ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: AUTOMATYKA z.108 Nr kol. 1150

Jan KAŁUSKI

PROCESY MARKOWA W STEROWANIU DYSKRETNYCH PROCESÓW PRZEMYSŁOWYCH

Streszczenie. W pracy rozważono dyskretne i ciągłe sterowane procesy Markowa typu dyfuzyjnego i pokazano możliwość ich zastosowania w sterowaniu dyskretnymi procesami przemysłowymi.

MARKOV PROCESSES IN THE CONTROL OF DISCRETE EVENTS INDUSTRIAL PROCESSES

Summary. In the paper discrete and continuous controlled Markov processes of diffusion type are considered. The possibility of their applications for discrete manufacturing processes is presented.

ПРОЦЕССЫ МАРКОВА В УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫМИ ПРОМЫШЛЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Резюме. В работе рассмотрены дискретные и непрерывные Марковские процессы диффузионного типа и показана возможность их применения в управлении дискретными производственными процессами.

1. Wprowadzenie

Rozwój metod stochastycznego sterowania produkcją został wywołany dwoma typami zadań praktycznych.

Pierwszy typ był związany z wielokrokowymi procesami decyzyjnymi, gdy oddziaływanie na system mogło zachodzić tylko w określonych momentach czasowych. Podobne zadania są rozwiązywane przy zastosowaniu dyskretnego stochastycznego dynamicznego programowania. Można tu wymienić prace HOWARDA [1], BELLMANA [2], OSAKI [3], DYNKINA I JUSZKIEWICZA [4].

Do drugiego typu należą zadania, w których występuje problem ciągłego sterowania "ruchem" w obecności zakłóceń losowych. Rozwiązywanie zadań tego typu związane jest z rozwiązywaniem równań różniczkowych, opisujących "ruch", natomiast zakłócenia są stochastycznymi procesami losowymi. Prace z tego zakresu były omawiane między innymi przez WONHEMA [5], BUCY'A, JOSEPHA [6], KRYŁOWA [7], SZIRIAJEWA [8].

W niniejszej pracy rozważono dyskretne i ciągłe sterowane procesy Markowa dyfuzyjnego typu i pokazano możliwość ich zastosowania w sterowaniu produkcją.

W związku z tym w punkcie 2 omówiono dyskretne procesy Markowa z dochodami oraz metodę rekurencyjną i iteracyjną przy optymalizowaniu pełnego oczekiwanego dochodu z działalności systemu. Rozpatrzono również procesy Markowa z czasem ciągłym, z przeliczalną liczbą stanów. W punkcie 3 omówiono ciągłe sterowane procesy Markowa dyfuzyjnego typu. Rozważono równanie Bellmana. W punkcie 4 (na tle omówionych metod analizy stochastycznego sterowania), przedstawiono możliwość stosowania tych metod do sterowania produkcją masową wyrobów na liniach montażowych lub w gniazdach produkcyjnych.

2. Dyskretne i ciągłe procesy Markowa z dochodami

Rozpatrzmy system, który daje dochód $d_{i,j}$ jednostek podczas przejścia systemu ze stanu i do stanu j, $i,j = \overline{1,N}$. Dana jest w związku z tym macierz dochodów $D = [d_{i,j}]$ oraz macierz stochastyczna prawdopodobieństw przejść w jednym kroku $P = [p_{i,j}]$. Modelem systemu w tym przypadku jest sterowany dyskretny proces Markowa ze skończoną liczbą stanów N. Dochód jest wielkością losową z rozkładem prawdopodobieństw sterowanym losowymi zależnościami procesu Markowa.

Niech $V_i(n)$ będzie pełnym oczekiwanym dochodem w ciągu n kolejnych kroków, jeżeli w danej chwili system znajduje się w stanie i. Można pokazać, że słuszna jest następująca rekurencyjna zależność dla $V_i(n)$:

$$V_i(n) = \sum_{j=1}^{j=N} P_{i,j} [d_{i,j} + V_j(n - 1)] \tag{1}$$

Wzór ten zwykle wykorzystuje się w postaci:

$$V_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{j=N} P_{i,j} V_j(n - 1) \tag{2}$$

gdzie:

$$q_i = \sum_{j=1}^{j=N} P_{i,j} d_{i,j} \qquad n = \overline{1,N} \tag{3}$$

Jest to oczekiwany dochód w chwili wyjścia systemu ze stanu i lub inaczej bezpośredni oczekiwany dochód związny ze stanem i.

W terminologii programowania dynamicznego q_i jest średnim dochodem w ciągu jednego kroku. W symbolice wektorowej wzór (2) ma postać:

$$V(n) = q + P V(n - 1) \tag{4}$$

gdzie:

V(n) - wektor kolumnowy o N składnikach - $V_i(n)$.

Analityczne badanie dyskretnych procesów Markowa z dochodami jest ułatwione poprzez stosowanie przekształcenia Z. Daje ono możliwość otrzymania jawnych analitycznych zależności dla pełnych dochodów w funkcji kroków n.

Jeżeli chcemy optymalizować naszą działalaność, to należy wybrać taką k-strategię, aby przy optymalnym postępowaniu otrzymać max $V_i(n + 1)$, tzn.:

$$V_i(n + 1) = \max_k \sum_{j=1}^{j=N} P^k_{i,j} [d^k_{i,j} + V_j(n)], \tag{5}$$

k - skończone.

Wzór (5) jest rekurencyjną zależnością dla pełnych dochodów. Nietrudno zauważyć, że równość ta wynika bezpośrednio z zastosowania "zasady optymalności" Bellmana z programowania dynamicznego do procesów rekurencyjnych typu Markowa.

Mamy więc do czynienia z dyskretnym programowaniem dynamicznym.

Dla dużych n zarówno (2), jak i optymalna procedura wyznaczania V(n) według (5) jest zbyt uciążliwa, gdyż wymaga postępowania optymalnego w każdym kroku dla $n = \overline{1,N}$. Prowadzi to do znacznej ilości obliczeń numerycznych.

W związku z tym rozpatrzymy ergodyczny proces Markowa o N stanach i o danych D oraz P. Chcemy wyznaczyć pełny oczekiwany dochód z przebiegu tego procesu. Jest jasne, że dochód ten zależy od n i rośnie nieograniczenie przy $n \to \infty$. Stąd wykorzystanie w praktyce tego wskaźnika dla długotrwałych procesów jest niecelowe. Bardziej w tym przypadku interesuje nas ŚREDNI DOCHÓD w jednostce czasu.

Niech $S = [s_{i,j}]$ będzie ergodyczną macierzą parwdopodobieństw przejść dla $n \to \infty$.

Wprowadźmy wektor kolumnowy:

$$g = [g_i] \tag{6}$$

gdzie:

$$g_i = \sum_{j=1}^{j=N} s_{i,j}\, q, \tag{7}$$

jest sumą bezpośrednich oczekiwanych dochodów q_i, uśrednionych z wagami $s_{i,j}$. Można pokazać również, że dla procesów ergodycznych słuszna jest postać asymptotyczna zależności (4):

$$V(n) = ng + V \tag{8}$$

Podstawiając (8) do (4) otrzymamy układ N równań liniowych, wiążący wielkość V_i, $i = \overline{1,N}$ oraz g z macierzami prawdopodobieństw przejść i dochodami procesu w postaci:

$$g + V_i = q_i + \sum_{j=1}^{j=N} P_{i,j} V_j \tag{8'}$$

Układ ten ma N+1 niewiadomych i rozwiązuje się go przy założeniu np., że $V_N=0$.

Procedura wyznaczania rozwiązania optymalnego składa się z kolejnych iteracji:

- określenia wag,
- polepszenia rozwiązania.

Dla procesów Markowa z czasem ciągłym wprowadzamy macierz intensywności przejść:

$$A = [a_{i,j}] \quad i,j = \overline{1,N} \tag{9}$$

Wówczas oznaczając

$$a_{j,j} = -\sum_{i=j} a_{j,i} \tag{9'}$$

można pokazać, że:

$$\frac{d}{dt} P_j(t) = \sum_{i=1}^{i=N} P_i(t)\, a_{i,j} \tag{10}$$

Macierz A nazywa się macierzą quasi-stochastyczną lub infinitezymalną.

$$\sum_i a_{i,j} = 0, \qquad a_{j,j} < 0 \qquad a_{i,j} > 0$$

Istnieje jednoznaczny związek między macierzą A oraz macierzą P:

$$A = \ln P \tag{11}$$

Stosując na przykład przekształcenia Laplace'a do analizy procesów Markowa z czasem ciągłym, można otrzymać jawne zależności dla prawdopodobieństw stanów w funkcji czasu.

3. Sterowane procesy dyfuzyjne

Załóżmy obecnie, że ewolucja pewnego systemu może być opisana równaniem różniczkowym typu:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t)) \tag{12}$$

względem wektora parametrów x tego systemu.

Niech wektor $\varphi(t,x(t))$ jest zakłócany oddziaływaniami losowymi. Wówczas $\varphi(t,x(t))$ można przedstawić w postaci:

$$\dot{x}(t) = m(t,x) + \sigma(t,x)\,\dot{\xi}(t) \tag{13}$$

gdzie:

m - wektor,

σ - macierz,

$\dot{\xi}(t)$ - wektorowy proces losowy.

Wzór (13) lepiej używać w formie całkowitej:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t m\,(t, x\,(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))\,d\xi(s) \tag{14}$$

gdzie:

x(0) - wektor stanu początkowego.

Jeżeli $\int_0^t \sigma(s,x(s))d\xi(s)$ jest całką stochastyczną Itô, to x(t) ma sens i jest procesem Markowa dyfuzyjnego typu. $\xi(t)$ w tym przypadku jest procesem Browna.

Jeżeli współczynniki m i σ zależą od pewnego parametru sterującego, to mamy do czynienia ze sterownaym procesem dyfuzyjnym.

Niech E_d jest d-wymiarową przestrzenią euklidesową, a x(t) procesem losowym w tej przestrzeni, opisanym równaniem:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t m[z(s),\ x(s)]\,ds + \int_0^t \sigma[z(s),\ x(s)]\,dw(s) \tag{15}$$

gdzie:

$x(0)$ - stan wejściowy procesu,

$w(t)$ - d_1 - wymiarowy proces Wienera.

$z(t)$ - wektor sterowań.

W równaniu tym $m(z,y)$, $\sigma(z,y)$ jest zadaną funkcją punktu $y \in E_d$ oraz parametru sterującego z. Oczywiście:

$m(z,y)$ - d - wymiarowy wektor,

$m(z,y) = (m_1(z,y),\ldots,m_d(z,y))$,

$\sigma(z,y)$ - macierz o wymiarch $d \times d_1$,

$\sigma(z,y) = (\sigma_{i,j}(z,y))$.

Oznaczmy zbiór możliwych sterowań, tzn. wartości parametru z przez Z. Za pomocą wyboru losowego procesu Z(s) z wartościami w Z, możemy otrzymać różne rozwiązania równia (15) i w ten sposób sterować rozpatrywanym procesem x(t).

Z praktycznego punktu widzenia naturalne jest, że wartości procesu sterującego Z(s) w chwili s są wybrane na podstawie obserwacji procesu x(t) w chwili s. Stąd Z(s) powinno być funkcją trajektorii x(t) dla $0 <= t <= s$; $Z(s) = Z(x[0,s])$. Niech dla każdej trajektorii x(t) w czasie od t do $t + \Delta t$ poniesione koszty z działalności systemu wynoszą:

$$\phi^{z(t)}(x(t)\Delta t + O(\Delta t)) ,$$

gdzie:

$\phi^{z(t)}$ - zadana funkcja.

Stąd dla danej trajektorii procesu x(t) w czasie sterowania tracimy (lub zyskujemy):

$$\alpha^{z} = \int_0^\infty \phi^{z(t)} (x(t))\, dt \tag{16}$$

Zatem średnio, przy wykorzystaniu strategii $Z = z(x[0,s])$ dla procesu x(t) ze stanem początkowym $x = x(0)$, tracimy:

$$V^{z}(x) = E\, [\int_0^\infty \phi^{z(t)} (x(t))\, dt] \tag{17}$$

Stosując zasadę Bellmana można otrzymać zależności dla funkcji strat (lub zysków, dochodów) V(x) oraz $Z^{\varepsilon} = z^{\varepsilon}(x, [0,s])$, tak aby

$$V^{z^{\varepsilon}}(x) <= V(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

gdzie z^{ε} - strategia ε-optymalna.

$$V(x) = \inf_{z} E \left[\int_0^{\infty} \phi^{z(s)} (x(s))\, ds + V[x(t)] \right] \tag{18}$$

Zauważmy, że $\phi^{z}(x)^{z}$ nie zależy w sposób jawny od czasu. W ogólnym przypadku

$$E \left[\int_0^{t} \phi^{z(s)} (x(s)) ds + V(x(t)] < E \left[\int_0^{t} \phi^{z(t)} (x(t))\, dt \right] \tag{19}$$

Jednak kresy górne dla obu wielkości w nierówności (19), wzięte po wszystkich strategiach, są takie same, czego odzwierciedleniem jest wzór (18).

Stosując wzór Itô (patrz np. [9]) na stochastyczne różniczkowanie do funkcji V(x(t)) otrzymamy:

$$V(x) = E \left[V(x(t)) \right] - E \left[\int_0^{t} L^{z(s)} (x(s))\, V(x(s))\, ds \right] \tag{20}$$

gdzie:

$$L^{z}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} (z,x) \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} m^{i}(z,x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

oraz

$$a^{ij}(z,x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d_1} \sigma^{ik}(z,x)\, \sigma^{jk}(z,x)$$

Po pewnych przekształceniach otrzymujemy różniczkowe równanie Bellmana:

$$\inf_{z \in Z} \left[L^{z}(x)v(x) + \phi^{z}(x)\right] = 0 \qquad (21)$$

Równanie to podaje sposób poszukiwania funkcji strat V(t) oraz sposób otrzymywania optymalnych i ε - optymalnych strategii.

Równanie (21) w formie rozwiniętej ma postać:

$$\inf_{z \in Z} \left[\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(z,x) V_{x^i x^j}(x) + \sum_{i,j=1}^{d} m^{i}(z,x) V_{x^i}(x) + \phi^{z}(x) \right] = 0 \qquad (22)$$

gdzie:

$m^{i}(z,x)$ - prędkość składowej i-tej zdeterminowanej procesu, gdy znajduje się on w punkcie x i ma miejsce sterowanie z,

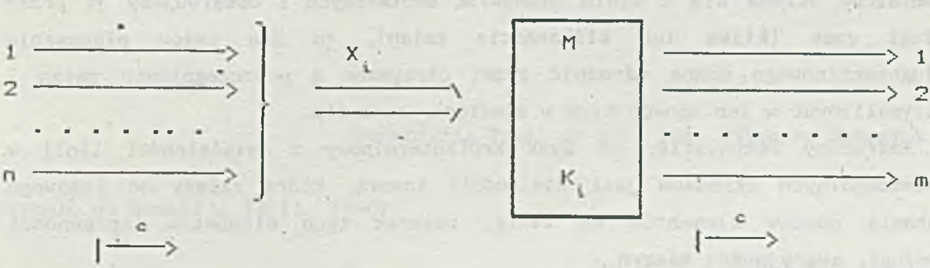
$$V_{x^i} = \partial V/\partial x^{i}, \quad V_{x^i x^j} = \partial^{2} V/\partial x^{i} x^{j}.$$

Macierz $a(z,x) = (a^{ij}(z,x)) = \frac{1}{2}\,\sigma(z,x)\,\sigma^{T}(z,x)$ charakteryzuje składową dyfuzyjną procesu. Jest to macierz symetryczna:

$$a^{T} = \frac{1}{2}\,(\sigma\,\sigma^{T}) = \frac{1}{2}\,\sigma\,\sigma^{T} = a \qquad (23)$$

4. Możliwości praktycznego zastosowania modeli Markowa do sterowania produkcją na liniach montażowych

Rozpatrywany będzie system linii montażowych przedstawiony na rysunku 1.



Rys.1. System linii montażowych (n-liczba takich samych linii montażowych)

Z takich linii wychodzą zmonotowane podzespoły danego wyrobu finalnego. Podzespoły te po wykonaniu są gromadzone w magazynie M. Następnie odbierane przez inne linie montażowe o m - równoległych nitkach. Linie te są identyczne $(m < n)$.

Oczywiście, wskutek usterek liczba podzespołów zmonotowanych w chwili c·i będzie K_i - zmienną losową zależną od zmiennej X_i prawdopodobieństw usterek na każdej z n - linii wejściowych. Przy założeniu, że wystąpienie usterki na danej linii wejściowej jest niezależne od występowania usterek na pozostałych oraz że usterki te są niezależne od czasu, można pokazać, że obowiązuje następująca zależność rekurencyjna:

$$K_{i+1} = \max \{K_i + X_{i+1} - m;\ 0\} \qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Mamy tu do czynienia z dyskretnym procesem Markowa.

Sterowanie procesem $\{K_i\}$ - sterowanie zapasem magazynu, można oczywiście prowadzić mając ustaloną macierz dochodów D i strategię postępowania.

5. Uwagi końcowe

W pracy omówiono sterowane dyskretne procesy markowskie oraz ciągłe typu dyfuzyjnego do sterowania dyskretnych procesów przemysłowych. Stosowanie dyskretnych procesów Markowa do tego celu nie budzi większych zastrzeżeń pod warunkiem, że są spełnione odpowiednie założenia.

Stosowanie ciągłych procesów Markowa opisanymi równaniami różniczkowymi wymaga jednak uzasadnienia. Każdy dyskretny proces przemysłowy jest rozpatrywany w dyskretnych chwilach czasu. Jeżeli jednak czas przebiegu procesu jest dostatecznie długi, to proces ten można aproksymować ciągłym sterowanym procesem Markowa typu dyfuzyjnego. Na przykład, jeżeli linia montażowa składa się z wielu stanowisk montażowych i obserwujemy ją przez długi czas (kilka lub kilkanaście zmian), to dla celów planowania długoterminowego można uśrednić zyski otrzymane z poszczególnych zmian i optymalizować w ten sposób zysk w miesiącu, roku itp.

Zakładamy oczywiście, że zysk krótkoterminowy z działalności linii w poszczególnych okresach jest wielkością losową, która zależy od losowego wahania dostaw elementów na linie, usterek tych elemnetów, sprawności obsługi, awaryjności maszyn.

W ten sposób można procesem ciągłym aproksymować trend zysków lub strat oraz innych parametrów linii. Sterowanie takim procesem może polegać na przykład na zatrzymaniu go w odpowiedniej chwili. Prognozowanie tego momentu i optymalizacja kosztów, które ponosimy w czasie procesu produkcyjnego, możne być wykorzystana do sterowania dyskretnym procesem przemysłowym.

Literatura

[1] Howard R.A.: Dynamic programming and Markov processes, John Wiley & Sons. New York 1960.

[2] Bellman R.: Dynamic programming, Princeton 1957.

[3] Mine H., Osaki S.: Markovian decision processes, Amer Elsvier, New York 1970.

[4] Dynkin E.B., Yushkevich A.A.: Controlled Markow processes, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[5] Wonham W.M.: Random differential equations in control theory, Probabilistic methods in applied mathematics, 2, Acad Press, New York 1970.

[6] Bucy R.S., Joseph P.D.: Filtering for stochastic process with application to quidance, John Wiley & Sons, New York - London 1968.

[7] Kryłow J.W.: Uprawlajemyje processy dyffuzjonnogo tipa. "Nauka", Moskwa 1977.

[8] Szyriajew A.N.: Statističeskij posledowatielnyj analiz "Nauka" - Moskwa 1980.

[9] Schuss Z.: Theory and Applications of Stochastic Differential Equations, John Wiley & Sons, New York 1980.

[10] Fassebender M.: Optimal stationary strategies in leavable Markow decision processes, J. Appl. Prob. 27, 1990.

[11] Iosifescu M.: Skończone procesy Markowa i ich zastosowania, PWN, Warszawa 1988.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Banaszak

Wpłynęło do Redakcji 13.11. 1990r.

Abstract

The development of the methods of stochastic control of manufacturing process is due to two types of practical tasks that have aries. The first type is connected with multi-step decision process, in which the system can be influenced only at determined time instants. The similar tasks are solved using discrete dynamic stochastic programming methods.

The task of the second kind is related to the problems of continuos "motion" control in presence of random interferences. Solving of this type of tasks is connected with solving differential equation describing the "motion", while the intereferences are stochastic random process.

In the present paper both discrete and continuous controlled diffusion type of a Markov process are regarded and their potential applications for manufacturing control are discussed.

The discrete Markow process with profit are considered. The recursive and iterative methods of optimizing the full expected profit from the operation of discrete manufacturing system are presented. The continuous, diffusion-type Markov processes are discussed and the applicability of the theory of controlled Markov processes to control the extensive manufacturing at assembly lines and on processing posts is proved.

As an example, the case of assemlyng line control at presence of random faults of either supplied products as well as occuring in the line, is discussed.