ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: AUTOMATYKA z.108 Nr kol.1150

Konrad WOJCIECHOWSKI

SYNTEZA NIEAKTYWNEGO PRAWA STEROWANIA W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI OGRANICZONEJ NA PODSTAWIE MODELU BEZPOŚREDNIEGO METODĄ ZBIORÓW INFORMACYJNYCH TYPU S

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu syntezy nieaktywnych praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej na podstawie modelu sterowanego obiektu danego w postaci bezpośredniej. W modelu niepewności ograniczonej, dany w odpowiednio wymiaro-przestrzeni rzeczywistej, ograniczony i całkowalny w sensie Lebesgue'a zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości warunku początkowego oraz ciągów zakłóceń w równaniu stanu i równaniu pomiaru. Do rozwiązania sformułowanego problemu zastosowano oryginalną metodę swobodnych zbiorów informacyjnych typu S, których definicje i własności przedstawiono w Dodatku. W pracy pokazano, że dla modelu liniowego względem sterowań, praw sterowania tworzących z nim zawierającą się strukturę informacyjną oraz wskaźnika jakości będącego agregatą drugich momentów obrazu zbioru $\mathbb{T}$, optymalne prawo sterowania może być wyznaczone niezależnie dla każdej chwili rozpatrywanego horyzontu sterowania oraz jest liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego.

NONACTIVE CONTROL STRATEGY DESING IN THE PRESENCE OF BOUNDED UNCERTAINTY FOR THE DIRECT MODEL VIA INFORMATION SETS OF THE TYPE S

Summary. In the paper a problem of nonactive control strategy desing in the presence of bounded uncertainties is presented for the plant described by the direct model. It has been proved that for a linear with respect to control model, control strategies creating with the model a nested information structure and the performance index being an aggregate od second moments of the image of the set $\mathbb{T}$ an optimal control strategy can be found independently in the each moment of the considered control horizon. Moreover it is a linear function of the conditional information set.

СИНТЕЗ НЕАКТИВНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ МОДЕЛИ МЕТОДОМ ИНФОРМАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ ТИПА S

Резюме

В работе доказывается, что для линейной относительно управлений модели, для законов управления сочиняющих с ней встроенную информационную структуру и для показателя качества, который является агрегацией моментов 2-ой степени образа множества $\mathbb{T}$, оптимальный закон управления может быть определен независимо для любого момента времени рассматриваемого горизонта управления и является линейной функцией центра тяжести условного информационного множества.

1. Wprowadzenie

Model niepewności ograniczonej jest intuicyjnie najbardziej naturalny. W przypadku skalarnym oznacza on, że możliwe realizacje zmiennej niepewnej należą do danego zbioru którego struktura może być dowolna.

Pierwsze próby wykorzystania modelu niepewności ograniczonej można znaleźć w pracach [3], [7], [15,16] dotyczących teorii sterowania. Stosuje się w nich określenia "unknown but bounded errors", "bounded noise", "set of possible states". W pracach [1], [2] również z zakresu teorii strowania wprowadzono nazwę "set-membership description of uncertainty". Model niepewności ograniczonej wykorzystywany był również w pracach [19-25].

W modelu niepewności ograniczonej przyjętym w pracy dany w odpowiednio wymiarowej przestrzeni rzeczywistej, ograniczony i całkowalny w sensie Lebesgue'a zbiór $\mathbb{T}$ określa łącznie możliwe wartości zmiennych niepewnych. Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $\mathbb{T}$ jest zbiorem informacyjnym.

W sformułowaniach problemu syntezy praw sterowania wykorzystywany jest najczęściej model sterowanego obiektu zapisany w konwencji zmiennych stanu a poszukiwane prawa sterowania są funkcjami informacji pomiarowej. W

odróżnieniu od powyższego model wykorzystywany w pracy jest modelem bezpośrednim tj. wyraża jawną zależność pomiarów od zmiennych niepewnych i sterowań zaś argumentami poszukiwanych funkcji są pomiary z "odliczonym" wpływem sterowań. Dla celów pracy nazywa się je nieaktywnymi prawami sterowania. Przyjęta w pracy postać modelu i praw sterowania pozwoliły łącznie na pokazanie, że dynamiczny problem syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej w przypadku modelu liniowego względem sterowań, klasycznej struktury informacyjnej i skończonego horyzontu sterowania sprowadza się do skończonej liczby wzajemnie niezależnych skalarnych problemów statycznych.

W punkcie 2 zamieszczono wybrane zagadnienia pomocnicze, dotyczące renumeracji wielowymiarowego argumentu dyskretnego i funkcji wektorowych oraz wprowadzono pojęcie tzw. nieaktywnego prawa sterowania.

W punkcie 3 podano sformułowanie rozpatrywanego w pracy ogólnego problemu syntezy prawa sterowania.

Twierdzenia 1 i 2 zamieszczone wraz z dowodami w punkcie 4 określają postać optymalnego nieaktywnego prawa sterowania oraz odpowiadający mu optymalny wskaźnik jakości.

Swobodne zbiory informacyjne S_{ok} $k\in\mathbb{H}$ oraz związane z nimi odwzorowania informacyjne przedstawione są w Dodatku A. Podaje się w nim definicje i podstawowe własności swobodnych zbiorów informacyjnych typu S. Jedną z nich jest słuszna w przypadku modelu liniowego inwariantność miary Lebesgue'a wymienionych zbiorów względem parametrów modelu.

2. Zagadnienia pomocnicze

Niech $\mathbb{I}=\{1,2,\ldots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych zaś $\mathbb{I}^M=\mathbb{I}\times\ldots\times\mathbb{I}$ iloczynem kartezjańskim M egzemplarzy zbioru $\mathbb{I}$.

Skończenie elementowe zbiory $\mathbb{H}_t\subset\mathbb{I}^{M_1}$, $\mathbb{H}_u\subset\mathbb{I}^{M_2}$, $\mathbb{H}_z\subset\mathbb{I}^{M_3}$, nazywamy odpowiednio horyzontami zmiennych niepewnych, sterowań i pomiarów. Ich

elementami są ciągi: $i_1=(i_1,\dots i_{M_1})$, $i_2=(i_1,\dots i_{M_2})$, $i_3=(i_1,\dots i_{M_3})$.

W pracy wyróżniamy dodatkowo podzbiory $\mathbb{D}_t\subset\mathbb{H}_t$, $\mathbb{D}_u\subset\mathbb{H}_u$, $\mathbb{D}_z\subset\mathbb{H}_z$ oraz rodzinę zbiorów $\mathbb{D}_z$ oznaczoną przez H_z.

Na zbiorach $\mathbb{H}_t$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{H}_z$ określone są funkcje (ciągi) rozpatrywane w pracy. Podstawowymi są:

Zmienne niepewne

$t:\mathbb{H}_t\to R^q$

Sterowanie

$u:\mathbb{H}_u\to R^m$

Pomiary

$z:\mathbb{H}_z\to R^p$

Zauważmy, że ogólnie funkcja (ciąg) $f:\mathbb{H}\to R^n$ określona na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H}\subset\mathbb{I}^M$ może być przedstawiona w postaci wektora blokowego, w którym n-wymiarowe składowe blokowe odpowiadają wartościom funkcji (ciągu) dla kolejnych (według ustalonego porządku) argumentów wybieranych ze zbioru $\mathbb{H}$.

Odpowiednio do powyższej uwagi w pracy stosuje się zapisy

$f_{\mathbb{D}}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}\subset\mathbb{H}$, przy ustalonym porządku w zbiorze $\mathbb{D}$,

$f_{\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2}$ wektor blokowy, którego elementami są wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru $\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2$ gdzie z założenia $\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2\subset\mathbb{H}$, oraz $\mathbb{D}_1\subset\mathbb{D}_2$. Porządek w zbiorze $\mathbb{D}_1\setminus\mathbb{D}_2$ jest ustalony.

W szczególnym przypadku, gdy M=1, stosuje się równoważne zapisy:

$f^k=(f'_1,\dots,f'_k)$,

$f^{k\setminus l}=(f'_{l+1},\dots,f'_k)$, $k>l$.

Wielowymiarowy argument dyskretny w powiązaniu z wektorową postacią funkcji (ciągów) t, u, z opisuje przejrzyście realne problemy sterowania oraz podejmowania decyzji. Przykładowo w dwupoziomowym problemie decyzyjnym wygodnie jest "numerować" poszczególne decyzje parami liczb, z których

pierwsza oznacza numer poziomu decyzyjnego, druga zaś dyskretną chwilę czasu. Decyzja przyporządkowana określonej powyżej parze liczb może być wektorem m-wymiarowym.

W rozważaniach teoretycznych, a szczególnie w zapisach operowanie wielowymiarowym argumentem dyskretnym w powiązaniu z wektorową strukturą funkcji nie jest wygodne. Z tego względu wprowadzamy procedurę renumeracji dotyczącą zarówno wielowymiarowego argumentu, jak i funkcji wektorowych.

Ilustruje ją następujący przykład:

Problem oryginalny

Horyzont

$\mathbb{H}=\{(1,1),(1,2)\}$.

Funkcja określona na zbiorze $\mathbb{H}$ ma postać:

$f: \mathbb{H} \to R^2$

$f_{1,(1,1)}$ $\quad$ $f_{1,(1,2)}$

$f_{2,(1,1)}$ $\quad$ $f_{2,(1,2)}$.

Problem po renumeracji

Horyzont

$\mathbb{H}=\{1,2,3,4\}$

Funkcja określona na zbiorze $\mathbb{H}_{re}$ ma postać:

$f_{re}: \mathbb{H}_{re} \to R$

$f_{re,1} = f_{1,(1,1)}$ $\quad$ $f_{re,2} = f_{1,(1,2)}$

$f_{re,3} = f_{2,(1,1)}$ $\quad$ $f_{re,4} = f_{2,(1,2)}$.

Ogólnie niech $f:\mathbb{H}\to R^n$ będzie daną funkcją określoną na skończenie elementowym zbiorze $\mathbb{H}\subset\mathbb{I}^M$, zaś $\nu:\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{H}\to\mathbb{I}$ będzie danym odwzorowaniem renumeracji.

Oznaczmy

$\nu(\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{H})=\{1,\ldots,N\}=\mathbb{H}_{re}$

$\nu(i,(j_1,\ldots,j_n))=k \in \{1,\ldots,N\}$.

Funkcja $f_{re}:\mathbb{H}_{re} \to R$ otrzymana w wyniku renumeracji określona jest:

$$f_k = f_{i,(j_1,\ldots,j_n)},$$

gdzie: $k\in\{1,\ldots,N\}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $(j_1,\ldots,j_n)\in H$.

W dalszej części pracy nie będziemy rozróżniać horyzontów i funkcji pierwotnych od tych, które zostały otrzymane w wyniku renumeracji.

Dyskretny liniowy i stacjonarny model dynamiczny zapisany w przestrzeni stanu ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

$k\in H = \{1,\ldots,N\}$,

$x_k, w_k\in R^n$, $u_k\in R^m$, $z_k, v_k\in R^p$,

$A\in R^{nxn}$, $B\in R^{nxm}$, $C\in R^{pxn}$.

Model (1) nazywamy modelem wymuszonym, mając na uwadze składnik Bu_k występujący w prawej stronie równań stanu. Model swobodny otrzymujemy podstawiając $Bu_k=0$.

W przypadku modelu (1) założenie stacjonarności ma tylko na celu uproszczenie zapisów i wszystkie rozważania można powtórzyć dla modeli liniowych niestacjonarnych.

Dyskretny liniowy i stacjonarny model dynamiczny zapisany w postaci bezpośredniej ma formę:

$$z_k=h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}), \tag{2}$$

gdzie:

$k\in H_z$

$t_{D_{tk}}=(t_i : i\in D_{tk}\subset H_t,\ t_i\in R^q)$

$u_{D_{uk}}=(u_i : i\in D_{uk}\subset H_u,\ u_i\in R^m)$

$z_k\in R^p$.

Ten sam model po renumeracji wektorowego argumentu i funkcji wektorowych może być zapisany w postaci:

$$z_k = h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{tk}}), \tag{3}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots N_3\}$

$t_{D_{tk}} = (t_i : i \in D_{tk} \subset H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R)$

$u_{D_{uk}} = (u_i : i \in D_{uk} \subset H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R)$

$z_k \in R.$

W pracy stosuje się również uproszczone zapisy bezpośredniego modelu dynamicznego w postaci:

$$z_k = \bar{h}_k(t, u), \tag{4}$$

gdzie:

$k \in H_z = \{1, \ldots N_3\}$

$t = t_{H_t} = \mathrm{col}(t_i : i \in H_t = \{1, \ldots, N_1\},\ t_i \in R)$

$u = u_{H_u} = \mathrm{col}(u_i : i \in H_u = \{1, \ldots, N_2\},\ u_i \in R)$

$z_k \in R.$

$\bar{h}_k(t,u)$ jest funkcją stałą względem zmiennych $t_{H_t \setminus D_{tk}}$, $u_{H_u \setminus D_{uk}}$ równą $h_k(t_{D_{tk}}, u_{D_{uk}})$.

Modele bezpośrednie (2), (3) nazywamy modelami wymuszonymi, odpowiadające im modele swobodne otrzymujemy podstawiając $u_{D_{uk}} = 0$.

Model o postaci (1) może być w sposób oczywisty przekształcony do modelu bezpośredniego.

Definicja 1 Niech

i) $H_u = \{1, \ldots, N_2\}$, $H_z = \{1, \ldots, N_3\}$ będą odpowiednio horyzontami sterowań i pomiarów, D_u, D_z ich podzbiorami, zaś H_z rodziną podzbiorów D_z,

ii) $\gamma : H_z \to \mathcal{H}_z$ będzie przyporządkowaniem informacyjnym,

iii) $z_i = h_i(t, u_{D_u})$

$z_{oi} = h_{oi}(t),$

gdzie $i \in H_z$ będą odpowiednio wymuszonym i swobodnym modelem bezpośrednim.

Funkcje

i) $u_i=u_i(z_{\gamma(i)})$, $i\in H_u$

nazywamy i-tym prawem sterowania,

ii) $u_i=u_{oi}(z_{o,\gamma(i)})$, $i\in H_u$

nazywamy i-tym nieaktywnym prawem sterowania.

Jeżeli w szczególności przyporządkowanie informacyjne γ jest takie, że

$$\gamma(i)=\{1,\dots,i\}\subseteq H_z,\quad i\in H_u$$

oraz model bezpośredni może być zapisany w postaci:

$$z_i=h_i(t,u^{i-1}),$$

to prawa sterowania wymienione w punktach i)-ii) przyjmują postacie:

$$u_i=u_i(z^i),\quad i\in H_u$$

$$u_i=u_{oi}(z_o^i),\quad i\in H_u$$

Jeżeli bezpośrednie modele dynamiczne, odpowiednio wymuszony i swobodny mają postacie:

$$z_j=h_{oj}(t)+p_j(u^{j-1}),\quad p_j(0)=0,\quad j\in H_z,$$

$$z_{oj}=h_{oj}(t),$$

to dla każdego $i\in H_u$ pomiędzy prawami sterowania $u_i(z^i)$, $u_{oi}(z_o^i)$ zachodzą związki

$$u_{oi}(z_o^i)=u_{oi}(z^i-\underline{d}_i(z^{i-1}))=u_i(z^i), \tag{5}$$

$$u_i(z^i)=u_i(z_o^i+\underline{c}_i(z^{i-1}))=u_{oi}(z_o^i). \tag{6}$$

Bezpośrednio z postaci modelu, założenia $p_j(0)=0$ dla $j\in H_z$ oraz postaci praw sterowania $u_k(z^k)$, $k\in H_u$ mamy:

$$z_{oj}=z_j-p_j(u_1(z^1),\dots,u_{j-1}(z^{j-1}))$$

$$z_{oj}=z_j-d_j(z^{j-1}),$$

dla $j\in H_z$. Rozpisując jawnie z_o^i uporządkowany do postaci wektora blokowego otrzymujemy:

$$z_{o1}=z_1$$

$$z_{o2}=z_2-d_2(z^1)$$

$$z_{oi}=z_i-d_i(z^{i-1})$$

lub w zapisie zwartym:

$$z_o^i=z^i-\underline{d}_i(z^{i-1}),$$

co po podstawieniu do $u_{oi}(z_o^i)$ w miejsce z_o^i uzasadnia (5). Dla uzasadnienia (6) podstawiamy za z^i w wyrażeniu na $u_i(z^i)$ uporządkowane do odpowiednich wektorów blokowych postacie

$$z_j=z_{oj}+p_j(u_{o1}(z_o^1),\ldots,u_{o,j-1}(z_o^{j-1}))$$

$$z_j=z_{oj}+c_j(z_o^{j-1}).$$

3. Sformułowanie problemu syntezy praw sterowania

Zakładamy, że:

i)dyskretne, stacjonarne bezpośrednie modele dynamiczne, odpowiednio wymuszony i swobodny, określone w horyzoncie $\mathbb{H}_u$, mają postacie:

$$z_k=h_k't+p_k'u, \tag{7}$$

$$z_{ok}=h_k't, \tag{8}$$

gdzie:

$$k\in\mathbb{H}_z=\{1,\ldots,N_3\},$$

$$t=\mathrm{col}(t_i:i\in\mathbb{H}_t=\{1,\ldots,N_1\},\ t_i\in R),$$

$$u=\mathrm{col}(u_i:i\in\mathbb{H}_u=\{1,\ldots,N_2\},\ u_i\in R),$$

$$h_k\in R^{N_1},\ p_k\in R^{N_2},$$

ii) wartości zmiennych t nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T}\subset R^d$,

iii)nieaktywne prawo sterowania ma postać,

$$u_k=u_{ok}(z_{o\gamma(k)}),\quad k\in\mathbb{H}_u, \tag{9}$$

gdzie

$$\gamma: H_u \to I_z, \quad \gamma(k)=D_k$$

jest danym przyporządkowaniem informacyjnym takim, że prawa sterowania

$$u_k=u_k(z_{\gamma(k)}), \quad k\in H_u,$$

równoważne nieaktywnym prawom sterowania (patrz p.2), stanowią łącznie z modelem klasyczną strukturę informacyjną.

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q=\frac{1}{m^o}\sum_{k=1}^{k=N_2}\int_T (a_k u_k^2+u_k y_k)dt, \tag{10}$$

gdzie dla $k\in H_u$

$$a_k\in R, \quad a_k>0$$

$$y_k: R^{N_1-r} \to R$$

$$m^o = \int_T dt,$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu nieaktywnych praw sterowania $u^*_{ok}(z_{o\gamma(k)})$, $k\in H_u$, takich, że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna.

Definicja 2. Kanonicznym problemem syntezy nieaktywnego prawa sterowania nazywamy

$$\min_u \int_{S_o} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))dz_{oD}dt_2,$$

gdzie $S_o\subset R^{N_1}$, $s=(z_{oD}, t_2)\in S_o$, dim $t_2=N_1-r$, funkcja y jest dana.

4. Synteza praw sterowania

Twierdzenie 1. Optymalne nieaktywne prawo sterowania będące rozwiązaniem problemu określonego w def.1 ma postać:

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 / \int_{S_o|z_{oD}} dt_2 \tag{11}$$

odpowiada mu optymalna wartość wskaźnika q wynosząca:

$$q^* = -\frac{1}{4} a^{-1} \int_{S_o} \left(\int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 / \int_{S_o|z_{oD}} dt_2 \right)^2 dz_{oD} dt_2 \tag{12}$$

Jeżeli dodatkowo założyć

$$y(t_2) = k' t_2,$$

to

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} k' b_{S_o|z_{oD}}$$

oraz

$$q^* = -\frac{1}{4} a^{-1} \int_{S_o} (b_{S_o|z_{oD}})^2 dz_{oD} dt_2,$$

gdzie $b_{S_o|z_{oD}}$ jest środkiem ciężkości zbioru $S_o|z_{oD}$.

Dowód. Stosując twierdzenie o całce iterowanej mamy:

$$\int_{S_o} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))dz_{oD} dt_2 =$$

$$= \int_{Z_{oD}} \left(\int_{S_o|z_{oD}} (a\, u^2(z_{oD}) + u(z_{oD})y(t_2))\, dt_2 \right) dz_{oD} =$$

$$= \int_{Z_{oD}} \left(u^2(z_{oD}) \left(\int_{S_o|z_{oD}} dt_2 \right) + u(z_{oD}) \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)\, dt_2 \right) dz_{oD}.$$

Przyrównując do zera pochodną względem u wyrażenia podcałkowego przy uwzględnieniu $\int_{S_o|z_{oD}} dt_2 > 0$ otrzymujemy:

$$u^*(z_{oD}) = -\frac{1}{2} a^{-1} \int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2 / \int_{S_o|z_{oD}} dt_2,$$

zaś wskaźnik jakości otrzymany po podstawieniu powyższego wyrażenia ma postać:

$$q^{*}=-\frac{1}{4}a^{-1}\int_{S_o}\Big(\int_{S_o|z_{oD}} y(t_2)dt_2\Big/\int_{S_o|z_{oD}} dt_2\Big)^2 dz_{oD}dt_2.$$

Łatwo sprawdzić, że zakładając liniową postać funkcji $y(t_2)$ tj. $y(t_2)=k' t_2$ otrzymujemy wyrażenia podane w tw.1.

Twierdzenie 2. Jeżeli spełnione są założenia i)-v), to rozwiązanie problemu syntezy nieaktywnych praw sterowania sprowadza się do rozwiązania N_2 wzajemnie niezależnych problemów postaci:

$$\min_{u_{ok}} \int_{S_{ok}} (a\, u^2(z_{oD_k}) + u(z_{oD_k})y(t_2))dz_{oD_k}dt_2, \tag{13}$$

$k=1,\dots,N_2$.

Dowód. Dokonując odpowiedniej zmiany zmiennych w każdej z całek będących składnikami sumy, określającej q oraz uwzględniając, że żaden z występujących zbiorów nie zależy od praw sterowania, możemy zapisać problem minimalizacji w postaci:

$$q=\min_{u_1(z^1)}\Big(\int_{S_{o1}}(a\, u^2(z_{oD_1}) + u(z_{oD_1})y(t_2))dz_{oD_1}dt_2\Big)+\dots$$

$$+\min_{u_k(z^k)}\Big(\int_{S_{ok}}(a\, u^2(z_{oD_k}) + u(z_{oD_k})y(t_2))dz_{oD_k}dt_2+\dots$$

$$+\min_{u_N(z^N)}\Big(\int_{S_{oN}}(a\, u^2(z_{oD_N}) + u(z_{oD_N})y(t_2))dz_{oD_N}dt_2$$

Założenie klasycznej struktury informacyjnej nie jest wykorzystywane w powyższym dowodzie, umożliwia natomiast "przeliczenie" nieaktywnych praw sterowania na prawa sterowania postaci $u_k=u_k(z_{\gamma(k)})$, $\gamma(k)=D_k$.

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu syntezy nieaktywnych praw sterowania dla modelu bezpośredniego danego jako źródłowy. Modele takie występują przykładowo w ekonometrii. Model bezpośredni może być uzyskany również z przekształcenia modelu danego pierwotnie w zmiennych stanu. Nie-

aktywne prawa sterowania są z definicji funkcjami pomiarów z "odliczonym" wpływem sterowań. Połączenie w jednym problemie modelu bezpośredniego i pomocniczych praw sterowania pozwoliło na jawną dekompozycję wieloetapowego problemu wyjściowego na wzajemnie niezależne problemy jednoetapowe. Dla każdego z nich w przypadku modelu bezpośredniego liniowego względem sterowań, sterowanie optymalne jest liniową funkcją środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego typu S dla dowolnego całkowalnego zbioru $\mathbb{T}$. Możliwe jest również jawne zapisanie optymalnej postaci wskaźnika jakości.

Otrzymany wynik ma głównie charakter poznawczy, pokazuje bowiem w sposób najbardziej bezpośredni strukturę problemów syntezy praw sterowania z modelem liniowym, niepewnością ograniczoną i klasyczną strukturą informacyjną. W niektórych przypadkach postępowanie przedstawione w problemie może być wykorzystane do uproszczenia rozwiązania praktycznego problemu syntezy praw sterowania.

LITERATURA

[1] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MiT, Cambridge, 1971.

[2] Fogel E.: System identification via membership set constraints with energy constrained noise. IEEE Trans. Automatic Control, AC-24(1979), pp. 752-758.

[3] Fogel E., Huang Y.F.: On the value of information in system identification bounded noise case, Automatica, 18(1982), pp. 229-238.

[4] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[5] Ho Y. C.: Team decision theory and information structures. Proc. IEEE vol.68, (1980), pp.644-654.[28] Ho Y. C., Kastner M.P., Wong E.: Teams
signaling and information theory. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23(1978), pp. 305-311.

[6] Ho Y. C., Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems-part I. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17(1972), pp. 15-22.

[7] Keesman K.J., van Straten G.: Modified set theoretic identyfication of ill-defined water quality systems from poor data. Proc. of IAWPRC Symp. Systems Analysis in Water Quality Management, Pergamon Press, Oxford, 1987, pp.297-308.

[8] Kuncevicz W. M.: Opriedelenije garantirowanych ocenok sostojanija i paramietrov diskrietnych dynamiczieskich sistem. Kibiernietika i Wyczislitielnaja Tiechnika, Wyp.75 (1987), pp.1-6.

[9] Kurzhanskii A.B.: "Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[10] Kurzhanskii A.B.: Dynamic control and system estimation under uncertainty conditions. I, II. Probl. Control & Information Theory, No.6, 1980, No.1, 1981.

[11] Lin J.N.: Determination of rechable set for a linear discrete system. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 (1970), pp. 339-342.

[12] Norton J.P.: Identification and application of bounded-parameter models. Automatica, vol 23, 1987, pp.497-507.

[13] Ovseevich A.I., Trushchenkov V.L., Chernousko F. L.: Equations of continuous guaranteed state estimation for dynamical systems. Izvestija of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics, No.4, (1984), pp.94-101.

[14] Pronzato L., Walter E.: Some results on experiment design for bounded-error models. Proc. 12th. IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris, 1988.

[15] Schweppe F.C.: Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13(1968), pp. 408-414.

[16] Schweppe F.C.: "Układy dynamiczne w warunkach losowych", WNT, Warszawa 1978.

[17] Uchida K.: Certainty equivalence property in discrete time stochastic control problems with nonlinear measurements. Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ., No. 42, 1978, pp.1-16.

[18] Witsenhausen H.S.: Sets of possible states of linear systems given perturbed bservations. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13 (1968), pp. 556-558.

[19] Wojciechowski K.: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności. Z.N. Pol. Śl., Z.74, 1980.

[20] -: Sterowanie optymalne w warunkach niepewności stanu jako problem optymalizacji wielokryterialnej. Symp. Model. w Mech., Beskid Śląski 1984.

[21] -: Metoda symulacji układów dynamicznych w warunkach niepewności ograniczonej . SPD 2, Zakopane, 1985.

[22] -: Control and decision making under set-membership model of uncertainty. Analysis and synthesis. Raport, LH Wageningen, 1986.

[23] -: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności, Konf. RP.I.02, Kazimierz Dolny 1988.

[24] -: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek centrowanego zbioru $\mathbb{T}$, przyjęte do publikacji w Z.N. Pol. Śl. s. Automatyka.

[25] -: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru $\mathbb{T}$, przyjęte do publikacji w Archiwum Automatyki i Telemechaniki.

DODATEK A

A.1. Definicje i podstawowe własności zbiorów informacyjnych typu S

Modele bezpośrednie, odpowiednio swobodny i wymuszony zapisujemy w postaciach:

$$z_o^k=H_k s_k+v^k \tag{A.1}$$

$$z^k=H_k s_k+v^k+p_k(z^{k-1}) \tag{A.2}$$

gdzie w obydwu przypadkach $k\in\mathbb{H}$, $v_k\in R^p$, zaś grupa zmiennych s_k określona jest przez następujący podział wektora $t=(s_k,v^k)$, skąd $s_k\in R^{d-kp}$, $d=n+nN+pN$, $H_p\in R^{kp\times(d-kp)}$.

Definicja A.1. Określone dla każdego $k\in\mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\mu_{ok}:R^d\to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k,v^k)\in R^d$ punkt $(s_k,z^k)\in R^d$ gdzie $s_k=(x_1,w^N,v^{N/k})$, nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym. Odwzorowanie μ_{ok} przekształca dany zbiór $\mathbb{T}\subset R^d$ w zbiór

$$\mathbb{S}_{ok}=\mu_{ok}(\mathbb{T})=\{(s_k,z_o^k):(s_k,z_o^k)=\mu_{ok}(s_k,v^k)\,|\,(s_k,v^k)\in\mathbb{T}\}\subset R^d$$

Zbiór $\mathbb{S}_{ok}$ nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi $\mathbb{T}$ zgodnie z odwzorowaniem μ_{ok}.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$:

i) odwzorowanie μ_{ok} jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} = \mu_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie macierz H_k dana jest bezpośrednio, s_k wynika natomiast z podziału wektora $t=(s_k, v^k)$,

ii) odzworowanie odwrotne μ_{ok}^{-1} ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \mu_{ok}^{-1}(s_{ok}, z_o^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

Dowód. Dla modelu (A.1) postać odwzorowania μ_{ok} uzyskujemy dopisując do równań tego modelu tożsamość $s_k=s_k$. Odwzorowanie odwrotne otrzymujemy rozwikłując równanie modelu względem v^k.

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\mu_{ok}}| = 1$$

gdzie $J_{\mu_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z_o^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania μ_{ok}.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania μ_{ok} jest tożsama z macierzą (tw.A.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy jedności.

Wniosek A.1. Niech $d(s_k, z_o^k)$, $d(s_k, v^k)$ będą odpowiadającymi sobie zgodnie z odwzorowaniem μ_{ok} objętościami elementów różniczkowych zbiorów S_k, $\mathbb{T}$. Dla każdego $k \in H$ zachodzi

$$d(s\ , z^k) = d(s\ , v^k).$$

Słownie oznacza to ,że objętość elementu różniczkowego (miara) jest niezmiennikiem odwzorowania μ_{ok}.

Definicja A.2. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $\eta_{ok}: R^d \to R^d$, $d=n+nN+pN$, przyporządkowujące punktowi

$(s_k, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in S_{ok} \subset R^d$ punkt $(s_k, v_k, z_o^{k-1}) \in S_{ok-1} \subset R^d$. Odwzorowanie η_{ok} przekształca dany zbiór S_{ok} w zbiór

$$S_{ok-1} = \eta_{ok}(S_{ok}) = \left\{ (s_{k-1}, z_o^{k-1}) : (s_{k-1}, z_o^{k-1}) = \eta_{ok}(s_k, z_o^k) \,|\, (s_k, z_o^k) \in S_{ok} \right\}$$

Twierdzenie A.3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie η_{ok} jest liniowe i ma postać :

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -h_k' & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie odwrotne η_{ok}^{-1} ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ h_k' & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}$$

gdzie h_k' jest k-tym wierszem blokowym macierzy H_k z modelu (A.1).

Dowód. Postaci odwzorowań η_{ok}, η_{ok}^{-1} wynikają bezpośrednio z modelu (A.1) rozpisanego z dokładnością do "blokowych" wierszy.

Twierdzenie A.4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

$$|\det J_{\eta_{ok}}| = 1$$

gdzie $J_{\eta_{ok}} = \partial \begin{bmatrix} s_{ok-1} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania η_{ok}.

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania η_{ok} jest równa macierzy reprezentującej to odwzorowanie (Tw.A.3). Jej wyznacznik jest równy 1.

Wniosek A.2. Pomiędzy objętościami odpowiadających sobie według odwzorowania η_{ok} elementów różniczkowych zbiorów S_{ok-1}, S_{ok} zachodzi związek:

$$d(s_{ok-1}, z_o^{k-1}) = d(s_{ok}, z_o^k)$$

Podobnie pomiędzy objętościami elementów różniczkowych zbiorów warunkowych $S_{ok-1}|z_o^{k-1}$, $S_{ok}|z_o^{k-1}$ (p.A.2. Def.A.3) zachodzi związek:

$$ds_{ok-1}=ds_{ok}dz_{ok}$$

A.2. Zbiory warunkowe i rzuty

Definicja A.3. Niech dla każdego $k\in H$ będzie dany zbiór S_{ok} o elementach (s_{ok},z_o^k). Dla ustalonego z_o^k zbiór $S_{ok}|z_o^k=\{(s_{ok}):(s_{ok},z_o^k)\in S_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru S_{ok} przy warunku z_o^k.

Zbiór $S_{ok}|z_o^k$ można interpretować geometrycznie jako rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych s_{ok} "przekroju" danego zbioru S_{ok} hiperpłaszczyzną (w przestrzeni zmiennych (s_{ok},z_o^k)) z_o^k=const.

Definicja A.4. Niech dla każdego $k\in H$ będzie dany zbiór S_{ok} o elementach (s_{ok},z_o^k). Zbiór $P_{ok}=\pi_{zk}(S_{ok})=\{(z_o^k):(s_{ok},z_o^k)\in S_{ok}\}$ nazywamy rzutem ortogonalnym zbioru S_{ok} na przestrzeń zmiennych z_o^k. Zbiór $Z_{ok}|z_o^{k-1}=\{z_{ok}:(z_{ok},z_o^{k-1})\in P_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji z_{ok} dla danego ciągu obserwacji z_o^{k-1}.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Leszek Rutkowski

Wpłynęło do Redakcji 20.05. 1991r.

Abstract

In the paper a problem of nonactive control strategy design for the plant described by the direct model is presented . The model of uncertainty consists in the bounded Lebesgue integrable set $\mathbb{T}$ defining jointly possible values for initial conditions and sequences of disturbrnces in the state and measurement equation. To solve the problem, a novel method using free information sets of thee type $\mathbf{S}$ is used. Their definitions and properties are presented in the Appendix. In the paper it has been proved that for a

linear with respect to control model, control strategies creating with the model a nested information structure and the performance index being an aggregate od second moments of the image of the set $\mathbb{T}$ an optimal control strategy can be found independently in the each moment of the considered control horizon. Moreover it is a linear function of the center of gravity of the conditional information set.