ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: AUTOMATYKA z.108 Nr kol. 1150

Konrad WOJCIECHWSKI

SYNTEZA STEROWANIA MINIMAXOWEGO W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ. ZBIORY INFORMACYJNE TYPU S

Streszczenie. W pracy przedstawiono efektywne rozwiązanie pewnego problemu syntezy minimaxowych praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej na podstawie modelu danego w konwencji zmiennych stanu. Pokazano, że dla modelu liniowego, praw sterowania tworzących z nim zawierającą się strukturę informacyjną oraz wskaźnika jakości będącego maksymalną względem możliwych warunków początkowch x_1 agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}|x_1$ w przestrzeni ciągów sterowań i stanów, optymalne prawo sterowania jest dla każdej chwili rozpatrywanego horyzontu sterowania liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru $S|x_1$ odpowiadającego optymalnej wartości x_1^*. Wyznaczenie tej wartości wymaga rozwiązania pomocniczego zadania maksymalizacji parametrycznej.

MIN-MAX CONTROL STRATEGIES DESING IN THE PRESENCE OF BOUNDED UNCERTAINTY. INFORMATION SETS OF S-TYPE

Summary. In the paper has been proved that for control strategies creating with the model a nested information structure and the performance index being a maximal with respect to possible initial state x_1 aggregate of second moments of the image of the $\mathbb{T}|x_1$ the optimal control law is in each moment of the considered control horizon a linear function of the center of gravity for the conditional set $S|x_1$ which coincides with the optimal value x_1^*.

СИНТЕЗ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА ТИПА S

Резюме.

В работе доказывается, что для линейной модели, для законов управления сочиняющих с ней встроенную информационную структуру и для показателя качества, который является максимальной относительно возможных начальных условий x_1 агрегацией моментов 2-ой степени образа множества $\mathbb{T}|x_1$ в пространстве последовательностей управлений и состояний, оптимальный закон управления для любого момента времени рассмотриваемого горизонта управления является линейной функцией центра тяжести условного множества $S_k|z^k$, соответствующего оптимальному значению x_1^*.

1. Wprowadzenie

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie najbardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej o takim właścnie modelu należą do danego zbioru. Struktura tego zboiru może być dowolna.

Piewrsze próby wykorzystania modelu niepewności ograniczonej można znaleźć w pracach [3], [7], [15,16] dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [1], [2] również z zakresu teorii sterowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty". Model niepewności ograniczonej wykorzystywany był również wpracach [19-26].

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy, dany w odpowiedniowymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony i całkowalny w sensie Lebesuge'a zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości warunku początkowego oraz ciągów zakłóceń w równaniu stanu i równaniu pomiaru.

Do rozwiązania sformułowanego problemu syntezy sterowania minimaxowego zastosowano orginalną metodę zbiorów informacyjnych typu S, w powiązaniu z własnością minimaxu, będącą konsekwencją istnienia punktu siodłowego.

Do celów pracy zbiór $\mathbb{T}$ dany w przestrzeni zmiennych (x_1, w^N, v^N) przekształca się w zbiór S_k, dany dla $k \in \mathbb{H}$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_1, w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$. Podobnie zbiorowi warunkowemu $\mathbb{T}|x_1$ o elemetach (w^N, v^N) odpowiada dla $k \in \mathbb{H}$ zbiór $S_k|x_1$ o elementach $(w^N, v^{N\setminus k}, z^k)$.

W pracy pokazano, że dla modelu liniowego, praw sterowania tworzących z nim zawierającą się strukturę informacyjną oraz wskaźnika jakości będącego maksymalną względem możliwych warunków początkowych x_1 agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}|x_1$ w przestrzeni ciągów sterowań i stanów, optymalne prawo sterowania jest dla każdej chwili rozpatrywanego horyzontu sterowania liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru $S|x_1$ przy

optymalnej wartości x_1^*. Wyznaczenie tej wartości wymaga rozwiązania pomocniczego problemu syntezy praw sterowania przy ustalonej wartości x_1, a następnie problemu maksymalizacji parametrycznej względem tej wartości.

W punkcie 2 zamieszczono sformułowanie rozpatrywanego w pracy problemu syntezy prawa sterowania.

Lemat 1 zamieszczony wraz z dowodem w punkcie 3 określa postać optymalnego prawa sterowania będącego rozwiązaniem problemu pomocniczego oraz odpowiadający mu optymalny wskaźnik jakości. Twoerdzenie 1 określa rozwiązanie problemu sformułowanego w pracy i jest bezpośrednią konsekwencją lematu 1 i istnienia punktu sidołowego rozpatrywanego problemu głównego.

Zbiory informazyjne S_k, $S|x_1$ dla $k\in H$ oraz związane z nimi odwzorowania informacyjnie przedstawione są w dodatku A. Podaje się w nim definicje i podstawowe własności tych zbiorów. Jedną z nich jest słuszna w przypadku modelu liniowego inwariantność miary Lebesgue'a wymianionych zbiorów względem praw sterowania i parametrów modelu.

Podstawowe informacje z zakresu minimaxu przedstawiono w dodatku B.

2. Problem syntezy praw sterowania

Niech J oznacza zbiór liczb naturalnych. Jego ustalony podzbiór $H=\{1,\dots,N\}$ nazywamy horyzontem sterowania. Ciąg $c: H\to R^q$ oznaczamy $c^N=(c_1,\dots c_N)$, tym samym symbolem, c^N oznaczamy również wektor $[c_1,\dots c_N]$. Podobnie oznaczamy $c^k \overset{\Delta}{=} (c_1,\dots, c_k)$, oraz $c^{N\setminus k} \overset{\Delta}{=} (c_{k+1},\dots,c_N)$, gdzie w obu przypadkach $k \le N$.

Ciągami wyróżnionymi w rozpatrywanym problemie są: stan początkowy x_1: $\{1\}\longrightarrow R^n$, trajektoria stanu $x: H\cup\{n+1\}\longrightarrow R^n$, pomiary $z: H\longrightarrow R^p$, sterowania $u: H\longrightarrow R^m$.

Obecnie określić można następujący

<u>Problem syntezy praw sterowania</u>

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, & x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

gdzie $k \in H = \{1, \ldots, N\}$, x_k, $w_k \in R^n$, z_k, $v_k \in R^p$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ $C \in R^{p \times n}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) wartości zmiennych x_1, w_k, v_k dla $k \in \mathbb{H}$ nie są znane, wiadaomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t = (x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesugue'a zbioru $\mathbb{T} \subseteq R^d$, gdzie $d = n + nN + pN$,

iii) struktura informacyjna jest zawierająca się, najprostszymi prawami sterowania tworzącymi taką strukturę z modelem i) są:

$$u_k = u_k(z^k), \qquad k \in \mathbb{H},$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$g(u^N) = \max_{x_1 \in \Pi_{x_1}(\mathbb{T})} \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}|x_1} (u_k' Q_k u_k + u_k' y_k)\, d(t \backslash x_1)$$

gdzie $t \backslash x_1 \overset{\Delta}{=} (w^N, v^N)$

$$m^o = \int_{\mathbb{T}|x_1} d(t \backslash x_1)$$

dla $k \in \mathbb{H}$, $Q > 0$, $y_k : R^d \to R^m$ jest daną funckją zmiennych niepewnych t, zaś $\Pi_{x_1}(\Pi)$ jest rzutem ortogonalnym zbioru $\mathbb{T}$ na przestrzeń zmiennych x_1.

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu praw sterowania $u_k^*(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna.

$$q^* = \min_{u^N} g(u^N) = \min_{u^N} \max_{x_1 \in \Pi_{\varkappa_1}(\bar{U})} f(x_1, u^N)$$

Odpowiednio do zapisu z punktu v) problem A syntezy praw sterowania jest problemem minimaxowym.

Idea dlaszych rozważań polega na wprowadzeniu problemu

$$\max_{x_1 \in \Pi_{\varkappa_1}(\bar{U})} \min_{u^N} f(x_1, u^N)$$

i pokazaniu, że para (x_1^*, u^{*N}) stanowiąca jego rozwiązanie jest również rozwiązaniem problemu oryginalnego (dodatek B).

Funckje

$$u_k^* = p_k^*(x_1, z_o) \quad k \in H$$

stanowiące rozwiązanie problemu

$$\min_{u^N} f(x_1, u^N)$$

nazywamy dalej pomocnicznymi prawami sterowania, zaś funkcję

$$h(x_1) = f(x_1, p^{*N})$$

pomocniczym wskaźnikiem jakości.

3. Synteza pomocniczych praw sterowania

Odpowiednio do sformułowanego w p.2 problemu A określić można następujący

Problem B syntezy pomocniczych praw sterowania

Zakładamy, że spełnione są punkty i)-ii) z problemu A,

iii) struktura informacyjna jest zawierająca się, pomocniczymi prawami sterowania tworzącymi taką struktruę z modelem i) są:

$$u_k = p_k(x_1, z^k), \quad k \in H,$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$f(x_1,u^N) = \frac{1}{m_o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}|x_1} (u_k' Q_k u_k + u_k' y_k)\, d(t\backslash x_1)$$

gdzie m_o, Q_k, y_k są określone jak w problemie A,

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu pomocniczych praw sterowania $p_k^*(x_1, z^k)$, $k\in\mathbb{N}$ takich, że

$$h^*(x_1) = \min_{u^N} f(x_1,u^N)$$

Lemat 1. Optymalne (pomocnicze prawo sterownia, będące rozwiązaniem problemu B, określone jest dla każdego $k\in\mathbb{N}$ zależnością:

$$p_k^*(x_1,z^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} y_k(s_k)\,d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \tag{1}$$

oraz

$$p_{ok}^*(x_1,z_o^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)\,d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1) \tag{1.a}$$

ii) minimalna wartość pomocniczego wskaźnika jakości wyraża się wzorem:

$$h(x_1) = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1} \Big(\int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)\,d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1) \Big)\, Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)\,d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\, d(s_k\backslash x_1)\, dz_o^k \tag{2}$$

Dowód: Dokonując odpowiedniej zmiany zmiennych (patrz dodatek A) w każdej z całek będących składnikiem sumy określającej q możemy zapisać problem minimalizacji w postaci:

$$h(x_1) = \int_{\mathbb{Z}_1} \min_{p_1(x_1,z^1)} \Big(\int_{\mathbb{S}_1|x_1,z^1} (u_1'Q_1u_1 + u_1'y_1)d(s_1\backslash x_1) + \ldots$$

$$+ \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \min_{p_k(x_1,z^k)} \Big(\int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} (u_k'Q_ku_k + u_k'y_k)d(s_k\backslash x_1) + \ldots$$

$$+ \int_{\mathbb{Z}_N|z^{N-1}} \min_{p_N(x_1,z^N)} \Big(\int_{\mathbb{S}_N|x_1,z^N} (u_N'Q_Nu_N + u_N'y_N)d(s_N\backslash x_1)dz_N \ldots \Big)dz_k \ldots \Big)dz_1 \quad (3)$$

Zakładamy, że k-ty problem optymalizacji ma postać:

$$\min_{p_k(x_1,z^k)} \Big(\int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} (u_k'Q_ku_k + u_k'y_k)d(s_k\backslash x_1) + e_k \Big) \quad (4)$$

gdzie e_k nie zależy od $u_1,\ldots,k-1$.

Rozwiązanie k-tego problemu minimalizacji ma postać:

$$p_k^*(x_1,z^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \quad (5)$$

i odpowiada mu składnik

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} \Big(\int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \; Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \int_{\mathbb{S}_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1)dz_k + \int_{\mathbb{Z}_k|z^{k-1}} e_k dz_k \quad (6)$$

wchodzący addytywnie dok-1-go problemu minimalizacji. Składnik ten może być również zapisany w postaci:

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int\limits_{Z_k|z^{k-1}} \int\limits_{S_k|x_1,z^k} \Big(\int\limits_{S_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int\limits_{S_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \Big) d(s_k\backslash x_1)dz_k + \int\limits_{Z_k|z^{k-1}} e_k dz_k \tag{6}$$

Rozpatrywany składnik nie zależy od żadnego p_i, $i=1,\dots,k-1$, ponieważ na podstawie tw. A.11 $S_{ok}|(x_1,z_o^k)=S_{ok}|(x_1,z_o^k)$ zbiór $S_{ok}|(x_1,z_o^k)$ z definicji nie zależy od p_i, $i=1,\dots,k-1$. W konsekwencji wyrażenie podlegające całkowaniu względem z_k jest funkcją z_{ok}. Podobnie na podstawie tw. A.12 uwzględniając, że e_k zależy z_{ok} można ostatecznie wyrażenie (7) przepisać w postaci:

$$e_{k-1} = -\frac{1}{4} \int\limits_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} \int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} \Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1) \Big) Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1) \Big) d(s_k\backslash x_1)dz_{ok} + \int\limits_{Z_{ok}|z_o^{k-1}} e_k dz_{ok} \tag{7}$$

Uwzględniając, że zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}$ nie zależy od u_i, $i=1,\dots,k-1$, również cały składnik nie zależy od u_i, $i=1,\dots,k-1$.

Ponieważ dla $k+N$, $e_N=0$ i tym samym nie zależy od u_i, $i=1,\dots,N-1$, to postać

$$p_k^*(x_1,z^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int\limits_{S_k|x_1,z^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_k|x_1,z^k} d(s_k\backslash x_1) \tag{8}$$

jest słuszna dla każdego $k\in H$.

Wykorzystując ponownie tw. A.11 z dodatku A, wyrażenie na optymalne prawo sterowania można przekształcić do postaci:

$$p_k^*(x_1,z^k)=-\frac{1}{2}\,Q_k^{-1}\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k')d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1) \tag{10}$$

Składnik o numerze k-tym sumy określającej q^* ma postać:

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{Z_{ok}|z_o^{k-1}}\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k}\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\Big)\,Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\Big)\,d(s_k\backslash x_1)\,dz_k=$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{S_{ok}|x_1}\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)ds_k\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} ds_k\Big)\,Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\Big)\,d((s_k\backslash x_1),z_o^k) \tag{11}$$

Stąd

$$h(x_1)=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int\limits_{S_{ok}|x_1}\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\Big)\,Q_k^{-1}$$

$$\Big(\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} y_k(s_k)d(s_k\backslash x_1)\Big/\int\limits_{S_{ok}|x_1,z_o^k} d(s_k\backslash x_1)\Big)\,d(s_k\backslash x_1)\,dz_o^k \tag{12}$$

co kończy dowód lematu 1.

<u>Wniosek 1.</u> Jeżeli spełnione są założenia i)-v) ze sformułowania problemu i dodatkowo dla każdego $k\in H$ $y_k(s_k)=L_k s_k$, to optymalne pomocnicze prawo sterowania dla każdego $k\in H$ jest liniową funkcją środka ciężkości $b_{S_{ok}|x_1,z_o^k}$ zbioru $S_{ok}|x_1, z_o^k$

$$p_{ok}^*(x_1,z_k^o)=\frac{1}{2}\,Q_k^{-1}\,L_k\,b_{S_{ok}|x_1,z_o^k} \tag{13}$$

a odpowiadająca mu minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem:

$$h(x_1)=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}|x_1} b'_{S_{ok}|x_1,z_o^k}\Omega_k^{-1}b_{S_{ok}|x_1,z_o^k}\,d((s_{ok}\backslash x_1),z_o^k) \tag{14}$$

Dowód. Podstawiając $y_k(s_k) = L_k s_k$ w wyrażeniu na optymalne prawo sterowania z lematu 1 otrzymujemy:

$$p^*_{ok}(x_1,z_o^k)=-\frac{1}{2}\,\Omega_k^{-1}\,L_k\,b_{S_{ok}|x_1,z_o^k}$$

Podobnie podstawiając $y_k(s_k) = L_k s_k$ w wyrażeniu na minimalną wartość: wskaźnika jakości z tego samego lematu 1. otrzymujemy:

$$h(x_1)=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N}\int_{S_{ok}|x_1} b'_{S_{ok}|x_1,z_o^k}\,\Omega_k^{-1}b_{S_{ok}|x_1,z_o^k}\,d((s_{ok}\backslash x_1),z_o^k)$$

Lemat 2. Niech

$$x_1^*=\max_{x_1\in\Pi_{x_1}(\mathbb{T})} h(x_1)$$

$$u_k^*(z_o^k)=p^*_{ok}(x_1^*,z_o^k)\quad k\in\mathbb{H}$$

Para (x_1^*, u^{*N}) stanowi punkt siodłowy funkcji $f(x_1,u^N)$ na zbiorze $\mathbb{T}_{x_1}(\mathbb{T}xU)$.

Dowód. Bezpośrednio z określenia pomocniczego prawa sterowania zachodzi dla każdego $x\in X$ i każdego $p^N\in P$

$$f(x_1,p^{*N})\le f(x_1,p^N)$$

a w szczególności

$$f(x_1^*,u^{*N})\le f(x_1^*,u^N)$$

W powyższych zapisach zastosowano oznaczenia

$$p^N = (\, p_1(x_1, z^1), \; \ldots \; , p_N(x_1, z^N))$$

$$p^{*N} = (\, p_1^*(x_1, z^1), \; \ldots \; , p_N^*(x_1, z^N))$$

$$u_k^*(z^k) = p_k^*(x_1^*, z^k) \quad k \in H$$

$$u^N = (\, u_1(z^1), \; \ldots, \; u_N(z^N))$$

$$u^{*N} = (\, u_1^*(z^1), \; \ldots, \; u_N^*(z^N))$$

Uwzględniając, że dla każdego $u \in U$ zachodzi

$$f(x_1, u^{*N}) \le f(x_1^*, u^{*N})$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$f(x_1, u^{*N}) \le f(x_1^*, u^{*N}) \le f(x_1^*, u^N)$$

Zatem odpowiednio do Def. B.2. (dodatek B) para (x_1^*, u^{*N}) stanowi punkt siodłowy funkcji $f(x_1, u^N)$ na zbiorze $\mathbb{T}_{x_1}$ $(\mathbb{T} \times U)$. Zauważmy, że istnienie punktu x_1^* wobec faktu wypukłości funkcji $h(x_1)$ jest konsekwencją ograniczoności, zawartości i domkniętości zbioru $\mathbb{T}_{x_1}$ $(\mathbb{T})$ będącego rzutem ortogonalnym zbioru $\mathbb{T}$ na podprzestrzeń zmiewnnych x_1. Natomiast dla istnienia funkcji $p^{*N} = (p_1^*(x_1, z^N))$ nie wymaga się ograniczności i domkniętości zbioru dopuszczalnych funkcji a jedynie jego zawartość.

4. Optymalne prawa sterowania

Twierdzenie 1. Optymalne prawo sterowania., będące rozwiązaniem problemu A, określone jest dla każdego $k \in H$ zależnością:

$$u_k^* = u_k^*(z^k) = p_k^*(x_1^*, z^k) = -\frac{1}{2} Q_k^{-1} \int_{\mathbb{S}_k | x_1^*, z^k} y_k(s_k) d(s_k \backslash x_1) \Big/ \int_{\mathbb{S}_k | x_1^*, z^k} d(s_k \backslash x_1) \tag{1}$$

lub

$$u_k^* = u_{ok}^*(z_o^k) = p_{ok}^*(x_1^*, z_o^k) = -\frac{1}{2}\, \Omega_k^{-1} \int\limits_{S_{ok}|x_1^*, z_o^k} y_k(s_k)\, d(s_k \backslash x_1) \Big/ \int\limits_{S_{ok}|x_1^*, z_o^k} d(s_k \backslash x_1) \tag{1.a}$$

gdzie:

$$z_{ok} = z_k - C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u_i$$

$$x_1^* = \max_{x_1 \in \Pi_{x_1}(\mathbb{T})} h(x_1)$$

$$h(x_1) = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \int\limits_{S_{ok}|x_1} b'_{S_{ok}|x_1, z_o^k}\, \Omega_k^{-1} b_{S_{ok}|x_1, z_o^k}\, d((s_{ok} \backslash x_1), z_o^k)$$

Dowód. Tw.1 jest bezpośrednią konsekwencją lematów 1,2.

4. Podsumowanie

Przedstawione rozwiązanie problemu syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej, liniowego modelu zapisanego w przestrzeni stanu oraz wskaźnika jakości będącego agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}$ w przestrzeni zmiennych u^N, x^{N+1} zorientowane jest na przypadek, w którym zbiór $\mathbb{T}$ nie spełnia warunków symetrii umożliwiających operowanie warunkowymi zbiorami stanów [24], [25]. Sterowanie optymalne jest w takim przypadku funkcją środką ciężkości arunkowego zbioru informacyjnego typu S.

LITERATURA

[1] Demijanov W.F., Maloziemov: Wwiedienije w minimaks. Izd. "Nauka", Moskva, 1972

[2] Fogel E.: System identification via membership set constraints with energy constrained noise. IEEE Trans. Automatic Control. AC-24(1979), pp. 752-758.

[3] Fogel E., Huang Y.F.:On the value of information in system identification bounded noise case. Automatica, 18 (1982), pp, 229-238.

[4] Glover J.D., Schweppe F.C.:Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control. AC-16(1971), pp. 411-423.

[5] Ho Y.C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol. 68, (1980), pp. 644-654. [28] Ho Y.C., Kastner M.P., Wong E.: Teams signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[6] Ho Y, C., Chu K.C.:Team decision theory and information structures in optimal contreol problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17 (1972), pp. 15-22.

[7] Keesman K.J., van Straten G.: Modified set theoretic identyfication of ill-defined water quality systems from poor data. Proc. of IAWPRC Symp. Systems Analysis in water Quality Management, Pergamon Press, Oxford, 1987, pp. 297-308.

[8] Kuncevicz W.M.:Opriedelenije garantirowanych ocenok sostojanija i paramietrov diskrietnych dynamiczieskich sistem. Kibiernietika i Wyczsilitielnaja Tiechnika, Wyp. 75 (1987), pp. 1-6.

[9] Kurzhanskii A.B.:"Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[10] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control and system estimation under uncertainty conditions. I, II, Probl. Control & Information Theory. No 6, 1980, No 1, 1981.

[11] Lin J. N.: Determination of rechable set for a linear discrete system. IEEE TRans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[12] Norton J.P.: Identification and application of bounded-parameter models. Automatica, vol 23, 1987, pp. 497-507.

[13] Ovseevivh A.I., Trushchenkov V.L., Chernousko F. L.: Equations of continuous quaranteed state estimation for dynamical systems. Izvestija of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics., No. 4, (1984), pp. 94-101.

[14] Pronzato L., Walter E.: Some results on experiment desing for bounded-error models. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris, 1988.

[15] Schweppe F.C.: Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inpust. IEEE Trans. on Automatic Control. AC-13(1968), pp. 408-414.

[16] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych" WNT, Warszawa 1978.

[17] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Enegineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp. 1-16.

[18] Witsenhausen H.S.: Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. IEEE Trans. Automatic Control. AC-13 (1968), pp. 556-558.

[19] Wojciechowski K.: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności. Z.N. Pol. Śl. s. Automatyka, z. 74, 1980.

[20] -: Decentralized resources allocation in large scale system under unceratainty conditions. Syatem Science vol. 9, 1983, pp. 31-37.

[21] -: Sterowanie optymalne w warunkach niepewności stanu jako problem optymalizacji wielokryterialnej. Symp. Model. w Mech., Beskid Śląski 1984

[22] -: Metoda symulacji układów dynamicznych w warunkach niepewności ograniczonej. SPD 2, Zakopane, 1985.

[23] -: Control and decision making under set-membership model of uncertainty. Analysis and synthesis. Raport, LH Wageningen, 1986

[24] -: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności. Konf. RP. I.02, Kazimierz Dolny 1988.

[25] -: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru T. Przyjęte do publikacji w Z. N. Pol. Śl., s. Automatyka.

[26] -: Synteza prawa sterowania w warunakch niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru T. Przyjęte do publikacji w Archiwum Automatyki i Telemechaniki.

DODATEK A

A.1. Definicje i podsatwowe własności zbiorów informacyjnych typu $S_k|x_1$

Jako modele w przestrzeni stanu wyróżnia się niesterowany (swobodny) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{o,k+1} = Ax_{o,k} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{o,k} = Cx_{o,k} + v_k \end{cases} \tag{A.1}$$

oraz sterowany (wymuszony) układ dynamiczny o postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \; ; \; x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{A.2}$$

gdzie w obydwu przypadkach dla $k \in H$

$$x_{o,k+1},\ x_k,\ w_k \in R^n,\ u_k \in R^m,\ z_{o,k},\ z_k,\ v_k \in R^p,$$

$$A \in R^{nxn},\ B \in R^{nxm},\ C \in R^{pxn} \text{ oraz istnieje } A^{-1},$$

Definicja A.1. Określone dla każdego $k \in H$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $(\mu_{ok}|x_1): R^d \to R^d$, $d=nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k \backslash x_1, v^k) \in R^d$ punkt $(s_k \backslash x_1, z^k) \in R^d$ gdzie $s_k \backslash x_1 = (w^N, v^{N/k})$, nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\mu_{ok}|x_1$ przekształca dany zbiór $\mathbb{T}|x_1 \subset R^d$ w zbiór

$$S_{ok}|x_1 = (\mu_{ok}|x_1)(\mathbb{T}|x_1) =$$

$$= \{(s_k \backslash x_1, z_o^k): (s_k \backslash x_1, z_o^k) = (\mu_{ok}|x_1)(s_k \backslash x_1, v^k) \mid (s_k \backslash x_1, v^k) \in \mathbb{T}|x_1\} \subset R^d$$

Zbiór $S_{ok}|x_1$ nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi $\mathbb{T}|x_1$ zgodnie z odwzorowaniem $\mu_{ok}|x_1$.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$:

1) odwzorowanie $\mu_{ok}|x_1$ jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix} = (\mu_{ok}|x_1)(s_k \backslash x_1, v^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$s_k \backslash x_1 = (w^N, v^{N \backslash k})$$

zaś macierz H_p określona jest następująco

$$H_p = \begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$P_{41} = \left.\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\right\} k \text{ wierszy macierzowych}$$

$$P_{42}=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

k kolumn macierzowych N-k kolumn macierzowych

ii) odzworowanie odwrotne $\mu_{ok}^{-1}|x_1$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix} = (\mu_{ok}^{-1}|x_1)(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

gdzie $H_r=-H_p$.

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika z zależności:

$$z_{oj}= C\left(A^{j-1}x_1 + \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}w_i\right) + v_j, \qquad j=1,\dots,k$$

zapisanych w postaci macierzowej. Te same zależności rozwikłane względem zmiennych v^k przy ustalonej wartości x_1 dają postać odwzorowania odwrotnego.

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k\in\mathbb{H}$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_{ok}|x_1}|=1$$

gdzie

$$J_{\mu_{ok}|x_1}=\partial\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix}/\partial\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\mu_{ok}|x_1$.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania $\mu_{ok}|x_1$ jest tożsama z macierzą (Tw.A.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy jedności.

Wniosek A.1. Niech $d(s_k \backslash x_1, z_o^k)$, $d(s_k \backslash x_1, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie zgodnie z odwzorowaniem $\mu_{ok}|x_1$ objętościami elementów różniczkowych zbiorów $S_k|x_1$, $\mathbb{T}|x_1$. Dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zachodzi

$$d(s_k \backslash x_1, z_o^k) = d(s_k \backslash x_1, v^k)$$

Słownie oznacza to, że objętość elementu różniczkowego (miara) jest niezmiennikiem odwzorowania $\mu_{ok}|x_1$.

Definicja A.2. Określone dla każdego $k \in \mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $(\mu_k|x_1): R^d \to R^d$, $d=nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k \backslash x_1, v^k) \in \mathbb{T} \subset R^d$ punkt $(s_k \backslash x_1, z^k) \in R^d$, gdzie $s_k \backslash x_1 = (w^N, v^{N \backslash k})$ nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie $\mu_k|x_1$ zależy od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,..,k-i$ i przekształca dany zbiór $\mathbb{T}|x_1 \subset R^d$ w zbiór

$$S_k|x_1 = (\mu_k|x_1)(\mathbb{T}|x_1) =$$
$$= \left\{ (s_k \backslash x_1, z^k) : (s_k \backslash x_1, z^k) = (\mu_k|x_1)(s_k \backslash x_1, v^k) \,|\, (s_k \backslash x_1, v^k) \in \mathbb{T}|x_1 \right\} \subset R^d$$

Twierdzenie A.3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,...,k-1$ to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ odwzorowanie $\mu_k|x_1$ określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

gdzie $(s_k \backslash x_1, z_o^k) = (\mu_{ok}|x_1)(s_k \backslash x_1, v^k)$ oraz

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} Bu_i(z^i) \end{bmatrix}$$

Dowód. Niejawną postać odwzorowania $\mu_k|x_1$ otrzymujemy wykorzystując zależność:

$$z_j = z_{oj} + C\sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i}Bu_i(z^i)$$

Dla j=2,...,k otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowego tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania $\mu_k|x_1$ wymaga rozwikłania zależności z tw.A.3 względem z^k, co jest możliwe w pewnych przypadkach. Jednego z nich dotyczy następujące

Twierdzenie A.4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i funkcje $u_k=u_k(z^k)$, $k\in H$ są liniowe to odwzorowanie $\mu_k|x_1$ jest liniowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$L_{21}=(1-M)^{-1}H_p \qquad L_{22}=(1-M)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ M_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz H_p określona jest jak w tw.A.1

Dowód. Przy założeniu liniowych funkcji $u(z^k)$, $k\in H$, składnik $p_4(z^{k-1})$ przedstawić można kolejno w postaciach:

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_1(z^1) \\ \vdots \\ C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i(z^i) \end{bmatrix}$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ M_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = M\, z^k$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-M \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-M)^{-1} H_p & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix}$$

Twierdzenie A.5. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i funkcje $u_k = u_k(z^k)$, $k \in H$ są liniowe to zbiór $S_k | x_1$ jest wzajemnie jednoznacznym liniowym odwzorowaniem zbioru $S_{ok} | x_1$. Wszystkie wartości własne tego odwzorowania wynoszą 1.

Dowód. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i prawa sterowania są liniowe to na podstawie tw.A.3 (patrz również dowód tw.A.3.) mamy:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

gdzie macierz M określona jest jak w tw.A.3. Stąd wszystkie wartości własne macierzy powyższego odwzorowania są równe 1.

Twierdzenie A.6. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) to dla każdego $k \in H$ i dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_k} | x_1| = |\det J_{\mu_{ok}} | x_1| = 1$$

gdzie

$$J_{\mu_k} | x_1 = \partial \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\mu_k | x_1$.

Dowód. Odwzorowanie $\mu_k | x_1$ określone jest niejawnie (por.tw.A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4 (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Macierz H_p i funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ są określone jak w tw.A.1, tw.A.3.

$$J_{\mu_k^{-1}}|x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1+\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k \end{bmatrix}$$

Dla założonej postaci praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ mamy:

$$\partial p_4(z^{k-1})/\partial z^k = \begin{bmatrix} \neq 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\det J_{\mu_k^{-1}}|x_1 = \det J_{\mu_k}|x_1 = 1$$

co kończy dowód.

Wniosek A.2. Niech $d(s_k \backslash x_1, z^k)$, $d(s_k \backslash x_1, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie według odwzorowania $\mu_k|x_1$ objętościami elementów różniczkowych zbiorów $S_k|x_1$, $\mathbb{T}|x_1$. Dla każdego $k \in \mathbb{H}$ dla dowolnych funkcji $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$ zachodzi

$$d(s_k \backslash x_1, z^k) = d(s_{ok} \backslash x_1, z_o^k) = d(s_k \backslash x_1, v^k)$$

Słownie oznacza to, że objętość elementu różniczkowego (miara) jest niezmiennikiem odwzorowania $\mu_k|x_1$.

Definicja A.3. Niech dla każdego $k \in \mathbb{H}$ będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $(\eta_{ok}|x_1): R^d \to R^d$, $d=nN+pN$, przyporządkowujące punktowi $(s_k \backslash x_1, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in (S_{ok}|x_1) \subset R^d$ punkt $(s_k \backslash x_1, v_k, z_o^{k-1}) \in (S_{o,k-1}|x_1) \subset R^d$. Odwzorowanie $\eta_{ok}|x_1$ przekształca dany zbiór $S_{ok}|x_1$ w zbiór

$$S_{o,k-1}|x_1 = (\eta_{ok}|x_1)(S_{ok}|x_1) =$$

$$= \left\{ (s_{k-1} \backslash x_1, z_o^{k-1}) : (s_{k-1} \backslash x_1, z_o^{k-1}) = (\eta_{ok}|x_1)(s_k \backslash x_1, z_o^k) \,\middle|\, (s_k \backslash x_1, z_o^k) \in S_{ok}|x_1 \right\}$$

Twierdzenie A.7. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) każdego $k \in \mathbb{H}$ odwzorowanie $\eta_{ok}|x_1$ jest liniowe i ma postać :

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie odwrotne $\eta_{ok}^{-1}|x_1$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \backslash x_1 \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$H_{pk} = [\ P_{41k}\ P_{42k}\ 0\ ]$$

$$P_{41k} = [\ C\ A^{k-1}\ ]$$

$$P_{42k} = [\ \underbrace{C\ A^{k-2} \ldots C}_{k-1\ \text{bloków}}\ \underbrace{0 \ldots 0}_{N-k-1\ \text{blok}}\ ]$$

Dowód. Wykorzystując równanie wyjścia wyrażamy z_{ok} przez w^{k-1} i v_k przy ustalonym x_1 co prowadzi do określenia $\eta_{ok}^{-1}|x_1$ dla przypadku modelu o postaci (A.1). Podobnie dla otrzymania postaci odwzorowania $\eta_{ok}|x_1$ wyrażamy v_k przez w^{k-1} i z_{ok} przy ustalonym x_1.

Twierdzenie A.8. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_{ok}|x_1}| = 1$$

gdzie

$$J_{\eta_{ok}|x_1} = \partial \begin{bmatrix} s_{ok-1} \backslash x_1 \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_{ok} \backslash x_1 \\ z_o^{k} \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania $\eta_{ok}|x_1$.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania $\eta_{ok}|x_1$ jest równa macierzy reprezentującej to odwzorowanie (Tw.A.7). Jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek A.3. Pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów $S_{ok-1}|x_1$, $S_{ok}|x_1$ odpowiadających sobie według odwzorowania $\eta_{ok}|x_1$ zachodzi związek:

$$d(s_{ok-1}\backslash x_1, z_o^{k-1})=d(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k)$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_{o,k-1}|(x_1, z_o^{k-1})$, $S_{ok}|(x_1, z_o^{k-1})$ (punkt A.2. Def.A.5) zachodzi związek:

$$d(s_{o,k-1}\backslash x_1)=d(s_{ok}\backslash x_1)dz_{ok}$$

Definicja A.4. Niech dla każdego $k\in H$ będzie określone wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\eta_k|x_1: R^d \to R^d$, $d=nN+pN$, zależne od praw sterowania $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$, przyporządkowujące punktowi $(s_k\backslash x_1, z_k, z^{k-1})\in S_k|x_1\subset R^d$ punkt $(s_k\backslash x_1, v_k, z^{k-1})\in S_{k-1}|x_1\subset R^d$. Odwzorowanie $\eta_k|x_1$ przekształca dany zbiór $S_k|x_1$ w zbiór

$$S_{k-1}|x_1=(\eta_k|x_1)(S_k|x_1)=$$

$$=\left\{(s_{k-1}\backslash x_1, z^{k-1}): (s_{k-1}\backslash x_1, z^{k-1})=(\eta_k|x_1)(s_k\backslash x_1, z^k)\,|\,(s_k\backslash x_1, z^k)\in S_k|x_1\right\}$$

Twierdzenie A.9. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\dots,k-1$, to dla każdego $k\in H$ odwzorowanie $\eta_k|x_1$ określone jest niejawnie postacią

$$\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ v_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -H_{pk} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z_k \\ z^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{4k}(z^{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie macierz H_{pk}, określona jest jak w tw.A.7, zaś funkcja wektorowa $p_{4k}(z^{k-1})$ jak w tw.A.3.

Dowód. Postać odwzorowania $\eta_k|x_1$ odpowiadająca modelowi (A.2) wynika z zależności $v_k=z_k-Cx_k$ w której x_k wyrażamy przez x_1 traktowane jako ustalone oraz w^{k-1}, $u_i(z^i)$, $i=1,\dots,k-1$.

Twierdzenie A.10. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2) to dla każdego $k\in H$ i dla dowolnej funkcji $u_k(z^{k-1})$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_k|x_1}|=|\det J_{\eta_{ok}|x_1}|=1$$

gdzie

$$J_{\eta_k|x_1}=\partial\begin{bmatrix} s_{k-1}\backslash x_1 \\ z^{k-1}\end{bmatrix}/\partial\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z^k\end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania η_k.

Dowód. Macierz $J_{\eta_k|x_1}$ ma postać

$$J_{\eta_k|x_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -H_{pk} & 1 & -\partial p_{4k}/\partial z^{k-1} \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

stąd jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek A.4. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania $\eta_k|x_1$ elementów różniczkowych zbiorów $S_{k-1}|x_1$, $S_k|x_1$ zachodzi związek:

$$d(s_{k-1}\backslash x_1, z^{k-1})=d(s_k\backslash x_1, z^k)$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_{k-1}|(x_1,z^{k-1})$, $S_k|(x_1,z^{k-1})$ (p.A.2. def.A.5) zachodzi związek:

$$d(s_{k-1}\backslash x_1)=d(s_k\backslash x_1, z_k)$$

A.2. Zbiory warunkowe i rzuty

Definicja A.5. Niech dla każdego $k\in H$ będzie dany zbiór $S_{ok}|x_1$ o elementach $(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k)$. Dla ustalonego z_o^k zbiór $S_{ok}|x_1,z_o^k=\{(s_{ok}\backslash x_1):(s_{ok}\backslash x_1,z_o^k)\in S_{ok}|x_1\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru $S_{ok}|x_1$ przy warunku z_o^k.

Zbiór $S_{ok}|x_1,z_o^k$ można interpretować geometrycznie jako rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych $s_{ok}\backslash x_1$ "przekroju" danego zbioru $S_{ok}|x_1$ hiperpłaszczyzną (w przestrzeni zmiennych $(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k)$) z_o^k=const.

Definicja A.6. Niech dla każdego $k\in H$ będzie dany zbiór $S_{ok}|x_1$ o elementach $(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k)$. Zbiór $P_{ok}|x_1=\pi_{zk}(S_{ok}|x_1)=\{(z_o^k):(s_{ok}\backslash x_1, z_o^k)\in S_{ok}|x_1\}$ nazywamy rzutem ortogonalnym zbioru $S_{ok}|x_1$ na przestrzeń zmiennych z_o^k. Zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}=\{z_{ok}:(z_{ok},z_o^{k-1})\in P_{ok}|x_1\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji z_{ok} dla danego ciągu obserwacji z_o^{k-1}.

Pomijając w def.A.5, A.6 indeks "o" otrzymujemy definicje zbiorów: $S_k|z^k$, P_k, $Z_k|z^{k-1}$.

Twierdzenie A.11. Jeżeli układ dynamiczny ma postacie (A.1), (A.2) to pomiędzy zbiorami $S_{ok}|(x_1,z_o^k)$, $S_k|(x_1,z^k)$ zachodzi związek:

$$S_k|x_1,z^k=S_{ok}|x_1,z_o^k$$

gdzie $z_o^k=z^k-p_4(z^{k-1})$, a funkcja wektorowa $p_4(z^{k-1})$ jest określone jak w tw.A.3.

Dowód. Dla każdego $k\in H$ odwzorowanie $\mu_k|x_1$ (Def.A.2) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k\backslash x_1 \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4\ (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Zbiór warunkowy $S_k|x_1,z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość z^k już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym z^k również ustalone jest z^{k-1} to $p_4(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym, co prowadzi do słuszności tezy. Zauważmy, że w opisany sposób nie można wyznaczyć zbioru $S_k|(x_1,z^{k\backslash l})$ gdzie $1 \le l \le k$ przy niezmienionej definicji zbioru S_k i funkcji wektorowej $p_4(z^{k-1})$. Wynika to stąd, że przy ustalonym $z^{k\backslash l}$ dla $1 \le l \le k$ nie jest ustalone z^{k-1}.

Twierdzenie A.12. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), (A.2), to pomiędzy zbiorami $Z_{ok}|z_o^{k-1}$, $Z_k|z^{k-1}$ zachodzi związek:

$$Z_k|z^{k-1}=p_{4k}(z^{k-1}) + Z_{ok}|z_o^{k-1}$$

gdzie

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}B\ u_i(z^i)$$

Dowód. Dla każdego $k\in H$ przy ustalonym z^{k-1}, $p_{4k}(z^{k-1})$ jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k=z_{ok}+p_{4k}(z^{k-1})$.

DODATEK B

Wybrane zagadnienia minimaksu

Niech X, Y będą danymi, ograniczonymi domkniętymi i zwartymi zbiorami. Na zbiorze $X \times Y$ określona jest funkcja $f: X \times Y \to R$ o wartościach $f(x,y)$, gdzie $(x,y) \in X \times Y$.

Definicja B.1. Problem

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y)$$

nazywamy problemem minimaksowym. Załóżmy że rozwiązanie rozpatrywanego problemu istnieje i oznaczmy go przez $(x^*, y^*) \in X \times Y$.

Rozwiązanie problemu dekomponuje się na dwa następujące etapy

i) $\max_{y \in Y} f(x,y) = f(x, y^*(x)) = g(x)$

ii) $\min_{x \in X} g(x) = g(x^*)$

Stąd

$$y^* = y^*(x^*)$$

Dla dalszych celów wprowadzamy problem pomocniczy

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x,y)$$

którego rozwiązanie wyznaczamy następująco

i) $\min_{x \in X} f(x,y) = f(x^*(y), y) = h(y)$

ii) $\max_{y \in Y} h(y) = h(y^{**})$

Stąd

$$x^{**} = x^*(y^{**})$$

Dalej rozpatrywane są warunki przy których zachodzi

$$(x^*, y^*) = (x^{**}, y^{**})$$

tj. rozwiązania problemu minimaksowego i problemu pomocniczego są takie same.

Definicja B.2. [1]. Punkt $(x^*, y^*) \in X \times Y$ nazywamy punktem siodłowym funkcji f na zbiorze $X \times Y$ jeżeli dla każdego $x \in X$ i każdego $y \in Y$ zachodzi

$$f(x^*, y) \le f(x^*, y^*) \le f(x, y^*) \qquad \text{(a)}$$

Twierdzenie B.1.[1]. Istnienie punktu siodłowego funkcji f na zbiorze $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ jest równoważne zależności

$$\min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) = \max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y) \tag{b}$$

Dowód. Zauważmy, że występujące w rozpatrywanej zależności minima i maxima funkcji f wynikają z jej ciągłości oraz zwartości i ograniczoności zbiorów $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$.

Rozpocznijmy od pokazania, że z istnienia punktu siodłowego funkcji f (a) wynika zależość

$$\min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) = \max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$$

Odpowiednio do def.B.1 mamy

$$\max_{y\in\mathbb{Y}} f(x^*,y) \le \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y^*)$$

Stąd

$$\min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) \le \max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$$

Ponieważ równocześnie

$$\max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y) \le \min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y)$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) = \max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$$

co kończy pierwszą fazę dowodu.

Przechodząc do fazy drugiej załóży, ż zachodzi (b) czyli

$$\min_{x\in\mathbb{X}} \max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) = \max_{y\in\mathbb{Y}} \min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$$

Oznaczmy

$$\max_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y) = f(x,y^*(x))=g(x)$$

$$\min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y) = f(x^*(y),y)=h(y)$$

Na podstawie (b) i ciągłości funkcji g(x), h(x) istnieją punkty $x^*\in\mathbb{X}$, $y^*\in\mathbb{Y}$ takie, że

$$\min_{x\in\mathbb{X}} g(x) = g(x^*) = \max_{y\in\mathbb{Y}} h(y) = h(y^*)$$

Wykorzystując powyższą zależność otrzymujemy

$$f(x^*,y) \le \max_{y \in \mathcal{Y}} f(x^*,y) = g(x^*) = h(y^*) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x,y^*) \le f(x^*,y^*)$$

Podobnie

$$f(x,y^*) \ge \min_{x \in \mathcal{X}} f(x,y^*) = h(x^*) = g(y^*) = \max_{y \in \mathcal{Y}} f(x^*,y) \ge f(x^*,y^*)$$

Łącząc powyższe zależności otrzymujemy (a) co kończy całość dowodu.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski

Wpłynęło do Redakcji 20.05. 1991

Abstract

In the paper an efficient solution to a problem of min - max control strategies desing in the presence of unknown but bounded disturbances for the plant described by a state space model is given. There has beeen proved that for control strategies creating with the model a nested information structure and the performance index being a maximal with respect to possible intial state x_1 aggregate of second moments of the image of the set $T|x_1$ in the space of the controls and states the optimal control law is in each moment of the considerd control horizon a linear function of the center of gravity for the conditional set $S|x_1$ which coincides with the optimal value x_1^*. To find this value the auxiliary problem of parametric maximization is solved.