest równy r.

Na to, by rząd macierzy J był również r, wystarczy zapewnić wobec powyższego, by wyznacznik każdej macierzy uzyskanej przez dopisanie do macierzy

$$\left[\begin{array}{c} B_1(t) \\ \hline A_1(t) \end{array}\right]$$

dowolnej kolumny

$$\left[\begin{array}{c} B_{2j}(t) \\ \hline A_{2j}(t) \end{array}\right], \quad j=r+1,\dots,N_1$$

był równy zeru. Wykorzystując wzór na wyznacznik macierzy blokowej otrzymujemy warunek:

$$\det(B_{2j}(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t))\det A_1(t)=0, \ j=r+1,\dots,N_1.$$

Ponieważ z założenia $\det A_1(t)\neq 0$ oraz $B_{2j}(t)$ jest funkcją skalarną, to otrzymany warunek upraszcza się do postaci:

$$B_{2j}(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0, \ j=r+1,\dots,N_1.$$

Zauważmy, że powyższy układ warunków można zapisać łącznie w następującej postaci macierzowej:

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0. \tag{13}$$

Uwzględniając dodatkowo wyrażenia (11), (12) dla macierzy $A_1(t)$, $A_2(t)$ otrzymujemy:

$$B_2(t)-B_1(t)(H_1(t) + F(t)\ G_1(t))^{-1}(H_2(t) + F(t)\ G_2(t))=0. \tag{14}$$

Warunek (13) lub (14) zapewnia, że i-te bezpośrednie prawo sterowania $g_i(t)$ jest funkcjonalnie zależne od pomiarów $z_D=(z_1,\dots,z_r)$ przyporządkowanych mu przez odwzorowanie γ, tj $\gamma(i)=\mathbb{D}$. Warunek (14) nazywany jest różniczkowym ograniczeniem informacyjnym odpowiadającym prawu sterowania g_i.

4. Problem syntezy bezpośredniego prawa sterowania

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny bezpośredni model dynamiczny określony w horyzoncie $\mathbb{H}_u$ ma postać:

$$z_k = h_k(t,u),$$

gdzie:

$$k\in\mathbb{H}_z=\{1,\dots,N_3\},$$

$$t=\mathrm{col}(t_i : i\in\mathbb{H}_t=\{1,\dots,N_1\},\ t_i\in R),$$

$$u=\mathrm{col}(u_i : i\in\mathbb{H}_u=\{1,\dots,N_2\},\ u_i\in R),$$

$$h_k: R^{N_1}\times R^{N_2}\to R,$$

ii) wartości zmiennych t nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T}\subset R^d$,

iii) prawo sterowania ma postać:

$$u_k=u_k(z_{oD_k}),\quad k\in\mathbb{H}_u,$$

gdzie

$$\gamma:\mathbb{H}_u\to\mathcal{H}_z,\ \gamma(k)=\mathbb{D}_k,\ \mathcal{N}(\mathbb{D}_i)=r_i$$

jest danym przyporządkowaniem informacyjnym,

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q=\frac{1}{m^o}\sum_{k=1}^{k=N_2}\int_{\mathbb{T}}(a_k u_k^2+u_k y_k)dt,$$

gdzie dla $k\in H_u$

$a_k \in R,\ a_k > 0,$

$y_k : R^{N_1} \rightarrow R,$

$m^{o} = \int_{T} dt,$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k = u_k(z_{oD_k})$, $k\in H_u$ takich, że odpowiadająca im wartość kryterium q^{*} jest minimalna.

Twierdzenie 1. Problemowi syntezy praw sterowania odpowiada problem wariacyjny o postaci:

$$\begin{cases} \min\limits_{g} \dfrac{1}{m^{o}} \sum\limits_{k=1}^{k=N_2} \int\limits_{T} (a_k\, g_k^2 + g_k y_k)dt, \\ f(t, g, g_t) = 0, \end{cases}$$

gdzie g_k jest k-tym bezpośrednim prawem sterowania,

$g_k : R^{N_1} \rightarrow R,$

$g_{kt} = \mathrm{row}(\partial g_k / \partial t),$

$g = \mathrm{col}(g_i : i\in H_u = \{1, \ldots, N_2\}),$

$g_t = [g_{it} : i\in H_u = \{1, \ldots, N_2\}],$

$f : R^{N_1} \times R^{N_2} \times R^{N_2 \times N_1} \rightarrow R^{p},\ p = \sum\limits_{k=1}^{k=N_2} (N_1 - r_i)$

Funkcja f jest p - wymiarową funkcją układu ograniczeń, określoną na podstawie modelu i) i przyporządkowania informacyjnego γ.

Dowód. Odpowiednio do rozważań z p.3 funkcja $g_i(t)$ jest równoważna danej funkcji $u_i(z_{D_i})$, jeżeli spełniony jest warunek (13) lub (14) nazwany różniczkowym ograniczeniem informacyjnym. Jeżeli zbiór z_{D_i} zawiera r_i

pomiarów skalarnych to omawiany warunek stanowi N_i-r_i równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Łącznie warunki, jak omówiony dla $i\in\{1,\dots,N_2\}$, dają ograniczenie $f(t,g,g_t)=0$ dla całego problemu.

Wniosek 1. Jeżeli układ ograniczeń

$$f(t,g,g_t)=0$$

może być przedstawiony w postaci:

$$f_i(t,g_i,g_{it})=0,\ i\in\mathbb{H}_u=\{1,\dots,N_2\},$$

to problemowi syntezy praw sterowania odpowiada zbiór wzajemnie niezależnych problemów wariacyjnych

$$\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{g_i} \int\limits_{\mathbb{T}} (a_i g_i^2 + g_i y_i)dt \\ f_i(t,g_i,g_{it})=0. \end{array}\right.$$

$$i\in\mathbb{H}_u$$

Dowód. Funkcje g_k $k\in\mathbb{H}_u=\{1,\dots,N_2\}$ występujące w problemie wariacyjnym z Tw.1 mogą być zależne jedynie poprzez ograniczenia $f(t,g,g_t)=0$. Jeżeli ograniczenie to dekomponuje się na zbiór ograniczeń $f_i(t,g_i,g_{it})=0$ takich, że zmiana funkcji g_i zmienia tylko "własne" ograniczenie, to cały problem wariacyjny dekomponuje się na N_2 wzajemnie niezależnych częściowych problemów wariacyjnych.

5. Przykład

Przykładowy dyskretny stacjonarny model dynamiczny określony w horyzoncie $\mathbb{H}=\{1,2,3\}$ ma postać:

$$\begin{aligned} x_2 &= x + u_1,\ x \\ x_3 &= x_2 + u_2, \\ z_1 &= x, \\ z_2 &= x_2 + v, \end{aligned} \tag{a}$$

gdzie wszystkie zmienne są skalarami. Model ten może być przekształcony do następującej postaci bezpośredniej:

$$z_1 = x,$$
$$z_2 = x + v + u_1. \qquad (b)$$

Wartości zmiennych $t=(x,v)$ nie są znane, wiadomo natomiast, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T}\subset R^2$.

Prawa sterowania mają postacie:

$$u_1=u_1(z_1),$$
$$u_2=u_2(z_2).$$

Wskaźnik jakości ma postać:

$$q= \int_{\mathbb{T}} (k^2(u_1)^2 + (x_3)^2)dt.$$

Należy znaleźć prawa sterowania $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$ nadające przyjętemu wskaźnikowi wartość minimalną.

Sformułowany jak powyżej problem syntezy praw sterowania jest zmodyfikowaną wersją tzw. "kontrprzykładu Witsenhausena". Modyfikacja polega na zastąpieniu modelu niepewności losowej dla niezależnych i normalnych zmiennych losowych modelem niepewności ograniczonej przy dowolnym zbiorze $\mathbb{T}$. Dodatkowo dla uzyskania jednolitości z oznaczeniami stosowanymi w pracy "przesunięto" o 1 indeksację stanu i pomiarów, a zamiast równania $x_3=x_2-u_2$ przyjęto $x_3=x_2+u_2$.

Przyjęty wskaźnik jakości można przekształcić wykorzystując równania stanu do następującej postaci bezpośredniej:

$$q= \int_{\mathbb{T}}\left([u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 1+k^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} +2 \ [x \ x \ ] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + x^2\right)dt.$$

Podstawiając

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

przekształcamy wskaźnik q do postaci odpowiadającej założeniom w sformułowaniu problemu syntezy prawa sterowania.

$$q=\int_{T}\left([p_1\ p_2]\begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + 2\,[0\ x]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + x^2\right)dt=$$

$$= \int_{T}(k^2p_1^2 + p_2^2 + 2xp_2 + x^2)dt.$$

Zastępując minimalizację względem funkcji $u_1(z_1)$, $u_2(z_2)$, minimalizacją względem $g_1(x,v)$, $g_2(x,v)$ wprowadzamy ograniczenia informacyjne. Używając ogólnych oznaczeń dla zachowania spójności z oznaczeniami p.3 mamy kolejno:

$N_1=2$

$N_2=N_3=2$

$\mathbb{H}_t=\{1,2\}$

$\mathbb{H}_u=\mathbb{H}_z=\{1,2\}$.

Model bezpośredni dla całego horyzontu $\mathbb{H}_z$ ma postać:

$$z_1=t_1$$

$$z_2=t_1+t_2+u_1. \tag{a}$$

Prawa sterowania

$u_1=u_1(z_1)$, $\mathbb{D}_1=\{1\}$

$u_2=u_2(z_2)$, $\mathbb{D}_2=\{2\}$.

Bezpośrednie prawa sterowania mają postać:

$g_1=g_1(t_1,t_2)$

$g_2=g_2(t_1,t_2)$.

Macierz blokowa J dla bezpośredniego prawa sterowania g_1 ma postać:

$$\left[\begin{array}{c|c} \partial g_1/\partial t_1 & \partial g_1/\partial t_2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Warunek

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}A_2=0$$

przyjmuje postać:

$$\partial g_1/\partial t_2 = 0.$$

Macierz blokowa J dla bezpośredniego prawa sterowania g_2 ma postać:

$$\left[\begin{array}{c|c} \partial g_2/\partial t_1 & \partial g_2/\partial t_2 \\ \hline 1+\partial g_1/\partial t_1 & 1+\partial g_1/\partial t_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B_1(t) & B_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{array}\right].$$

Warunek

$$B_2(t)-B_1(t)A_1^{-1}(t)A_2(t)=0$$

po podstawieniu odpowiednich macierzy daje ograniczenie różniczkowe w postaci:

$$\partial g_2/\partial t_2 - \partial g_2/\partial t_1(1+\partial g_1/\partial t_1)^{-1}(1+\partial g_1/\partial t_2)=0.$$

Uwzględniając $\partial g_1/\partial t_2=0$ i mnożąc obustronnie przez $-(1+\partial g_1/\partial t_1)$ otrzymujemy:

$$\partial g_2/\partial t_1 - \partial g_2/\partial t_2(1+\partial g_1/\partial t_1)=0$$

lub:

$$(\partial g_2/\partial t_1)/(\partial g_2/\partial t_2)-1=\partial g_1/\partial t_1.$$

Łącznie układ ograniczeń różniczkowych dla funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$ ma postać:

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial t_2 = 0 \\ (\partial g_2/\partial t_1)/(\partial g_2/\partial t_2)-1=\partial g_1/\partial t_1. \end{cases} \tag{b}$$

Drugie z ograniczeń tego układu jest zależne zarówno od funkcji $\partial g_2/\partial t_1$, $\partial g_2/\partial t_2$, jak również od funkcji $\partial g_1/\partial t_1$.

Powracając do oznaczeń stosowanych w ramach przykładu podstawiamy

$t_1=x$

$t_2=v$,

otrzymując następujący układ

$$\begin{cases} \partial g_1/\partial v = 0 \\ \partial g_2/\partial x - (\partial g_2/\partial v)(1+(\partial g_1/\partial x)) = 0 \end{cases} \tag{c}$$

Dodatkowo podstawiamy

$g_1=p_1$,

$g_2=p_2-p_1$,

otrzymując następujące ograniczenie informacyjne dla funkcji $p_1(x,v)$, $p_2(x,v)$.

$$\begin{cases} \partial p_1/\partial v = 0 \\ \partial p_2/\partial x - \partial p_2/\partial v - (\partial p_1/\partial x)(1+(\partial p_2/\partial v)) = 0. \end{cases} \tag{d}$$

Dalej dla uproszczenia zapisów będziemy oznaczać:

$\partial p_1(x,v)/\partial x=p_{1x}$,

$\partial p_2(x,v)/\partial x=p_{2x}$,

$\partial p_2(x,v)/\partial v=p_{2v}$.

Równania charakterystyk dla układu (d) zapisane z wykorzystaniem powyższych oznaczeń mają postać:

$$\begin{cases} dv/dx = -1-p_{1x}(x), \\ dp_{2x}(x,v(x))/dx = p_{1x}(x), \\ dp_{2v}(x,v(x))/dx = 0. \end{cases}$$

oraz dodatkowo zachodzi:

$$p_{2x}(x,v(x))=p_{2v}(x,v(x))+p_{1x}(x)(p_{2v}(x,v(x))+1).$$

Zauważmy, że pierwsze z równań układu (e) określa rodzinę zbiorów zgodnych z pomiarem o numerze 2. Rzeczywiście, biorąc drugie z równań modelu bezpośredniego (a) z uwzględnieniem $u_1=g_1(x)=p_1(x)$ mamy:

$$z_2=x+v+p_1(x).$$

Przyrównując do zera różniczkę dz_2 otrzymujemy:

$$0=(1+\partial p_1(x)/\partial x)dx+dv,$$

stąd

$$dv/dx=-\ 1-p_{1x}(x). \tag{f}$$

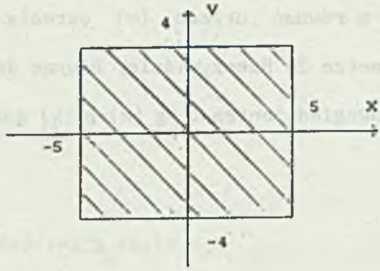
Na podstawie równania (f) "kształt" zbioru zgodnego z pomiarem z_2 zależy od prawa sterowania $p_1(x)$. Zbiory $\mathbb{C}|z_2$ i $\mathbb{T}\cap(\mathbb{C}|z_2)$ odpowiadające prawom sterowania

$$p_1^a(x) = 0,$$

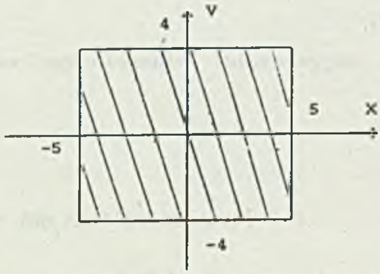
$$p_1^b(x) = -kx,\ k>0,$$

$$p_1^c(x) = \begin{cases} -kx, & -\Delta\le x\le\Delta,\ \Delta>0 \\ -k\Delta, & x<\Delta \\ k\Delta, & x>\Delta. \end{cases}$$

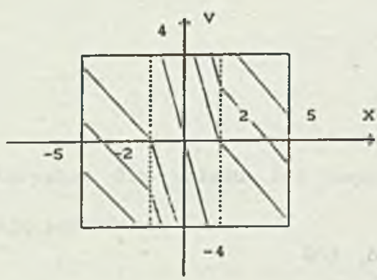
przedstawiają rys.6.1. a, b, c.



a) $p_1(x)=0$



b) $p_1(x)=3x$



$$\text{c) } p_1(x)=\begin{cases} 3x, & \text{dla } -2\le x\le 2 \\ -6 & x<2 \\ 6 & x>2 \end{cases}$$

Rys. 6.1. Wpływ prawa sterowania $p_1(x)$ na postacie zbiorów $\mathbb{C}|z_2$, $\mathbb{T}\cap(\mathbb{C}|z_2)$

Fig. 6.1. Influence of the control law $p_1(x)$ on forms of sets $\mathbb{C}|z_2$, $\mathbb{T}\cap(\mathbb{C}|z_2)$

Przykładowe bezpośrednie prawa sterowania nie są wybrane przypadkowo. Pierwsze z nich jest optymalne w przypadku zawierającej struktury informacyjnej, drugie reprezentuje koncepcję stosowania liniowego prawa sterowania, trzecie jest podobne do proponowanego w [64], [44].

6. Podsumowanie

W zakresie przedstawionym w pracy problem syntezy praw sterowania w warunkach niepewności na podstawie modelu bezpośredniego przy nieklasycznej strukturze informacyjnej ma charakter poznawczy. Stanowi go próba uporządkowania i sformalizowania syntezy praw sterowania przy nieklasycznej strukturze informacyjnej.

Podejście przedstawione w problemie jest nowe i wykorzystuje tzw. bezpośrednią postać prawa sterowania będącego funkcją wszystkich zmiennych niepewnych rozpatrywanego zadania. Dla uzyskania zgodności z założonym przyporządkowaniem informacyjnym wykorzystywane są oryginalne wprowadzone w pracy ograniczenia informacyjne. Ilustrację do rozpatrywanego problemu stanowi znany "kontrprzykład Witsenhausena".

Literatura

[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21 (1975), pp. 875-863.

[2] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Dynamics and failure of structures based on the unknown-but-bounded imperfection model. The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, San Francisco, Kalifornia 1989.

[3] Ben-Haim Y., Elishakoff I.: Non-probabilistic models of uncertainty in the nonlinear bucking of shells with general imperfections: Theoretical estimates of the knockdown factor. Journal of Applied Mechanics. Vol.56. (1989), pp. 403-410.

[4] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MIT, Cambridge, 1971.

[5] Bertsekas D.P.: Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 117-123.

[6] Bertsekas D. P.:"Dynamic Programming and Stochastic Control". Academic Press, 1976.

[7] Billingsley P.:"Probability and measure". John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto 1979. Tłum. polskie "Prawdopodobieństwo i miara", PWN, Warszawa 1987.

[8] Federer H.:"Geometriczeskaja tieoria miery". Nauka, Moskwa 1987 (tłumaczenie z angielskiego).

[9] Gessing R.: Stochastic optimal control and its connection with estimation, IEE Proc. vol.131, 1984, pp.165-170.

[10] Gessing R.: Zasada minimalizacja i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego, Arch. Automatyki i Telemech. t.XXI, z.4 1976, ss. 447-465.

[11] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[12] Goetz A., Huskowski T., Krasnodębski R., Pidek-Łopuszańska H., Rochowski M.:"Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania". WNT, Warszawa 1965.

[13] Ho Y. C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol.68, (1980), pp.644-654.

[14] Ho Y. C., Kastner M.P., Wong E.: Teams signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[15] Ho Y. C., Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp. 15-22.

[16] Ho Y. C., Hexner G.: Redundancy in team problems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp.439-440.

[17] Ho Y. C., Chang T. S.: Another look at the nonclassical information structure problem. IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1980), pp. 537-540.

[18] Kamke E.: "Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung fur eine Gesuchte Function". Leipzig 1959.

[19] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. I, II. Probl. Control & Information Theory, No.6, 1980, No.1, 1981.

[20] Lin J.N.: Determination of rechable set for a linear discrete system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[21] Mori S., Chong C.Y.: Numerical solutions to Witsenhausen problem. Proc. of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas 1984, pp.828-829.

[22] Norton J.P.: Identification and application of bounded-parameter models. Automatica, vol 23, 1987, pp.497-507.

[23] Pronzato L., Walter E.: Experiment design for membership set estimation: linear models with homogeneus and heterogeneus measurement errors. Proc. of the First International Conference-Workshop on Optimal Design and Analysis of Experiments, Neuchatel, Switzerland, July 25-28, 1988.

[24] Sandell N.R., Jr., Athans M.: Solution of some nonclassical LQG stochastic decision problems. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19 (1974), pp. 108-116.

[25] Schweppe F.C.:Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13(1968), pp. 408-414.

[26] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[27] Stratonovich R.L.:On the theory of optimal control: Sufficient coordinates. Automat. Remonte Control (USSR), vol.23, January 1963.

[28] Striebel C.T.: Sufficient statistics in the optimal control of stochastic systems. J. Math. Anal. Appl., vol.12, 1965 pp.576-592.

[29] Tse E., Bar-Shalom Y., Meier L.: Wide-sense adaptiv dual control for nonlinear stochastic systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973), pp. 98-108.

[30] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control, IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp. 817-819.

[31] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence -, Trans. SCIE, 12(1976), pp. 89-95.

[32] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp.1-16.

[33] Witsenhausen H.S.: A minimax control problem for sampled linear system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13 (1968), pp. 5-21.

[34] Witsenhausen H.S.: Counterexample in stochastic optimal control. SIAM J. Control, Vol.6., 1968, pp. 131-147.

[35] Witsenhausen H.S.: A remark on reachable sets of linear systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[36] Wojciechowski K.W.: Analiza sytuacji metanowej w rejonie ściany wydobywczej. Arch. Górn., Tom 23, 1978, ss.421-432.

[37] Wojciechowski K.W.: Analiza sytuacji metanowej w rejonie ściany F-7. Arch. Górn., Tom 23, 1978, ss.433-447.

[38] Wojciechowski K.W., Bacia K.: Problem optymalnego nadążania w przypadku dynamicznego modelu rozmytego. Prac. VIII Kraj. Konf. Automatyki. Szczecin 1981.

[39] Wojciechowski K.W.: Modele ze zmiennymi niepewnymi. Pol. Tow. Mech. Teoret. i Stos. Symp. Wisła, 7-14.II.1983, ss.479-487.

[40] Wojciechowski K.W., Duda Z.: Decentralized resource allocation in large scale system under uncertainty conditions. System Science Vol.9 1883, pp.31-37.

[41] Wojciechowski K.W., Duda Z.: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności. ZN Polit. Śl. s. Automatyka Z.76 Gliwice 1984, ss.149-158.

[42] Wojciechowski K.W.: Metoda symulacji układów dynamicznych w warunkach niepewności ograniczonej. SPD-2, Pol. Tow. El. Tech. i Stos. Zakopane, 1985, ss.187-193.

[43] Wojciechowski K.W.: Control and decision making under set-membership model of uncertainty. Analysis and synthesis. Raport, LH Wageningen, 1986.

[44] Wojciechowski K.W.: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru Ŭ. Przyjęte do publik. w Arch. Automat. i Telemechaniki.

Recenzent: Doc.dr hab.inż. Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji 20.05.1991

Abstract

In the paper a new approach to the control strategies desing in the presence of bounded uncertainties based on the direct model of the controlled plant with a nonclassical information structure is presented. It is

based on the search of the so called direct control law in the presence of information constraints ensuring coincidence with the declared arguments of the control strategies. There has been proved that the problem of the control strategies desing for the nonclassical information structure can be led to the vector variational problem with constraints in the from of first oreder partial differential equations. The classical information structure implies decomposition of the problem onto mutually independent scalar problems. In the paper a developped example modeled on the so called Witsenhausen counterexample is presented to illustrate the problem under consideration.