ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: AUTOMATYKA z. 108 Nr kol. 1150

Konrad WOJCIECHOWSKI

SYNTEZA PRAWA STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ PRZYPADEK NIECENTROWANEGO ZBIORU $\mathbb{T}$

Streszczenie. W pracy przedstawiono syntezę praw sterowania w warunkach niepewności dla skończonego horyzontu $\mathbb{H} = \{1,\ldots,N\}$, liniowych równań stanu i wyjścia, kwadratowego wskaźnika jakości (przypadek LQ) oraz niepewności o modelu ograniczonym. W modelu tym możliwe warunki początkowe oraz ciągi zakłóceń w równaniu stanu i ciągi błędów pomiarowych w równaniu wyjścia określa łącznie dany ograniczony zbiór $\mathbb{T}$ spełniający dodatkowe warunki symetrii upraszczające postać rozwiązania. Poszukiwane prawo sterowania jest z założenia funkcją informacji pomiarowej o strukturze "nested" i minimalizuje sumę ważoną drugich momentów centralnych zbioru będącego obrazem zbioru $\mathbb{T}$ w przestrzeni zmiennych $x_1,\ldots,x_{N+1},u_1,\ldots,u_N$. Wprowadzając pojęcie zbiorów informacyjnych i wykorzystując ich wzajemnie jednoznaczne odwzorowania sprowadzono sformułowane zadanie syntezy do schematu programowania dynamicznego z rozwiązywanymi na poszczególnych etapach zadaniami minimalizacji parametrycznej. Otrzymane w wyniku optymalne prawo sterowania jest dla każdej chwili przyjętego horyzontu sterowania liniową funkcją unormowanej całki wektora stanu w tej chwili po odpowiednim warunkowym zbiorze informacyjnym. Pokazuje się, że jeżeli warunkowy zbiór informacyjny posiada symetrię środkową to unormowaną całkę wektora stanu po tym zbiorze można zastąpić unormowaną całką wektora stanu po warunkowym zbiorze stanów możliwych w rozpatrywanej chwili, czyli środkiem ciężkości tego zbioru. Zbiór ten jest rzutem ortogonalnym warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu.

CONTROL STRATEGIES DESING IN THE PRESENCE OF BOUNDED UNCERTAINTY. THE CASE OF CENTERED SET $\mathbb{T}$

Summary. In the paper the control strategies desing in the presence of uncertainty for finite horizon $\mathbb{H} = \{1,\ldots, N\}$, linear state and output equations, quadratic performance index (LQ case) and unknown but bounded disturbances is presented. The optimal control strategies received is in each stage of the control horizon a linear function of the normed integral over the given conditional information set. If the conditional information set possesses a central symmetry then the normal integral of the state vector over this set can be substituted by the normal integral of the state vector over the conditional set of feasible states.

СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. СЛУЧАЙ ЦЕНТРИРОВАННОГО МНОЖЕСТВА $\mathbb{T}$

Резюме

В работе представлен синтез законов управления в условиях неопределенности для конечного горизонта $\mathbb{H} = \langle 1, \ldots, N \rangle$, линейных уравнений состояния и выхода, квадратного показателя качества и неопределенности с ограниченной моделью. Оптимальный закон управления для каждого момента принятого горизонта управления является линейной функцией нормированного интеграла вектора состояния для этого момента времени на соответствующем условном информационном множестве. Доказывается, что если условное информационное множество имеет центральную симметрию, то вместо нормированного интеграла вектора состояния на этом множестве можно использовать нормированный интеграл вектора состояния на условном множестве состояний возможных в рассматриваемый момент времени.

1. Wprowadzenie

Wyniki uzyskane dotychczas w problemie syntezy prawa sterowania w warunkach niepewności dotyczą głównie problemu liniowo-kwadratowego (LQ) przy niepewności o modelu losowym.

W sformułowaniu klasycznego liniowo-kwadratowego problemu sterowania stochastycznie optymalnego zakłada się, że warunek początkowy x_1 oraz addytywne zakłócenia w_k, v_k są dla $k=1,\ldots,N$ wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi i dodatkowo wartość średnia w_k wynosi zero dla $k=1,\ldots,N$. Przyjmuje się również, że dopuszczalne prawa sterowania posiadają strukturę informacyjną typu "nested". Przy powyższych założeniach optymalne prawo sterowania w chwili k jest liniową funkcją oceny wektora stanu wyznaczonej na podstawie informacji pomiarowej dostępnej w danej chwili k.

W ogólniejszych wersjach problemu LQ [1,9,10], dopuszcza się dowolne charakterystyki probabilistyczne zmiennych losowych x_1, w_k, v_k, $k=1,\ldots,N$ uzyskując prawo sterowania w postaci liniowej funkcji oceny wektora stanu uzupełnionej o składnik związany z predykcją zakłóceń w równaniu stanu.

W pracy przyjęto tzw. ograniczony model niepewności [2-8,11,12]. W modelu tym, dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony zbiór $\mathbb{T}$ określa łacznie możliwe wartości zmiennych x_1, w_k, v_k, $k=1,\ldots,N$. W przypadkach szczególnych (zbiory elipsoidalne, wielościenne)

zbiór $\mathbb{T}$ może być parametryzowany. W pracy odnośnie zbioru $\mathbb{T}$ oprócz naturalnego założenia o jego całkowalności w sensie Lebesguea zakłada się dodatkowo, że spełnia on pewne warunki symetrii przy których wyrażenia określające postać sterowania optymalnego upraszczają się w sposób istotny. W w tym kontekście w pracy [8] niejawnie obowiązuje założenie, że zbiór zbiór $\mathbb{T}$ jest iloczynem kartezjańskim zbiorów $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{W}_k$, $\mathbb{V}_k$ $k=1,\ldots,N$ z których każdy określa możliwe realizacje x_1, w_k, v_k.

Zaletą podejścia przyjętego w pracy jest jawne uwzględnienie istniejących ograniczeń na realizacje oraz wyeliminowanie funkcji gęstości, co pozwoliło na uzyskanie bardziej szczegółowych wyników.

Modelowi niepewności ograniczonej można przyporządkować równoważne modele niepewności losowej. Najprostszy jest rozkład równomierny na zbiorze $\mathbb{T}$. Możliwe są również inne rozkłady spełniające odpowiednie warunki symetrii. Z tego względu do rozważań przedstawionych w pracy wprowadzono liczbowe czynniki normalizujące, co pozwala na odnoszenie uzyskanych wyników do rezultatów problemu sterowania stochastycznie optymalnego.

W pracy do rozwiązania sformułowanego w p.2 problemu syntezy prawa sterowania, zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych. Wybrane definicje i własności tych zbiorów przedstawiono w Dodatku A. Podstawowy wynik zawiera twierdzenie 1 zamieszczone w p.3 wraz z interpretacją. Dowód tego twierdzenia przeniesiono do dodatku B.

Ogólnie w świetle Twierdzenia 1 posługiwanie się techniką przestrzeni stanu nie jest efektywne, wymaga bowiem operowania wysokowymiarowym warunkowym zbiorem informacyjnym lub funkcją wagową. Twierdzenia 2 i 3 z p.4 wyróżniają przypadek szczególny, w którym do określenia oceny stanu wystarczy warunkowy zbiór stanów. Przypadek taki nazywa się przypadkiem efektywnym i ma miejsce jeżeli rzut ortogonalny środka ciężkości zbioru na wybraną podprzestrzeń jest równy środkowi ciężkości rzutu ortogonalnego zbioru na tę podprzestrzeń. Przykładowo własność taka zachodzi dla zbiorów elipsoidalnych.

2. Problem syntezy praw sterowania

2.1. *Określenia wstępne*

Niech $\mathbb{J}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Jego ustalony podzbiór $\mathbb{N}=\{1,\ldots,N\}$ nazywamy horyzontem sterowania. Ciąg $c:\mathbb{N}\to R^q$ oznaczamy $c^N \overset{\Delta}{=} (c_1',\ldots,c_N')$, tym samym symbolem c^N oznaczamy również wektor $[c_1',\ldots,c_N']$. Podobnie oznaczamy $c^k \overset{\Delta}{=} (c_1',\ldots,c_k')$ oraz $c^{N\setminus k} \overset{\Delta}{=} (c_{k+1}',\ldots,c_N')$ gdzie w obu przypadkach $k \le N$.

Ciągami wyróżnionymi w rozpatrywanym problemie są: stan początkowy $x_1:\{1\}\ R^n$, trajektoria stanu $x:\mathbb{H}\cup\{N+1\}\ R^n$, pomiary $z:\mathbb{H}\ R^p$, sterowania $u:\mathbb{H}\ R^m$.

2.2. Sformułowanie problemu

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $k\in\mathbb{H}=\{1,\dots,N\}$, x_k, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, z_k, $v_k \in R^p$, $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$ $C\in R^{p\times n}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) wartości zmiennych x_1, w_k, v_k dla $k \in \mathbb{H}$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t=(x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T}\subset R^d$, gdzie $d=n+nN+pN$, oraz dla każdego $k\in\mathbb{H}$ zachodzi

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} w_k \, dr_{ok} = 0 \tag{2}$$

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} x'_{ok} \, M \, w_k \, dr_{ok} = 0 \tag{3}$$

gdzie (patrz dodatek A def.A.1) R_{ok} jest obrazem zbioru $\mathbb{T}$ poprzez wzajemnie jednoznaczne liniowe przekształcenie ρ_{ok}, zaś $R_{ok}|z_o^k$ (patrz dodatek A) jest "przekrojem" zbioru R_{ok} ustaloną wartością z_o^k. Macierz $M\in R^{n\times m}$ w warunku (1.3) jest dowolna, indeks "o" informuje, że zapis dotyczy układu dynamicznego, w którym dla $k\in\mathbb{H}$ $u_k \equiv 0$.

iii) struktura informacyjna jest typu "nested". Najprostszymi dopuszczalnymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k = u_k(z^k), \quad k\in\mathbb{H} \tag{4}$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}} l_k(x_{k+1}, u_k)\, dt \tag{5}$$

gdzie dla $k\in\mathbb{H}$

$$l_k = x'_{k+1} P_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k \tag{6}$$

$$m^\circ = \int_{\mathbb{T}} dt \tag{7}$$

$$Q_k > 0, \tag{8}$$

$$P_{k+1} \geq 0, \tag{9}$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu dopuszczalnych praw sterowania $u^*_k(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna.

3. Synteza praw sterowania

3.1. Metoda syntezy

W pracy do rozwiązania problemu zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych. Polega ona na przekształceniu dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zbioru $\mathbb{T}$ danego w przestrzeni zmiennych (x_1, w^N, v^N) w zbiór $\mathbb{R}_k$, dany dla $k \in \mathbb{H}$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_k, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. W wyniku zadanie minimalizacji względem funkcji $u_k(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$ może być sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości z^k, $k \in \mathbb{H}$. Dodatkowo przy spełnieniu odpowiednich warunków symetrii zbioru $\mathbb{R}_k$ przy ustalonej wartości z^k informację wystarczającą dla sterowania zawiera zbiór będący jego rzutem na podprzestrzeń zmiennych x_k.

Ustalonej wartości z^k odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $\mathbb{R}_k | z^k$. Niezależność "kształtu" tego zbioru od sterowań u^{k-1} (patrz dodatek A) jest podstawową własnością umożliwiającą otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji "oceny" stanu.

3.2. Optymalne prawo sterowania

Podstawowy rezultat uzyskany przy zastosowaniu metody zbiorów informacyjnych przedstawia następujące

Twierdzenie 1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v), to optymalne prawo sterowania dla każdego $k \in \mathbb{H}$ określone jest zależnościami:

$$u^*_k = -(Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \hat{x}_k \tag{10}$$

gdzie

$$\hat{x}_k = \int_{\mathbb{R}_k | z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{\mathbb{R}_k | z^k} dr_k \tag{11}$$

$$K_k = A' (K_{k+1} - K_{k+1} B = (Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1}) A + \hat{x}_k \tag{12}$$

$$K_{N+1} = P_{N+1} \tag{13}$$

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i \tag{14}$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} x_{ok}\, dr_{ok} \Big/ \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} dr_{ok} \tag{15}$$

Dowód tw.1 jest w swej strukturze podobny do dowodu twierdzenia o sterowaniu stochastycznie optymalnym. W dowodzie tym wykorzystuje się w sposób istotny przekształcenia i własności zbiorów informacyjnych, zamieszczone w dodatku A. Wynik przedstawiony w twierdzeniu 1 jest ogólny w tym sensie, że oprócz założeń wymienionych w ii) nie zakłada się żadnych ograniczeń na zbiór $\mathbb{T}$. W rezultacie wyznaczenie oceny $\hat{x}_k$ wymaga operowania wysokowymiarowym zbiorem warunkowym $\mathbb{R}_{ok}|z_o \subset R^{d_k}$, $d_k = n+nN+p(N-k)$ lub wprowadzenia funkcji wagowej $g_k(z_o^k, x_{ok})$ pojawiającej się po przekształceniu wyrażenia na $\hat{x}_{ok}$.

4. Efektywność techniki przestrzeni stanu

Pojęcie efektywności techniki przestrzeni stanów w syntezie prawa sterowania wprowadzono w pracy [12]. Mówimy, że technika taka jest efektywna jeżeli zachodzi:

$$\hat{x}_{ok} = \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} x_{ok}\, dr_{ok} \Big/ \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} dr_{ok} = \int_{\mathbb{X}_{ok}} x_{ok}\, dx_{ok} \Big/ \int_{\mathbb{X}_{ok}} dx_{ok} \tag{16}$$

Oznacza to, że w przypadku ogólnym do wyznaczenia oceny $\hat{x}_{ok}$ potrzebna jest znajomość pełnego zbioru warunkowego $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$, podczas gdy w przypadku efektywnym wystarczy znajomość zbioru $\mathbb{X}_{ok}$ będącego rzutem ortogonalnym zbioru $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ na podprzestrzeń zmiennych x_{ok}.

Inaczej przypadek nazywa się przypadkiem efektywnym jeżeli rzut ortogonalny środka ciężkości zbioru $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ na podprzestrzeń zmiennych x_k jest równy środkowi ciężkości rzutu ortogonalnego zbioru $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ na tę podprzestrzeń. Przykładowo, własność taka zachodzi dla zbiorów elipsoidalnych.

Ustalenie warunków, przy których zachodzi (16), jest przedmiotem dalszych rozważań.

4.1. Problem pomocniczy

Niech będzie dany zbiór $A=\{(x,y):(x,y)\in R^{n+1}\}$ oraz zdefiniujmy: i) zbiór $Y|x = \{y:(x,y)\in A\}$ będący przekrojem zbioru A ustaloną wartością x, ii) zbiór $X = \pi_x(A) = \{x:(x,y)\in A\}$ będący rzutem ortogonalnym zbioru A na przestrzeń zmiennych x.

Na podstawie twierdzenia o całce iterowanej mamy:

$$\int_A x\,dx\,dy=\int_X x\,(\int_{Y|x} dy)\,dx=\int_X x\,g(x)\,dx$$

$$\int_A dx\,dy = \int_X (\int_{Y|x} dy)\,dx = \int_X g(x)\,dx$$

gdzie $g(x) = \int_{Y|x} dy$ jest interpretowana jako funkcja wagowa.

Lemat 1. Jeżeli środkiem symetrii zbioru X jest punkt x_s i równocześnie dla każdego $x\in X$, $g(x)=g(2x_s-x)$ to

$$\int_X x\,g(x)\,dx \Big/ \int_X g(x)\,dx = \int_X x\,dx \Big/ \int_X dx = x_s$$

Dowód. Wprowadzając zmienne $z=x-x_s$ umieszczamy początek nowego układu współrzędnych w punkcie x_s. Mamy:

$$\int_X x\,g(x)\,dx=\int_Z (z+x_s)g(z+x_s)dz=\int_Z zg(z+x_s)dz+x_s\int_Z g(z+x_s)dz \qquad (a)$$

$$\int_X g(x)\,dx = \int_Z g(z+x_s)\,dz \qquad (b)$$

gdzie zbiór Z jest symetryczny -względem początku układu i dla $z\in Z$, $g(z+x_s)=g(-z+x_s)$. Na tej podstawie:

$$\int_Z z\,g(z+x_s)\,dz \equiv 0 \qquad (c)$$

Dzieląc wyrażenie (a) przez (b) przy uwzględnieniu warunku (c) otrzymujemy x_s. Równocześnie z warunku symetrii zbioru X względem punktu x_s, $\int_X x\,dx \Big/ \int_X dx = x_s$, co kończy dowód.

Lemat 1 określa jakie warunki spełniać muszą zbiór X i funkcja wagowa $g(x)$. Interesujące jest określenie wystarczających warunków dla zbioru A. Dotyczy tego

Lemat 2. Jeżeli środkiem symetrii zbioru A jest punkt (x_s,y_s), to środkiem symetrii zbioru X jest punkt x_s oraz dla każdego $x\in X$, $g(x)=g(2x_s-x)$.

Dowód. Pierwsza część lematu wynika bezpośrednio z definicji symetrii środkowej i rzutu ortogonalnego zbioru $\mathbb{A}$ na podprzestrzeń zmiennych x. Dla uzasadnienia drugiej części lematu wystarczy zauważyć, że ze względu na symetrię zbioru $\mathbb{A}$ miary zbiorów $\mathbb{Y}|x$, $\mathbb{Y}|(2x_s-x)$ są równe.

Podsumowując można stwierdzić, że jeżeli zbiór $\mathbb{A}$ posiada symetrię środkową, to przy wyznaczaniu środka ciężkości jego rzutu $\mathbb{X}$ na podprzestrzeń zmiennych x, funkcja wagowa g(x) może być pominięta.

4.2. Warunki efektywności techniki przestrzeni stanu

Obecnie możemy sformułować warunki, przy których zachodzi zależność (16). Precyzuje je

Twierdzenie 2. Niech dla każdego $k\in H$ będzie określone $\hat{x}_{ok}$ jak w tw.1 oraz funkcja

$$g_k(z_o^k,x_{ok}) = \int\limits_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k,x_{ok}} d(w^N,v^{N\setminus k})$$

Jeżeli:

i) dla każdego $z_o^k\in\mathbb{P}_k=\pi_k(\mathbb{R}_{ok})$ i każdego $x_{ok}\in\mathbb{X}_{ok}=\pi_{x_{ok}}(\mathbb{R}_{ok}|z_o^k)$ istnieje ustalone x_s takie, że: $g_k(z_o^k,x_{ok})=g_k(z_o^k,2x_s-x_{ok})$,

ii) $x_s = \int\limits_{\mathbb{X}_{ok}} x_{ok}\,dx_{ok} \Big/ \int\limits_{\mathbb{X}_{ok}} dx_{ok}$

to $\hat{x}_{ok} = x_s$.

Dowód. Bezpośrednie zastosowanie lematu 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli dla każdego $z_o^k\in\mathbb{P}_k=\pi_k(\mathbb{R}_{ok})$ zbiór warunkowy $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ posiada symetrię środkową względem punktu $[\hat{x}_{ok},\hat{w}^{N'},\hat{v}^{N\setminus k'}]$, to również zbiór $\mathbb{X}_{ok}=\pi_{ok}(\mathbb{R}_{ok}|z_o^k)$ posiada symetrię środkową względem punktu $\hat{x}_{ok}$, a funkcja $g_k(z_o^k,x_{ok})$ spełnia warunek i) z twierdzenia 1.

Dowód. Zastosowanie lematu 2.

Warunki efektywności techniki przestrzeni stanu przedstawione w tw.3 są silne. Przykładowo, warunki te są spełnione jeżeli zbiór $\mathbb{T}$ jest zbiorem elipsoidalnym. Wtedy bowiem zbiory $\mathbb{R}_{ok}$, $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ są również elipsoidalne i dla zbioru $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ spełnione są warunki symetrii. Kontynuując przykład zauważmy, że jeżeli zbiór $\mathbb{T}$ jest wielościanem o symetrii środkowej (np. kostka), to symetrię środkową posiada również zbiór $\mathbb{R}_{ok}$, jednak nie posiada jej już zbiór warunkowy $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$.

5. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy oryginalna metoda syntezy prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej oparta na przekształceniach i własnościach zbiorów informacyjnych pozwala na uzyskanie wyników pojęciowo równoważnych uzyskanych w teorii sterowania stochastycznie optymalnego [1,10].

Przedstawiona metoda z uwzględnieniem dodatków A, B, jest kompletna, definicje i własności zbiorów informacyjnych łącznie z twierdzeniami 1-3 i ich dowodami tworzą całość. Jednocześnie postać uzyskanych wyników jest prosta, co pozwala na ich bezpośrednią implementację numeryczną.

Wyniki przedstawione w pracy uporządkowane są hierarchicznie. Najbardziej ogólny jest wynik przedstawiony w twierdzeniu 1. Wymaga się w nim jedynie by zbiór $\mathbb{T}$ charakteryzujący możliwe wartości zmiennych niepewnych był mierzalny w sensie Lebesgue'a. W twierdzeniach 2, 3 podaje się pośrednio warunki, jakie powinien spełniać zbior $\mathbb{T}$, aby problem wyznaczania środka ciężkości zbioru $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k$ można było zredukować do problemu wyznaczania środka ciężkości warunkowego zbioru stanów.

LITERATURA

[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21(1975), pp. 875-863.

[2] Barmish B.R., Sankaran J.: The propagation of parametric uncertainty via polytopes, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1979), pp. 346-349.

[3] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MiT, Cambridge, 1971.

[4] Clement T., Gentil S.: Reformulation of parameter identyfication with unknown-but-bounded errors, Mathematics and Computers in Simulation, 30(1988), pp. 257-270.

[5] Fogel E., Huang Y.F.: On the value of information in system identification-bounded noise case, Automatica, 18(1982), pp. 229-238.

[6] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[7] Kurzhanskii A.B.: "Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[8] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[9] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control. IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp. 817-819.

[10] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence -, Trans. SCiE. 12(1976), pp. 89-95.

[11] Wojciechowski K.W.: Recursive measurement data filtration with uncertainty described by convex polyhedra, Syst. Anal. Model. Simul. 4(1987), pp. 557-560.

[12] Wojciechowski K.W.: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności, Konf. RP.I.02, Kazimierz Dolny 1988.

Recenzent: Doc..dr hab.inż. Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji 20.01.1991r.

DODATEK A

A.1. Odwzorowania i zbiory informacyjne

Niech będzie dany układ dynamiczny w postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \; ; \; x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{A.1}$$

gdzie: $x_k, w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_k, v_k \in R^p$, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ oraz istnieje A^{-1}. W przypadku szczególnym dla $u_k \equiv 0$, $k \in H$ stosujemy zapis:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases} \tag{A.2}$$

Definicja A.1. Określone dla każdego $k \in H$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie ρ_{ok} przekształcające dany zbiór $T \subset R^d$ w zbiór

$$R_{ok} = \rho_{ok}(T) = \{(r_{ok}, z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k) \,|\, (s_k, v^k) \in T\} \subset R^d$$

nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie ρ_{ok} jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} = \rho_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N\setminus k})$, $s_k = (x_1, w^N, v^{N\setminus k})$

$$G_p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_p = \begin{bmatrix} P_{41} & \dots P_{42} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = A^{k-1} \qquad P_{12} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} A^{k-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\ \text{k-macierzy} \qquad \text{N-k macierzy} \end{array}$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \qquad P_{42} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{c|c} \text{k kolumn macierzowych} & \text{N-k kolumn macierzowych} \end{array} \end{array}$$

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika z zależności:

$$x_{ok} = A^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}w_i$$

$$z_{oj} = C\left(A^{j-1}x_1 + \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}w_i \right) + v_j, \quad j=1,\dots,k$$

zapisanych w postaci macierzowej.

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2), to dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$|\det J_{\rho_{ok}}| = |\det A^{k-1}|$$

gdzie

$$J_{\rho_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania ρ_{ok} jest tożsama z macierzą (Tw. A.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy $P_{11} = A^{k-1}$.

Definicja A.2. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór R_{ok} o elementach (r_{ok}, z_o^k). Dla ustalonego z_o^k zbiór $R_{ok}|z_o^k = \{(r_{ok}) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru R_{ok} przy warunku z_o^k. Zbiór $P_{ok} = \prod_{zk}(R_{ok}) = \{(z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy rzutem prostopadłym zbioru R_{ok} na przestrzeń zmiennych z_o^k. Zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1} = \{z_{ok} : (z_{ok}, z_o^{k-1}) \in P_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji z_{ok} dla danego ciągu obserwacji z_o^{k-1}.

Definicja A.3. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k$ o elementach $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k})$. Zbiór

$$X_{ok}|z_o^k = \prod_{x_o k}(R_{ok}|z_o^k) = \{(x_{ok}) : r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k}) \in R_{ok}|z_o^k\}$$

nazywamy warunkowym zbiorem stanów.

Definicja A.4. Określone dla każdego $k \in H$ wzajemnie jednoznaczne i zależne od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ odwzorowanie przekształcające dany zbiór $T \subset R^d$ w zbiór

$$R_k = \rho_k(T) = \left\{(r_k, z^k) : (r_k, z^k) = \rho_k(s_k, v^k) \,|\, (s_k, v^k) \in T\right\} \subset R^d.$$

nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym.

Twierdzenie A.3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie ρ_k określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & (z^{k-1}) \\ p_4 & (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

gdzie: $(r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k)$

$$p_1 (z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

$$\underline{p}_1' (z^{k-1}) = \left[p_1' (z^{k-1}), \underset{Nn+(N-p)p}{0, \dots, 0} \right]$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i) \end{bmatrix}$$

Dowód. Wykorzystując zależność:

$$x_k = x_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i)$$

oraz zależność:

$$z_j = z_{oj} + C\sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}Bu_i(z^i)$$

dla j=2,...,k otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowego tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania ρ_k wymaga rozwikłania zależności z tw.A.3 względem z^k.

Twierdzenie A.4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k\in H$ i dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, i=1,...,k-1 zachodzi:

$$|\det J_{\rho_k}| = |\det J_{\rho_{ok}}| = |\det A^{k-1}|$$

gdzie

$$J_{\rho_k} = \partial\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania ρ_k.

Dowód. Wprowadzając pomocnicze odwzorowania μ_k, κ_k można macierz Jacobiego J_{ρ_k} przedstawić w postaci $J_{\rho_k} = J_{\kappa_k} J_{\mu_k}$ gdzie:

$$J_{\mu_k} = \partial\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}, \qquad J_{\kappa_k} = \partial\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie μ_k określone jest niejawnie (por.tw.A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4\ (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Macierz H_p i funkcja wektorowa $p_4\ (z^{k-1})$ są określone jak w tw.A.1, tw.A.3.

$$J_{\mu_k}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1+\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k \end{bmatrix}$$

Dla założonej struktury informacyjnej praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\ldots,k-1$ mamy:

$$\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k = \begin{bmatrix} & \neq 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Stąd $\det J_{\mu_k}^{-1} = \det J_{\mu_k} = 1$

Odwzorowanie κ_k określone jest niejawnie (por.tw.A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1\ (z^{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierz G_p jest określona w Tw.A.1, funkcja wektorowa $\underline{p}_1(z^{k-1})$ w Tw.A.3.

$$J_{\kappa_k} = \begin{bmatrix} G_p & \partial \underline{p}_1(z)/\partial z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det J_{\kappa_k} = \det G_p = \det P_{11} = \det A^{k-1}$

Ostatecznie $\det J_{\rho_k} = \det J_{\kappa_k} \det J_{\mu_k} = \det A^{k-1}$ co kończy dowód.

Pomijając w Def.A.2-A.3 indeks "o" otrzymujemy definicje zbiorów $\mathbb{R}_k|z^k$, P_k, $\mathbb{Z}_k|z^{k-1}$, $\mathbb{X}_k|z^k$.

<u>Twierdzenie A.5.</u> Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), (A.2) to

i) $\mathbb{R}_k|z^k = \underline{p}_1\ (z^{k-1}) + \mathbb{R}_{ok}|z_o^k$

ii) $\mathbb{X}_k|z^k = p_1(z^{k-1}) + \mathbb{X}_{ok}|z_o^k$

iii) $\mathbb{Z}_k|z^{k-1} = p_{4k}(z^{k-1}) + \mathbb{Z}_{ok}|z_o^{k-1}$

gdzie $z_o^k = z^k - p_4(z^{k-1})$, funkcje wektorowe $\underline{p}_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w Tw.A.3 zaś

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C\sum_{l=1}^{k-1} A^{k-1-l}Bu_l(z^l)$$

Dowód. Dla wykazania własności i) przypomnijmy, że dla każdego $k\in\mathbb{H}$ odwzorowanie ρ_k (Def.A.4) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1(z^{k-1}) \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Zbiór warunkowy $\mathbb{R}_k|z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość z^k już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym z^k również ustalone jest z^{k-1} to $p_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$ są wektorami liczbowymi,co prowadzi do słuszności tezy. Zauważmy, że w opisany powyżej sposób nie można wyznaczyć zbioru $\mathbb{R}_k|z^{k\setminus l}$ gdzie $1 \le l \le k$ przy niezmienionej definicji zbioru $\mathbb{R}_k$ i funkcji wektorowych $\underline{p}_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$. Wynika stąd, że przy ustalonym $z^{k\setminus l}$ dla $1\le l\le k$ nie jest ustalone z^{k-1}.

Prawdziwość ii) wynika z i) i definicji zbiorów $\mathbb{X}_{ok}|z_o^k$, $\mathbb{X}_k|z^k$ jako rzutów ortogonalnych zbiorów $\mathbb{R}_{ok}|z_o^k, \mathbb{R}_k|z^k$ na przestrzenie zmiennych x_{ok}, x_k. Rzutem wektora $\underline{p}_1(z^{k-1})$jest wektor $p_1(z^{k-1})$ (patrz tw.A.3).

Dla uzasadnienia iii) zauważmy, że dla każdego $k\in\mathbb{H}$ przy ustalonym z^{k-1}, $p_{4k}(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k=z_{ok}+p_{4k}(z^{k-1})$.

DODATEK B

Dowód tw.1 jest w swej strukturze podobny do dowodu twierdzenia o sterowaniu stochastycznie optymalnym w problemie LQ tj.:

i) pierwotny problem minimalizacji względem funkcji (praw sterowania) przekształca się do problemu optymalizacji parametrycznej względem wartości tych funkcji,

ii) znajduje się rozwiązanie jednoetapowego problemu optymalizacji przy założonej funkcyjnej postaci kryterium q_k ,

iii) pokazuje się prawdziwość założonej postaci funkcyjnej również dla q_{k-1} oraz niezależność "reszty" od wcześniejszych wartości sterowań.

B.1. Przekształcenie do problemu optymalizacji parametrycznej

Przyjęte kryterium optymalności zgodnie ze sformułowaniem ma postać:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m^o} \int_{\bar{T}} l_k(x_{k+1}, u_k)dt$$

W każdej z całek będących składnikami powyższej sumy dokonujemy odpowiedniej zmiany zmiennych połączonej z odwzorowaniem zbioru $\bar{T}$ w zbiór $\mathbb{R}_k$. Na podstawie t.A.4 z ddatku A mamy:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \int_{\mathbb{R}_k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k dz^k \tag{B.1}$$

gdzie $a_k = |\det A^{-k+1}|\ m_o$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o całce iterowanej możemy przekształcić (B.1) do postaci:

$$q = a_1^{-1} \int_{P_1} \int_{R_1|z^1} l_1(x_2, u_1)dr_1 dz_1 + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{P_k} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k dz^k + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{P_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N)dr_N dz^N =$$

$$= a_1^{-1} \int_{Z_1} \int_{R_1|z_1} l_1(x_2, u_1)dr_1 dz_1 + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_1} \ldots \int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k)dr_k dz_k \ldots dz_1 + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \int_{Z_1} \cdots \int_{Z_N|z^{N-1}} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N dz_N \ldots dz_1 \tag{B.2}$$

Na podstawie (B.2) minimalizacja kryterium q względem funkcji $u_k = u_k(z^k)$, $k \in H$ sprowadza się do rekurencyjnej minimalizacji względem wartości tych funkcji odpowiednich sum częściowych występujących w prawej stronie wyrażenia (B.2). Mamy:

$$q^* = a_1^{-1} \int_{Z_1} \min_{u_1} \left(\int_{R_1|z_1} l_1(x_2, u_1) dr_1 + \ldots \right.$$

$$+ a_k^{-1} \int_{Z_k|z^{k-1}} \min_{u_k} \left(\int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k + \ldots \right.$$

$$\left. + a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \left(\int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N \right) dz_N \ldots \right) dz_k \ldots \Bigg) dz_1 \tag{B.3}$$

Wyrażenie (B.3) kończy pierwszą fazę dowodu poświęconą przekształceniu problemu optymalizacji funkcyjnej do optymalizacji parametrycznej.

B.2. Jednoetapowy problem minimalizacji

Zakładamy, że wyrażenie:

$$q_k = a_k^{-1} \int_{R_k|z^k} l_k(x_{k+1}, u_k) dr_k +$$

$$+ a_{k+1}^{-1} \int_{Z_{k+1}|z^{k+2}} \left(\ldots a_N^{-1} \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N} \int_{R_N|z^N} l_N(x_{N+1}, u_N) dr_N dz_N \ldots \right) dz_{k+1} \tag{B.4}$$

podlegające w (B.3) minimalizacji względem u_k, przy uwzględnieniu, że $l_i(x_{i+1}, u_i)$, $i \in H$, są dodatnio określonymi formami kwadratowymi zmiennych (x_{i+1}, u_i), może być przedstawione w postaci

$$q_k = a_k^{-1} \left(\int_{R_k|z^k} (x'_{k+1} K_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k) dr_k + e_k \right) \tag{B.5}$$

gdzie e_k jest niezależne od u^k, oraz $K_{k+1} > 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla $k=N$ jest to słuszne i w tym przypadku $K_{N+1}=P_{N+1} > 0$ oraz $e_N \equiv 0$ jest niezależne od u^N. Zatem dla indukcyjnego dowodu słuszności (B.5) dla każdego $k \in H$ wystarczy pokazać, że założona postać (B.5) implikuje analogiczną postać q_{k-1}.

Wyrażenie q_k podlega minimalizacji parametrycznej względem u_k. Forma kwadratowa zmiennej u_k otrzymana w wyniku podstawienia za x_{k+1} równania stanu jest dodatnio określona, stąd wartość u_k^*, dla której przyjmuje ona minimum globalne, znajdujemy przyrównując do zera jej gradient względem u_k. Mamy kolejno:

$$a_k q_k = \int_{R_k|z^k} (x'_k A' K_{k+1} A x_k + 2u'_k B' K_{k+1} A x_k +$$

$$+ 2u'_k B' K_{k+1} w_k + 2x'_k A' K_{k+1} w_k +$$

$$+ u'_k (Q_k + B' K_{k+1} B) u_k + w'_k K_{k+1} w_k) dr_k + e_k \tag{B.6}$$

Można pokazać, że na podstawie założeń odnośnie do zbioru $\mathbb{T}$ przyjętych w sformułowaniu oraz związków między zbiorami $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}_k$, $\mathbb{R}_{ok}$, zachodzi:

$$u_k'B'K_{k+1}\int_{\mathbb{R}_k|z^k} w_k dr_k \equiv 0 \tag{B.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}w_k dr_k \equiv 0 \tag{B.8}$$

Rzeczywiście, na podstawie tw.A.5 z dodatku A mamy:

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} w_k dr_k = \int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} w_k dr_{ok} = 0$$

Podobnie

$$\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}w_k dr_k = p_1'A'K_{k+1}\int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} w_k dr_{ok} +$$

$$+\int_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} x_{ok}'A'K_{k+1}w_k dr_{ok} = 0$$

Zerowanie się w (B.6) składników (B.7), (B.8) zachodzące przy spełnieniu założeń przyjętych w sformułowaniu problemu powoduje uproszczenie rozważań i wynikowych wzorów określających prawa sterowania.

Obliczając pochodną prawej strony (B.6) względem u_k i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B'K_{k+1}A\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x_k dr_k + (Q_k + B'K_{k+1}B)u_k\int_{\mathbb{R}_k|z^k} dr_k = 0$$

Stąd

$$u_k^* = -(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k \tag{B.9}$$

$$\check{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \tag{B.10}$$

$$b_k = \int_{R_k|z^k} dr_k \tag{B.11}$$

$$\hat{x}_k = x_k / b_k \tag{B.12}$$

Podstawiając (B.9) do (B.6) otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \int_{R_k|z^k} (x_k'A'K_{k+1}Ax_k - 2\hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}Ax_k +$$

$$+ \hat{x}_k'A'K_{k+1}B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\hat{x}_k + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k \tag{B.13}$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji q_k co pozwoliło na określenie optymalnego prawa sterowania $u_k^*(z^k)$ (B.9) oraz odpowiadającej mu postaci q_k^* (B.13).

B.3. Wyznaczenie postaci funkcyjnej dla q_{k-1}

Odpowiednio do struktury wyrażenia (B.3) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \int_{R_{k-1}|z^{k-1}} l_{k-1}(x_k, u_{k-1})dr_{k-1} +$$

$$+ \int_{Z_k|z^{k-1}} q_k^* dz_k \tag{B.14}$$

Ponieważ $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ jest z założenia formą kwadratową zmiennych x_k, u_{k-1}, to głównym zadaniem jest przekształcenie drugiego składnika sumy do takiej samej postaci jaką ma składnik pierwszy.

W tym celu podstawiamy w (B.13):

$$\hat{x}_k = x_k - x_k + \hat{x}_k$$

$$M_k = A'K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A$$

Mamy kolejno:

$$a_k q_k^* - \int_{R_k|z^k} x_k'A'K_{k+1}Ax_k dr_k = \int_{R_k|z^k} (-2(x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k x_k +$$

$$+ (x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k(x_k - x_k + \hat{x}_k) + w_k'K_{k+1}w_k)dr_k + e_k =$$

$$= \int_{R_k|z^k} (-2x_k'M_k x_k + 2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + x_k'M_k x_k + \ldots$$

$$-2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k) + w'K_{k+1}w_k)dr_k +$$

$$+ e_k = \int_{R_k|z^k} -x_k'M_k x_k dr_k + \int_{R_k|z^k} (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k)dr_k +$$

$$+ \int_{R_k|z^k} w_k'K_{k+1}w_k dr_k + e_k$$

Oznaczając

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$$

$$e_k^* = e_k + \int_{R_k|z^k} w_k'K_{k+1}w_k dr_k +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_k|z^k} \tilde{x}'_k A'_k K_{k+1} B(Q+B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A\tilde{x}_k dr_k \tag{B.15}$$

otrzymujemy:

$$a_k q^*_k = \int_{\mathbb{R}_k|z^k} x'_k L_k x_k dr_k + e^*_k \tag{B.16}$$

$$L_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A$$

Obecnie należy wykonać odpowiednio do (B.14) całkowanie pierwszej strony wyrażenia (B.16) względem z_k po zbiorze $\mathbb{Z}_k|z^{k-1}$.

$$\int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} q^*_k dz_k = a_k^{-1} \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_k|z^k} x'_k L_k x_k dr_k \right) dz_k +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} e^*_k dz_k = a_{k-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}_{k-1}|z^{k-1}} x'_k L_k x_k dr_{k-1} +$$

$$+ a_k^{-1} \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} e^*_k dz_k \tag{B.17}$$

Oznaczając

$$e_{k-1} = a_{k-1} a_k^{-1} \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} e^*_k dz_k \tag{B.18}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_{k-1}|z^{k-1}} (x'_k(L_k+P_k)x_k + u'_{k-1}Q_{k-1}u_{k-1}) dr_{k-1} + e_{k-1} \right) \tag{B.19}$$

czyli

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1})A + P_k$$

$$K_{N+1} = P_{N+1}$$

Otrzymana postać (B.19) posiada taką samą strukturę jak (B.5).

Na zakończenie tej fazy dowodu pokażemy, że reszta e_{k-1} nie zależy od żadnego ze sterowań u^{k-1}. W tym celu powróćmy do wyrażenia (B.15) z uwzględnieniem (B.18), analizując kolejno składniki sumy określającej e_{k-1}. Mamy:

1) $\int\limits_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} e_k dz$, składnik ten na podstawie tw.A.5 dod.A może być przekształcony do postaci $\int\limits_{\mathbb{Z}_{ok}|z_o^{k-1}} e_k dz_{ok}$, w której zbiór $\mathbb{Z}_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od u^{k-1}, zaś e_k nie zależy od u^k z założenia,

2) drugi ze składników przekształcamy następująco

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_k|z^k} w'_k K_{k+1} w_k dr_k dz_k = |\det A| \int\limits_{\mathbb{R}_{k-1}|z^{k-1}} w'_k K_{k+1} w_k dr_{k-1} =$$

$$= |\det A| \int\limits_{\mathbb{R}_{ok-1}|z_o^{k-1}} w'_k K_{k+1} w_k dr_{ok-1}$$

co pozwala na stwierdzenie jego niezależności od u^{k-1},

3) w ostatnim składniku różnica $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ nie zależy od u^{k-1}, stąd na podstawie tw.A.5 z dodatku A.

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_k|z^k} \tilde{x}'_k M_k \tilde{x}_k dr_k \right) dz_k = \int\limits_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_{ok}|z_o^k} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} dr_{ok} \right) dz_k =$$

$$= \int_{Z\,|z_{ok}^{k-1}} \left(\int_{R_o\,|z_{ok}^{k}} x'_{ok} \tilde{M}_k x_{ok} \tilde{dr}_{ok} \right) dz_{ok}$$

stąd cały składnik nie zależy od u^{k-1}.

Czynniki a_k, a_{k-1} mają wartości liczbowe i nie zależą od u^{k-1}.

Ostatecznie $_{k-1}$ nie zależy od u^{k-1}, co kończy ostatnią fazę dowodu.

Dla dowodu zależności

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok} dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok}$$

wystarczy wykorzystać określenie

$$\tilde{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k$$

a następnie na podstawie tw.A.5 z dodatku A podstawić

$$R_k|z^k = \underline{p}_1(z^{k-1}) + R_o|z_o^k$$

oraz

$$x_k = x_{ok} + p_1(z^{k-1})$$

gdzie

$$p_1(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

Abstract

In the paper the control strategies desing in the presence of uncertainty for finite horizon H = 1,...N, linaer state and output equations, quadratic performance index (LQ case) and unknown but bounded disturbances is presented. In the model possible initial conditions and sequences of disturbances in state equations and sequences of measurment noises in the output equation defines jointly given bounded set $\mathbb{T}$ staisfying additional symmetry conditions simplifying the form of equation. The searched control strategy is under assumtions a function of measurement information and minimizes a weighted sum of central moments of the set being an image of set $\mathbb{T}$ in he space of varibles $x_1 \ldots x_{N+1}$, $u_1 \ldots u_N$. By introduction of the notion of information sets and by the use of their surjections the desing problem is driven to the dynamical programming scheme with problems of parametric minimization solved in the particular stages. The optimal control strategies received is in each stage of the control horizon a linear function of the normed intergal of the state vector - in this stage with respect to the given conditional information set. There has been proved that if the condition information set possesses a central symmetry then the normal integral of the state vector over this set can be substituted by the normal integral of the state vector over the conditional set of feasible states in the considerad moment thus the center of gravity of this set. The set is an orthogonal projection of the conditional information set onto the subspace of the state variable.