ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: AUTOMATYKA z.108 Nr kol. 1150

Konrad WOJCIECHOWSKI

SYNTEZA PRAWA STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ ZBIORY INFORMACYJNE TYPU S

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej na podstawie modelu sterowanego obiektu danego w konwencji zmiennych stanu. W modelu niepewności ograniczonej, dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony i całkowalny w sensie Lebesgue'a zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości warunku początkowego oraz ciągów zakłóceń w równaniu stanu i równaniu pomiaru. Do rozwiązania sformułowanego problemu zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych typu S, których definicje i własności przedstawiono w Dodatku. W pracy pokazano, że dla modelu liniowego, praw sterowania tworzących z nim zawierającą się strukturę informacyjną oraz wskaźnika jakości będącego agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}$ w przestrzeni ciągów sterowań i stanów, optymalne prawo sterowania jest dla każdej chwili k rozpatrywanego horyzontu sterowania $\mathbb{H}$ liniową funkcją środka ciężkości zbioru warunkowego $S_k|z^k$.

CONTROL STRATEGIES DESING IN THE PRESENCE OF BOUNDED UNCERTAINTY INFORMATION SETS OF S-TYPE

Summary. in the paper control strategies design problem in the presence of unknown but bounded disturbances in solved for a plant described by a state space model. There has been proved that for control strategies creating with the model a nested information structure and the performance index being an aggregate of second moments of the image of the image of the set $\mathbb{T}$ the optimal control strategy is at each moment of the considered control horizon a linear function of the center of gravity for the conditional set of states.

СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА ТИПА S

Резюме

В работе представлено решение проблемы синтеза законов управления в условиях ограниченной неопределенности. Доказывается, что для линейной модели, для законов управления сочиняющих с ней встроенную информационную структуру и для показателя качества, который является агрегацией моментов 2-ой степени образа множества $\mathbb{T}$, оптимальный закон управления для любого момента времени k рассматриваемого горизонта управления Θ является линейной функцией центра тяжести условного множества $S_k|z^k$.

1. Wprowadzenie

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie najbardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właśnie modelu niepewności należą do danego zbioru. Struktura tego zbioru może być dowolna.

Pierwsze próby wykorzystania takiego modelu można znaleźć w pracach [3], [7], [15, 16], dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [1], [2] również z zakresu teorii strowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty". Model niepewności ograniczonej wykorzystywany był również w pracach [19-26].

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy, dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony i całkowalny w sensie Lebesgue'a zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości zmiennych niepewnych. Wzajemnie jednoznaczne i zależne od praw sterowania odwzorowanie zbioru $\mathbb{T}$ jest zbiorem informacyjnym.

Odpowiednikiem warunkowej oceny wektora stanu jest ogólnie rzut ortogonalny środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu. W przypadku szczególnym jeśli warunkowy zbiór informacyjny spełnia odpowiednie warunki symetrii określone w pracy [24,25] kolejność rzutowania i wyznaczania środka ciężkości może być zamieniona. Wystarczy zatem wyznaczyć środek ciężkości niskowymiarowego warunkowego zbioru stanów będącego rzutem ortogonalnym warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu.

W przypadku ogólnym, jeżeli wymagane warunki symetrii nie są spełnione konieczne jest operowanie pełnowymiarowym warunkowym zbiorem informacyjnym przykładowo typu S. Zbiór Γ dany w przestrzeni zmiennych (x_1, w^N, v^N) przekształca się w zbiór S_k, dany dla $k \in H$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_1, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. Nie wprowadza się zatem zmiennej x_k reprezentującej aktualny stan układu, bowiem ze względu na brak wymaganej symetrii zbiór X_k nie stanowi informacji wystarczającej dla sterowania.

W punkcie 2 zamieszczono sformułowanie rozpatrywanego w pracy problemu syntezy prawa sterowania.

Twierdzenie 1 zamieszczone wraz z dowodem w punkcie 3 określa postać optymalnego prawa sterowania oraz odpowiadający mu optymalny wskaźnik jakości.

Zbiory informacyjne S_k $k \in H$ oraz związane z nimi odwzorowania informacyjne przedstawione są w dodatku A. Podaje się w nim definicje i podstawowe własności zbiorów informacyjnych typu S. Jedną z nich jest słuszna w przypadku modelu liniowego inwariantność miary Lebesgue'a wymienionych zbiorów względem praw sterowania i parametrów modelu.

Praca wykonana w Instytucie Automatyki Politechniki Śląskiej finansowana z. G.609.

2. Problem syntezy praw sterowania

Niech $\mathbb{J}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Jego ustalony podzbiór $\mathbb{H}=\{1,\ldots,N\}$ nazywamy horyzontem sterowania. Ciąg $c:\mathbb{H}\to R^q$ oznaczamy $c^N \overset{\Delta}{=} (c_1',\ldots,c_N')$, tym samym symbolem c^N oznaczamy również wektor $[c_1',\ldots,c_N']$. Podobnie oznaczamy $c^k \overset{\Delta}{=} (c_1',\ldots,c_k')$, oraz $c^{N\setminus k} \overset{\Delta}{=} (c_{k+1}',\ldots,c_N')$ gdzie w obu przypadkach $k \le N$.

Ciągami wyróżnionymi w rozpatrywanym problemie są: stan początkowy $x_1:\{1\}\ R^n$, trajektoria stanu $x:\mathbb{H}\cup\{N+1\}\ R^n$, pomiary $z:\mathbb{H}\ R^p$, sterowania $u:\mathbb{H}\ R^m$.

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1}=Ax_k+Bu_k+w_k\ , x_1 \\ z_k\ =Cx_k+v_k \end{cases}$$

gdzie $k\in H=\{1,\ldots,N\}$, x_k, $w_k\in R^n$, $u_k\in R^m$, z_k, $v_k\in R^p$, $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$ $C\in R^{p\times n}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) wartości zmiennych x_1, w_k, v_k dla $k \in \mathbb{H}$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t=(x_1,w^N,v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T}\subset R^d$, gdzie $d=n+nN+pN$,

iii) struktura informacyjna jest zawierająca się, najprostszymi prawami sterowania tworzącymi taką strukturę z modelem i) są:

$$u_k = u_k(z^k), \qquad k\in\mathbb{H},$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}} (u_k' Q_k u_k + u_k' y_k)dt$$

gdzie dla $k\in\mathbb{H}$

$$m^o = \int_{\mathbb{T}} dt$$

$Q_k>0$,

$y_k:R^d\to R^m$

jest daną funkcją zmiennych niepewnych i,

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k^*(z^k)$, $k\in H$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna.

3. Synteza praw sterowania

Twierdzenie 1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v) ze sformułowania to

i) optymalne prawo sterowania dla każdego $k\in H$ określone jest zależnością

$$u_k^*=u_k^*(z^k)= -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_k|z^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \tag{1}$$

oraz

$$u_k^*=u_{ok}(z_o^k)= -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \tag{1.a}$$

ii)minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem

$$q^*=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N} \int_{S_{ok}} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) ds_k\, dz_o^k \tag{2}$$

Dowód. Dokonując odpowiedniej zmiany zmiennych (patrz dodatek A) w każdej z całek będących składnikami sumy określającej q możemy zapisać problem minimalizacji w postaci

$$q= \int_{Z_1} \min_{u_1(z^1)} \Big(\int_{S_1|z^1} (u_1'Q_1u_1 + u_1'y_1)ds_1 + \ldots$$

$$+ \int_{Z_k|z^{k-1}} \min_{u_k(z^k)} \Big(\int_{S_k|z^k} (u_k'Q_ku_k + u_k'y_k)ds_k + \ldots$$

$$+ \int_{Z_N|z^{N-1}} \min_{u_N(z^N)} \Big(\int_{S_N|z^N} (u_N' Q_N u_N + u_N' y_N) ds_N \Big) dz_N \ldots \Big) dz_k \ldots \Big) dz_1 \tag{3}$$

Zakładamy, że k-ty problem optymalizacji ma postać

$$\min_{u_k(z^k)} \Big(\int_{S_k|z^k} (u_k' Q_k u_k + u_k' y_k) ds_k + e_k \Big) \tag{4}$$

gdzie e_k nie zależy od u_i, $i=1,\ldots,k-1$.

Rozwiązanie k-tego problemu minimalizacji ma postać

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_k|z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \tag{5}$$

i odpowiada mu składnik

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{Z_k|z^{k-1}} \Big(\int_{S_k|z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_k|z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) dz_k + \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k dz_k \tag{6}$$

wchodzący addytywnie do k-1 go problemu minimalizacji. Składnik ten może być również zapisany w postaci

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{Z_k|z^{k-1}} \int_{S_k|z^k} \Big(\int_{S_k|z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_k|z^k} y_k(s_k) ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \Big) ds_k dz_k + \int_{Z_k|z^{k-1}} e_k dz_k \tag{7}$$

Rozpatrywany składnik nie zależy od żadnego u_i, $i=1,\ldots,k-1$, ponieważ na podstawie tw.A.11 $S_k|z^k = S_{ok}|z_o^k$, zbiór $S_{ok}|z_o^k$ z definicji nie zależy od u_i, $i=1,\ldots,k-1$, w konsekwencji wyrażenie podlegające całkowaniu względem z_k jest funkcją z_{ok} i ostatecznie cały składnik e_{k-1} może być zapisany w postaci. Podobnie na podstawie tw.A.12 uwzględniając, że e_k zależy od z_{ok} można ostatecznie wyrażenie (7) przepisać w postaci

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \int_{S_{ok}|z_o^k} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) ds_k dz_k + \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k dz_{ok} \tag{8}$$

Uwzględniając, że zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od u_i, $i=1,\dots,k-1$, również cały składnik nie zależy od u_i, $i=1,\dots,k-1$.

Ponieważ dla $k=N$, $e_N=0$ i tym samym nie zależy od u_i, $i=1,\dots,N-1$ to postać

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_k|z^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_k|z^k} ds_k \tag{9}$$

jest słuszna dla każdego $k \in H$.

Wykorzystując ponownie tw. A.11 z dodatku A, wyrażenie na optymalne prawo sterowania można przekształcić do postaci

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \tag{10}$$

Składnik o numerze k-tym sumy określającej q^* ma postać

$$-\frac{1}{4} \int_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \int_{S_{ok}|z_o^k} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) ds_k dz_k =$$

$$-\frac{1}{4} \int_{S_{ok}} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) d(s_k, z_o^k) \tag{11}$$

Stąd

$$q^* = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{S_{ok}} \Big(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \Big) Q_k^{-1}$$

$$\left(\int_{S_{ok}|z_o^k} y_k(s_k)ds_k \Big/ \int_{S_{ok}|z_o^k} ds_k \right) ds_k\, dz_o^k \tag{12}$$

co kończy dowód tw.1.

Wniosek 1.1 Jeżeli spełnione są założenia i)-v) ze sformułowania problemu i dodatkowo dla każdego $k\in\mathbb{H}$ $y_k(s_k)=L_k s_k$ to optymalne prawo sterowania dla każdego $k\in\mathbb{H}$ jest liniową funkcją środka ciężkości $b_{S_{ok}|z_o^k}$ zbioru $S_{ok}|z_o^k$

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} L_k\, b_{S_{ok}|z_o^k} \tag{13}$$

a minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem

$$q^* = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{S_{ok}} b'_{S_{ok}|z_o^k} Q_k^{-1} b_{S_{ok}|z_o^k}\, d(s_{ok}, z_o^k) \tag{14}$$

Dowód. Podstawiając $y_k(s_k)=L_k s_k$ w wyrażeniu na optymalne prawo sterowania z tw.1. otrzymujemy

$$u_k^* = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} L_k\, b_{S_{ok}|z_o^k}$$

Podobnie podstawiając $y_k(s_k)=L_k s_k$ w wyrażeniu na minimalną wartość wskaźnika jakości z tego samego tw.1. otrzymujemy

$$q^* = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{S_{ok}} b'_{S_{ok}|z_o^k} Q_k^{-1} b_{S_{ok}|z_o^k}\, d(s_{ok}, z_o^k)$$

4. Podsumowanie

Przedstawione rozwiązanie problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej, liniowego modelu zapisanego w przestrzeni stanu oraz wskaźnika jakości będącego agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}$ w przestrzeni zmiennych u^N, x^{N+1} zorientowane jest na przypadek w którym zbiór $\mathbb{T}$ nie spełnia warunków symetrii umożliwiających operowanie warunkowymi zbiorami stanów [24], [25]. Sterowanie optymalne jest w takim przypadku funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego typu S.

LITERATURA

[1] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MIT, Cambridge, 1971.

[2] Fogel E.: System identification via membership set constraints with energy constrained noise. IEEE Trans. Automatic Control, AC-24(1979), pp. 752-758.

[3] Fogel E., Huang Y.F.: On the value of information in system identification bounded noise case, Automatica, 18(1982), pp. 229-238.

[4] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[5] Ho Y. C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol. 68, (1980), pp. 644-654. [28] Ho Y. C., Kastner M.P., Wong E.: Teams signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[6] Ho Y. C., Chu K.C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp. 15-22.

[7] Keesman K.J., van Straten G.: Modified set theoretic identyfication of ill-defined water quality systems from poor data. Proc. of IAWPRC Symp. Systems Analysis in Water Quality Management, Pergamon Press, Oxford, 1987, pp.297-308.

[8] Kuncevicz W. M.: Opriedelenije garantirowanych ocenok sostojanija i paramietrov diskrietnych dynamiczieskich sistem. Kibiernietika i Wyczislitielnaja Tiechnika, Wyp.75 (1987), pp.1-6.

[9] Kurzhanskii A.B.: "Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[10] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control and system estimation under uncertainty conditions. I, II. Probl. Control & Information Theory, No.6, 1980, No.1, 1981.

[11] Lin J.N.: Determination of rechable set for a linear discrete system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[12] Norton J.P.: Identification and application of bounded-parameter models. Automatica, vol 23, 1987, pp.497-507.

[13] Ovseevich A.I., Trushchenkov V.L.,Chernousko F. L.: Equations of continuous guaranteed state estimation for dynamical systems. Izvestija of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics, No.4, (1984), pp.94-101.

[14] Pronzato L., Walter E.: Some results on experiment design for bounded-error models. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation Paris, 1988.

[15] Schweppe F.C.:Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13(1968), pp. 408-414.

[16] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[17] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp.1-16.

[18] Witsenhausen H.S.: Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13 (1968), pp. 556-558.

[19] Wojciechowski K.: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności. Z.N. Pol. Śl., s.Automatyka Z.74, 1980,

[20] -: Decentralized resources allocation in large scale system under uncertainty conditions. System Science vol.9, 1983 pp.31-37, co-author.

[21] -: Sterowanie optymalne w warunkach niepewności stanu jako problem optymalizacji wielokryterialnej. Symp. Model. w Mech., Beskid Śląski 1984

[22] -: Metoda symulacji układów dynamicznych w warunkach niepewności ograniczonej . SPD 2, Zakopane, 1985.

[23] -: Control and decision making under set-membership model of uncertainty. Analysis and synthesis. Raport, LH Wageningen, 1986.

[24] -: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności, Konf. RP.I.02, Kazimierz Dolny 1988.

[25] -: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek centrowanego zbioru $\mathbb{T}$, złożone do publikacji w Z.N. Pol. Śl. s. Automatyka.

[26] -: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru $\mathbb{T}$, złożone do publikacji w Archiwum Automatyki i Telemechaniki.

DODATEK A

A.1. Definicje i podstawowe własności zbiorów informacyjnych typu S

Jako modele w przestrzeni stanu wyróżnia się niesterowany (swobodny) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{o,k+1} = Ax_{o,k} + w_k ; x_1 \\ z_{o,k} = Cx_{o,k} + v_k \end{cases} \tag{A.1}$$

oraz sterowany (wymuszony) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k : x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{A.2}$$

gdzie w obydwu przypadkach dla $k \in \mathbb{H}$

$x_{o,k+1}$, x_k, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $z_{o,k}$, z_k, $v_k \in R^p$,
$A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1}.

Definicja A.1. Określone dla każdego $k \in \mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\mu_{ok}: R^d \to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k, v^k) \in R^d$ punkt $(s_k, z^k) \in R^d$ gdzie $s_k = (x_1, w^N, v^{N/k})$, nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie μ_{ok} przekształca dany zbiór $\mathbb{T} \subset R^d$ w zbiór

$$S_{ok} = \mu_{ok}(\mathbb{T}) = \{(s_k, z_o^k) : (s_k, z_o^k) = \mu_{ok}(s_k, v^k) \mid (s_k, v^k) \in \mathbb{T}\} \subset R^d$$

Zbiór S_{ok} nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi $\mathbb{T}$ zgodnie z odwzorowaniem μ_{ok}.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in \mathbb{H}$:

i) odwzorowanie μ_{ok} jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} = \mu_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$s_k = (x_1^N, w^N, v^{N \setminus k})$$

zaś macierz H_p określona jest następująco

$$H_p = \begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$P_{41} = \left.\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\right\} k \text{ wierszy macierzowych}$$

$$P_{42} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \text{k kolumn macierzowych} & \text{N-k kolumn macierzowych} \end{array} \end{array}$$

ii) odzworowanie odwrotne μ_{ok}^{-1} ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \rho_{ok}^{-1}(s_{ok}, z_o^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

gdzie $H_r = -H_p$.

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika natomiast z zależności:

$$x_{ok} = A^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}w_i$$

$$z_{oj} = C\left(A^{j-1}x_1 + \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}w_i\right) + v_j, \qquad j=1,\dots,k$$

zapisanych w postaci macierzowej. Te same zależności rozwikłane względem x_1 i ciągu zmiennych v^k dają postać odwzorowania odwrotnego.

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_{ok}}|=1$$

gdzie $J_{\mu_{ok}}=\partial\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix}/\partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania μ_{ok}.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania μ_{ok} jest tożsama z macierzą (tw. A.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy jedności.

Wniosek A.1. Niech $d(s_k,z_o^k)$, $d(s_k,v^k)$ będą odpowiadającymi sobie zgodnie z odwzorowaniem μ_{ok} objętościami elementów różniczkowych zbiorów S_k, $\mathbb{T}$. Dla każdego $k\in\mathbb{H}$ zachodzi

$$d(s_k,z_o^k) = d(s_k,v^k).$$

Słownie oznacza to ,że objętość elementu różniczkowego (miara) jest niezmiennikiem odwzorowania μ_{ok}.

Definicja A.2. Określone dla każdego $k\in\mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\mu_k:R^d\to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k,v^k)\in\mathbb{T}\subset R^d$ punkt $(s_k,z^k)\in R^d$, gdzie $s_k=(x_k,w^N,v^{N\setminus k})$ nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie μ_k zależy od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,..,k-1$ i przekształca dany zbiór $\mathbb{T}\subset R^d$ w zbiór

$$S_k=\mu_k(\mathbb{T})=\left\{(s_k,z^k):(s_k,z^k)=\mu_k(s_k,v^k)\,|\,(s_k,v^k)\in\mathbb{T}\right\}\subset R^d$$

Twierdzenie A.3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ to dla każdego $k\in\mathbb{H}$ odwzorowanie μ_k określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

gdzie $(s_k,z_o^k)=\mu_{ok}(s_k,v^k)$ oraz

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i) \end{bmatrix}$$

Dowód. Niejawną postać odwzorowania μ_k otrzymujemy wykorzystując zależność:

$$x_k = x_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i)$$

oraz zależność:

$$z_j = z_{oj} + C\sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}Bu_i(z^i)$$

Dla j=2,...,k otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowego tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania μ_k wymaga rozwikłania zależności z tw.A.3 względem z^k, co jest możliwe w pewnych przypadkach. Jednego z nich dotyczy następujące

Twierdzenie A.4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i funkcje $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$ są liniowe to odwzorowanie μ_k jest liniowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$L_{21}=(1-M)^{-1}H_p \qquad L_{22}=(1-M)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ M_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz H_p określona jest jak w tw.A.1

Dowód. Przy założeniu liniowych funkcji $u(z^k)$, $k\in H$, składnik $p_4(z^{k-1})$ przedstawić można kolejno w postaciach:

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{l=1}^{k-1} A^{k-1-l}Bu_l(z^l) \end{bmatrix}$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ M_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = M\, z^k$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-M \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-M)^{-1}H_p & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

Twierdzenie A.5. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i funkcje $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$ są liniowe to zbiór S_k jest wzajemnie jednoznacznym liniowym odwzorowaniem zbioru S_{ok}. Wszystkie wartości własne tego odwzorowania wynoszą 1.

Δοωοδ. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i prawa sterowania są liniowe to na podstawie tw.A.3 (patrz również dowód tw.A.3.) mamy:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

gdzie macierz M określona jest jak w tw.A.3. Stąd wszystkie wartości własne macierzy powyższego odwzorowania są równe 1.

Twierdzenie A.6. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) to dla każdego $k \in H$ i dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_k}| = |\det J_{\mu_{ok}}| = 1$$

gdzie $J_{\mu_k} = \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania μ_k.

Dowód. Odwzorowanie μ_k określone jest niejawnie (por.tw.A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4\ (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4\ (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Macierz H_p i funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w tw.A.1, tw.A.3.

$$J_{\mu_k}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1+\partial p_4\ (z^{k-1})/\partial z^k \end{bmatrix}$$

Dla założonej postaci praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ mamy:

$$\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k = \begin{bmatrix} \neq 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $\det J_{\mu_k^{-1}} = \det J_{\mu_k} = 1$ co kończy dowód.

Wniosek A.2. Niech $d(s_k, z^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie według odwzorowania μ_k objętościami elementów różniczkowych zbiorów S_k, $\mathbb{T}$. Dla każdego $k \in H$ dla dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ zachodzi

$$d(s_k, z^k) = d(s_{ok}, z_o^k) = d(s_k, v^k).$$

Słownie oznacza to ,że objętość elementu różniczkowego (miara) jest niezmiennikiem odwzorowania μ_k.

Definicja A.3. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $\eta_{ok}: R^d \to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące punktowi $(s_k, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in S_{ok} \subset R^d$ punkt $(s_k, v_k, z_o^{k-1}) \in S_{ok-1} \subset R^d$. Odwzorowanie η_{ok} przekształca dany zbiór S_{ok} w zbiór

$$S_{ok-1} = \eta_{ok}(S_{ok}) = \left\{ (s_{k-1}, z_o^{k-1}) : (s_{k-1}, z_o^{k-1}) = \eta_{ok}(s_k, z_o^k) \,|\, (s_k, z_o^k) \in S_{ok} \right\}$$

Twierdzenie A.7. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) każdego $k \in H$ odwzorowanie η_{ok} jest liniowe i ma postać :

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie odwrotne η_{ok}^{-1} ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$H_{pk} = [\ P_{41k}\ P_{42k}\ 0\ ]$$

$$P_{41k} = [\ C\,A^{k-1}\ ]$$

$$P_{42k} = [\ \underbrace{C\,A^{k-2} \ldots C}_{k-1 \text{ bloków}}\ \underbrace{0 \ldots 0}_{N-k-1 \text{ blok}}\ ]$$

Dowód. Wykorzystując równanie wyjścia wyrażamy z_{ok} przez x_1 ,oraz w^{k-1} i v_k co prowadzi do określenia η_{ok}^{-1} dla przypadku modelu o postaci (A.1).

Podobnie dla otrzymania postaci odwzorowania η_{ok} wyrażamy v_k przez x_1, w^{k-1} i z_{ok}.

Twierdzenie A.8. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_{ok}}| = 1$$

gdzie $J_{\eta_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} s_{ok-1} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_{ok} \\ z_o^{k} \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania η_{ok}.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania η_{ok} jest równa macierzy reprezentującej to odwzorowanie (Tw.A.7). Jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek A.3. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania η_{ok} elementów różniczkowych zbiorów S_{ok-1}, S_{ok} zachodzi związek:

$$d(s_{ok-1}, z_o^{k-1}) = d(s_{ok}, z_o^{k})$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_{ok-1}|z_o^{k-1}$, $S_{ok}|z_o^{k-1}$ (p.A.2. Def.A.5) zachodzi związek:

$$ds_{ok-1} = ds_{ok} dz_{ok}$$

Definicja A.4. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\eta_k : R^d \to R^d$, $d = n+nN+pN$, zależne od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$, przyporządkowujące punktowi $(s_k, z_k, z^{k-1}) \in S_k \subset R^d$ punkt $(s_k, v_k, z^{k-1}) \in S_{k-1} \subset R^d$. Odwzorowanie η_k przekształca dany zbiór S_k w zbiór

$$S_{k-1} = \eta_k(S_k) = \left\{ (s_{k-1}, z^{k-1}) : (s_{k-1}, z^{k-1}) = \eta_k(s_k, z^k) \,|\, (s_k, z^k) \in S_k \right\}$$

Twierdzenie A.9. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\dots,k-1$, to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie η_k określone jest niejawnie postacią

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{4k}(z^{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie macierz H_{pk}, określona jest jak w tw.A.7, zaś funkcja wektorowa $p_{4k}(z^{k-1})$ jak w tw.A.3.

Dowód. Postać odwzorowania η_k odpowiadająca modelowi (A.2) wynika z zależności $v_k=z_k-Cx_k$ w której x_k wyrażamy przez x_1, w^{k-1}, $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$.

Twierdzenie A.10. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) to dla każdego $k\in\mathbb{H}$ i dla dowolnej funkcji $u_k(z^{k-1})$ zachodzi:

$$\det J_{\eta_k} = |\det J_{\eta_{ok}}| = 1$$

gdzie: $J_{\eta_k} = \partial \begin{bmatrix} s_{k-1} \\ z^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania η_k.

Dowód. Macierz J_{η_k} ma postać:

$$J_{\eta_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -H_{pk} & 1 & -\partial p_{4k}/\partial z^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

stąd jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek A.4. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania η_k elementów różniczkowych zbiorów S_{k-1}, S_k zachodzi związek:

$$d(s_{k-1}, z^{k-1}) = d(s_k, z^k)$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_k|z^{k-1}$, $S_k|z^{k-1}$ (p.A.2. Def.A.5) zachodzi związek:

$$ds_{k-1} = d(s_k, z_k)$$

A.2. Zbiory warunkowe i rzuty

Definicja A.5. Niech dla każdego $k\in\mathbb{N}$ będzie dany zbiór S_{ok} o elementach (s_{ok}, z_o^k). Dla ustalonego z_o^k zbiór $S_{ok}|z_o^k=\{(s_{ok}):(s_{ok}, z_o^k)\in S_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru S_{ok} przy warunku z_o^k.

Zbiór $S_{ok}|z_o^k$ można interpretować geometrycznie jako rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych s_{ok} "przekroju" danego zbioru S_{ok} hiperpłaszczyzną (w przestrzeni zmiennych (s_{ok}, z_o^k)) z_o^k=const.

Definicja A.6. Niech dla każdego $k\in\mathbb{N}$ będzie dany zbiór S_{ok} o elementach (s_{ok}, z_o^k). Zbiór $\mathbb{P}_{ok}=\pi_{zk}(S_{ok})=\{(z_o^k):(s_{ok}, z_o^k)\in S_{ok}\}$ nazywamy rzutem ortogonalnym zbioru S_{ok} na przestrzeń zmiennych z_o^k. Zbiór $\mathbb{Z}_{ok}|z_o^{k-1}=$ $=\{z_{ok}:(z_{ok}, z_o^{k-1})\in\mathbb{P}_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji z_{ok} dla danego ciągu obserwacji z_o^{k-1}.

Pomijając w Def.A.5, A.6 indeks "o" otrzymujemy definicje zbiorów: $S_k|z^k$, $\mathbb{P}_k$, $\mathbb{Z}_k|z^{k-1}$.

Twierdzenie A.11. Jeżeli układ dynamiczny ma postacie (A.1), (A.2) to pomiędzy zbiorami $S_{ok}|z_o^k$, $S_k|z^k$ zachodzi związek:

$$S_k|z^k=S_{ok}|z_o^k$$

gdzie $z_o^k=z^k-p_4(z^{k-1})$, a funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ jest określone jak w Tw.A.3.

Dowód. Dla każdego $k\in\mathbb{N}$ odwzorowanie μ_k (Def.A.2) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Zbiór warunkowy $S_k|z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość z^k już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym z^k również ustalone jest z^{k-1} to $p_4(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym co prowadzi do słuszności tezy. Zauważmy, że w opisany powyżej sposób nie można wyznaczyć zbioru $S_k|z^{k\setminus l}$ gdzie $1 \le l \le k$ przy niezmienionej definicji zbioru S_k i funkcji wektorowej $p_4(z^{k-1})$. Wynika to stąd, że przy ustalonym $z^{k\setminus l}$ dla $1 \le l \le k$ nie jest ustalone z^{k-1}.

Twierdzenie A.12. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), (A.2) to pomiędzy zbiorami $Z_{ok}|z_o^{k-1}$, $Z_k|z^{k-1}$ zachodzi związek:

$$Z_k|z^{k-1}=p_{4k}(z^{k-1})+Z_{ok}|z_o^{k-1}$$

gdzie

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}B\,u_i(z^i)$$

Dowód. Dla każdego $k\in H$ przy ustalonym z^{k-1}, $p_{4k}(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k=z_{ok}+p_{4k}(z^{k-1})$.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Mirosław Zborowski

Wpłynęło do Redakcji 20.05.1991 r.

Abstract

In the paper control strategies desing problem in the presence of unknown but bounded disturbances is solved for a plant described by a state space model. In the model uncertainty a bounded and Lebesuque integrable set $\mathbb{T}$ given in the respective real space describes jointly possible values of the intial condition and sequences of distrubances in the state and measurment equations. To solve the problem a novel method of information sets of S-type in used. The S sets are defined and characterized in the Appendix. There has been proved for control strategies creating with the

the model a nested information structure and the performance index being an aggregate of second moments of the image of the set T in the space of the controls and the states the optimal control strategy is in each moment of the considered control horizon a linear function of the center of gravity for the conditional set of sates.